18498

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

GENERAL LIBRARY University of MICHIGAN

KÖN. PR. REGIERUNG ZU POTSDAM

Herausgegeben

von

A. L. Crelle.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preufsischer Behörden.

Fünfter Band,

In 4 Heften.

Mit 3 Kupfertafeln.

Berlin,

bei G. Reimer.

1830.

Inhaltsverzeichnifs
des fünften Bandes, nach den Gegenständen.

I. Reine Mathematik.

1. Analysis.

Nr. der Abhandlung		Heft	Seite
12.	Über die Existenz der Wurzeln einer höhern Gleichung mit Einer Unbekannten. Vom Hrn. *Adam Burg*, Professor der höhern Mathematik am K. K. polytechnischen Institute zu Wien.	II.	182
13.	Démonstration d'un théorème d'arithmétique proposé dans les annales de mathématiques de Mr. Gergonne, tom. XIX. p. 256. Par Mr. *J. A. Grunert*, prof. des math. à Brandebourg.	II.	185
14.	Mémoire sur la convergence de la série du binome; pour faire suite à la démonstration du théorème du binôme, donnée tome III. de ce journal, cahier 3., page 305. Par l'éditeur.	II.	187
15.	Recherches sur les expressions des puissances des cosinus et sinus en cosinus et sinus des arcs multiples, et sur les expressions réciproques. Par l'éditeur.	II.	197
21.	Deux théorèmes sur les nombres.	III.	296
23.	Über Interpolation. Von Herrn *Th. Clausen* zu München.	III.	305
27.	De approximata seriei, juxta data functionis derivata dispositae, summatione. Auct. Dr. *C. J. D. Hill*, Holm.	IV.	319
28.	Mathematische Bruchstücke aus Herrn N. H. Abel's Briefen. . .	IV.	336
29.	Exercitatio algebraica circa discerptionem singularem fractionum, quae plures variabiles involvunt. Auct. *C. G. J. Jacobi*, prof. math. ord. Regiom.	IV.	344
30.	Über die Relationen der Functionen welche der Gleichung $F_1y.\varphi_1x+F_2y_2x\ldots.+F_ny.\varphi_nx=F_1x.\varphi_1y+F_2x.\varphi_2y\ldots.+F_nx.\varphi_ny$ genugthun. Von Herrn *L. J. Magnus* zu Berlin.	IV.	365
32.	Über die Summe der Reihen $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}\ldots.$ und $1+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{13^2}+\frac{1}{19^2}\ldots.$ Von Herrn *Th. Clausen* zu München.	IV.	380
34.	Théorème sur les nombres.	IV.	386
35.	Sur un principe général dans la théorie des séries. Par Mr. *de Schmidten*, prof. des mathém. à Copenhague.	IV.	388
37.	Combinatorisch-analytische Abhandlung, enthaltend den Beweis der vier Summationsformeln Band 3. Heft 2. S. 207. d. Journals. Von Herrn Pr. *Gudermann* zu Cleve.	IV.	402

2. Geometrie.

1.	Über ein neues Coordinatensystem. Vom Herrn Professor *Plücker* zu Bonn.	I.	1
2.	Einige stereometrische Sätze, mit Bezug auf die Aufgaben Bd. II. Hft. 3. S. 292. No. 66. Vom Herrn Prof. Dr. *Grunert* zu Brandenburg. . .	I.	37
5.	Barycentrische Lösung der Aufgabe des Herrn Th. Clausen in des IV. Bandes 4. Hefte, Seite 391. u. s. w. Vom Herrn Professor *Möbius* zu Leipzig.	I.	102
6.	Beweis der Lehrsätze Band 2. Heft 3. Nr. 54. S. 287. Von Herrn *Felix Eberty* zu Berlin.	I.	107
10.	Bemerkungen zu den Aufgaben und Lehrsätzen S. 96. 97. 98. im ersten Heft zweiten Bandes dieses Journals. Vom Herrn *O. G. D. Aubert* zu Christiania in Norwegen.	II.	163

Nr. der Abhandlung		Heft	Seite
11.	Quelques observations sur les quatres droites données dans l'éspace et et non comprises deux â deux dans un même plan. Par Mr. *Garbinsky*, prof. à l'univ. et directeur de l'école polyt. à Varsovie.	II.	174
18.	Anwendung der elliptischen Transcendenten auf die sphärischen Polygone, welche zugleich einem kleinen Kreise der Kugel eingeschrieben und einem andern umgeschrieben sind. Von Hrn. Stud. *Richelot* zu Königsberg in Pr.	III.	250
19.	Über ein neues Princip der Geometrie und den Gebrauch allgemeiner Symbole und unbestimmter Coëfficienten. Von Hrn. Prof. *Plücker* zu Bonn.	III.	268
22.	Über die Curven des kürzesten Perimeters auf krummen Flächen. In Folge der Aufgabe 6. Band 3. Heft 1. S. 99. Von Herrn Dr. *Ferd. Minding* zu Berlin.	III.	297
25.	Beweis eines Lehrsatzes vom Fünfecke. In Folge der Aufstellung desselben S. 396., 4. Band 4. Heft dieses Journals. Von Hrn. *G*.....	III.	316
36.	Auflösung einiger Aufgaben der analytischen Geometrie vermittelst des barycentrischen Calculs. Von dem Herrn Ober-Lehrer *F. Minding* zu Berlin.	IV.	397

3. Mechanik.

4.	Recherches sur la figure et le mouvement d'une bulle d'air, dans un liquide de densité constante; question proposée par l'Academie Royale de Bruxelles pour le concours de 1828. Par Mr. *Theremin*, Capitaine du génie des voies de communications à Ircoutsk en Sibérie.	I.	93
9.	Mémoire sur le mouvement d'un corps rigide, soutenu par un plan fixe. Par Mr. *A. A. Cournot*, Dr. ès sciences à Paris.	II.	133
17.	Du mouvement d'un corps sur un plan fixe, quand on a égard a la résistance du frottement, et qu'on ne suppose qu'un seul point de contact. Par Mr. *A. A. Cournot*, Dr. ès sciences à Paris. (Suite du mémoire No. 9. cah. precéd.)	III.	223
31.	Recherches sur la figure et le mouvement d'une bulle d'air dans un liquide de densité constante. Par Mr. *Theremin*, capitaine du génie des voies de communications à Ircoutsk en Sibérie. (Suite du mémoire No. 4. tom. V. cah. 1.)	IV.	374
33.	Über die Bestimmung der Lage der Haupt-Umdrehungs-Axen eines Körpers. Von Herrn *Th. Clausen* zu München.	IV.	383

II. Angewandte Mathematik.

3.	Allgemeine und vollständige Berechnung aller beim Gleichgewichte mit Rücksicht auf Zapfenreibung vorkommenden Bestimmungsstücke. Von dem Herrn Dr. *G. S. Ohm* zu Berlin.	I.	51
8.	Kurze Darstellung der Haupt-Eigenschaften eines Systems von Linsengläsern. Vom Herrn Prof. *A. F. Möbius* zu Leipzig.	II.	113
20.	Solution d'une question relative à la théorie mathématique de la chaleur. Par Mr. *Lejeune-Dirichlet*, prof. de mathém.	III.	287
24.	Über Centrifugal-Pendel-Uhren. Von Hrn. *Th. Clausen* zu München.	III.	314

Aufgaben und Lehrsätze.

7.	Aufgaben und Lehrsätze, erstere aufzulösen, letztere zu beweisen; nebst anderen einzelnen Bemerkungen.	I.	110
16.	Aufgabe.	II.	222
26.	Aufgaben und Lehrsätze, erstere aufzulösen, letztere zu beweisen. .	III.	317
38.	Einige Nachrichten von Büchern.	IV.	414

1.
Über ein neues Coordinatensystem.

(Vom Herrn Professor *Plücker* zu Bonn.)

Jeder besondern Art die Lage eines Punctes in Beziehung auf Puncte oder Linien, die als der Lage nach bekannt angesehen werden, zu bestimmen, entspricht ein Coordinatensystem. Die Gleichung einer Curve, bezogen auf irgend ein Coordinatensystem, ist als die algebraische Aussage einer, dieselbe characterisirenden Eigenschaft, aus der sich alle übrigen Eigenschaften derselben herleiten lassen, anzusehen. Was die Leichtigkeit dieser Herleitung betrifft, so kommt offenbar sehr viel auf die Wahl derjenigen Eigenschaft, welche an die Spitze der Untersuchung gestellt wird, und mithin auf die Wahl des Coordinatensystems an. Das gewöhnliche Coordinatensystem ist offenbar dasjenige, welches im Allgemeinen die gröfste Leichtigkeit darbietet. Der eine grofse Theil der Geometrie, der von Gröfsen-Bestimmungen unabhängig ist (*géométrie de situation*) fliefst in diesem Systeme, eben weil er keine absolute Gröfsen-Bestimmung fordert, ohne alle Entwickelungen, unmittelbar aus der algebraischen Constitution der Gleichungen und einer allgemeinen Verbindung derselben. In diesem grofsen Felde der Untersuchung gewährt dasjenige Coordinatensystem mit welchem wir uns in dem Folgenden beschäftigen werden, im Allgemeinen dieselben Vortheile, und hat überdies noch vor dem gewöhnlichen Coordinatensystem einige besondere Vorzüge. Hierher gehört unter Anderm auch, dafs wenn wir die drei Puncte, die ich Coordinatenpuncte genannt habe, auf dem Umfange der Curve irgend einer Ordnung annehmen, aus der allgemeinen Gleichung derselben sogleich drei Constanten ausfallen, während wir auf entsprechende Weise, in dem gewöhnlichen Coordinatensysteme, nur das constante Glied fortschaffen können. Hierhin rechne ich ferner, dafs für die Curven aller Ordnungen sich Gleichungen ergeben, die in Beziehung auf drei Veränderlichen (p, q, r,) homogen sind; wonach die geometrische Interpretation des Theorems über die homogenen Functionen unmittel-

bar die Gleichung der Tangente und osculirender Curven für jeden gegebenen Punct der Curve liefert, u. s. w.

Die allgemeine analytische Methode, und die Methode die Herr Poncelet in seinem „*Traité des propriétés projectives*" entwickelt hat, beruhen auf der einen Seite auf ganz wesentlich verschiedenen Ideen, und stimmen doch, auf der andern Seite, so sehr in den Resultaten überein, dafs man, freilich sonderbar genug, die erste Methode als eine Periphrase, als ein Plagiat der zweiten hie und da betrachtet zu haben scheint; statt dafs man sich ruhig die Frage beantworten sollte: ob nicht ein nothwendiger Grund dieser Übereinstimmung vorhanden und wo derselbe zu suchen sei. Auch ich bin von dieser Übereinstimmung mehrmals überrascht worden: einige Beispiele hiervon bietet auch das Folgende dar. So scheint es mir z. B. bemerkenswerth, dafs wir in dem neuen Coordinatensystem ebenfalls auf jenen Satz hingeleitet werden, der in der Ponceletschen Methode eine grofse Rolle spielt, „dafs nemlich alle Puncte einer Ebene, die unendlich weit entfernt sind, in gerader Linie liegen," und wir überdies diese unendlich weit entfernte gerade Linie durch eine Gleichung zwischen endlichen Gröfsen darstellen können. Eben so stofsen wir in diesem System auf den andern Poncelet-schen Satz, „dafs zwei concentrische Kreise in unendlicher Entfernung einen imaginären doppelten Contact haben."

Ich habe bei den folgenden Entwickelungen nur die Absicht gehabt, an Beispielen zu zeigen, dafs die neue Methode, einerseits, zum Beweise vorgelegter einzelner Sätze und zur Darstellung allgemeiner Theorieen sich sehr geschmeidig zeigt, und dafs sie, andrerseits, Resultate finden lehrt, wenn man sie aus allgemeinen analytischen Gesichtspuncten betrachtet. Mein Haupt-Augenmerk war nur auf die Methode, aber keineswegs darauf gerichtet, neue Sätze zu geben. Der am Ende dieses Aufsatzes aufgestellte Satz, den ich früher für den einfachsten Fall, dafs nur zwei Puncte gegeben sind, bemerkte, ergab sich in dem neuen Coordinatensysteme unmittelbar für drei gegebene Puncte, wonach es natürlich war, seine ganze Allgemeinheit zu vermuthen; und der Beweis des allgemeinen Satzes scheint sich in dem neuen Systeme unvergleichbar viel leichter zu ergeben, als in dem gewöhnlichen.

Mit Rücksicht auf das neue Coordinatensystem habe ich die analytische Theorie der Reciprocität (*théorie des polaires réciproques*)

und deren so zu sagen unbegrenzte Erweiterung mehr angedeutet als ausgeführt.

Der gröfste Vortheil, der sich aus dem neuen Coordinatensysteme, besonders wenn wir demselben die gegen Ende dieses Aufsatzes angezeigte Allgemeinheit geben, ziehen läfst, betrifft wie mir scheint die mathematischen Entwickelungen der Mechanik. Doch hierauf konnte ich natürlich hier gar keine Rücksicht nehmen.

Anfangs war es meine Absicht, mich auch auf die Construction des Raumes auszudehnen. Hier sind die analytischen Erörterungen den nächstfolgenden ganz analog, wenn wir statt des Coordinaten-Dreiecks ein Coordinaten-Tetraëder nehmen. Doch hat dieser Aufsatz ohnedies schon einen so grofsen Umfang gewonnen, dafs ich hierauf verzichten mufs.

---

1. Es seien (Taf. I. Fig. 1.) OO', OO'' und $O'O''$ drei gerade Linien, die irgend ein beliebiges Dreieck bilden, und p, q und r die Abstände irgend eines beliebigen Punctes M von diesen drei geraden Linien. Wenn wir alsdann unsere Construction auf irgend ein gewöhnliches System geradliniger Coordinaten YAX beziehen, so sind bekanntlich die obigen Abstände p, q und r durch Ausdrücke gegeben, die in Beziehung auf die Coordinaten des Punctes M linear sind. Auch die Vorzeichen von p, q und r sind alsdann für eine bestimmte Lage des Punctes M volkommen bestimmt, und diese Zeichen ändern sich, wenn der Punct M von einer Seite der bezüglichen Linien OO', OO'' und $O'O''$ auf die andere Seite hinüberrückt. Wir nehmen (vergl. meine analyt. geom. Entwicklungen No. 31.) für einen innerhalb des spitzwinkligen Dreiecks $OO'O''$ liegenden Punct M:

p positiv, q negativ, r negativ.

Nach diesen Bemerkungen stellt jede Gleichung zwischen p, q und r, die in Beziehung auf diese Gröfsen von irgend einem $m$ten Grade ist, eine Linie der $m$ten Ordnung dar, deren auf ein gewöhnliches Coordinatensystem bezogene Gleichung wir leicht erhalten können. Wir werden uns in dem Folgenden nur auf solche Gleichungen beschränken, die in Beziehung auf p, q und r homogen sind, also auf Gleichungen von folgender Form:

1. $$Ap^m + Bp^{m-1}q + Cp^{m-1}r + Dp^{m-2}p^2 + Ep^{m-2}qr + \ldots + Yqr^{m-1} + Zr^m = 0.$$

2. Wenn wir:

$$\frac{p}{q} = \varphi, \quad \frac{r}{p} = \psi$$

setzen, so verwandelt sich die vorstehende Gleichung (1.) in folgende:

2. $$A + B\varphi + C\psi + D\varphi^2 + E\varphi\psi + \ldots + Y\varphi\psi^{m-1} + Z\psi^m = 0,$$

mithin in eine vollständige Gleichung des $m$ten Grades zwischen φ und ψ. Für irgend einen beliebig angenommenen Punct M erhalten wir für φ und ψ bestimmte und einzige Werthe. Auch das Zeichen dieser Gröfsen ist alsdann ein bestimmtes; für den Punct M z. B., der innerhalb des spitzwinkligen Dreiecks $OO'O''$ liegt, sind φ und ψ beide negativ.

Da die Gleichung (2.) eine vollständige des $m$ten Grades ist, und also eben so viele von einander unabhängige Constanten enthält, als die allgemeine Gleichung desselben Grades zwischen gewöhnlichen Coordinaten, so kann diese Gleichung, indem wir φ und ψ als veränderliche Gröfsen und die Coëfficienten A, B, C u. s. w. als beliebig zu bestimmende Constanten betrachten, alle möglichen Linien der $m$ten Ordnung darstellen.

3. Statt φ und ψ können wir auch:

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{p}{q} = \mu, \quad \frac{1}{\psi} = \frac{p}{r} = \nu,$$

als die beiden veränderlichen Gröfsen betrachten. Alsdann erhalten wir eine Gleichung, die eben so allgemein ist als die Gleichung (2.) und ebenfalls alle möglichen Linien $m$ter Ordnung darstellen kann. Diese Gleichung in μ und ν steigt im Allgemeinen zum $2m$ten Grade; kann aber in bestimmten Fällen, wie wir später sehen werden, auch unter den $m$ten Grad hinabsinken.

4. Wir können also φ und ψ, oder auch μ und ν, als Coordinaten ansehen, und demnach wollen wir O, O' und O'' den ersten, zweiten und dritten Coordinatenpunct, OO', OO'' und $O'O''$ die erste, zweite und dritte Coordinatenlinie, und endlich die Winkel $O''OO'$, $OO'O''$ und $OO''O'$ oder α, α' und α'' den ersten, zweiten und dritten Coordinatenwinkel nennen. In dem Folgenden werden wir dieselbe Bezeichnung beibehalten.

Nichts verhindert uns, zwei der drei Coordinatenlinien parallel anzunehmen. Alsdann liegt ein Coordinatenpunct unendlich weit, und ein Coordinatenwinkel ist Null.

5. Der Werth von φ oder μ ist derselbe für alle Puncte einer und derselben durch O gehenden geraden Linie, und eben so ist ψ und ν constant für alle Puncte einer durch O' gehenden geraden Linie. Es sind demnach

$$\varphi = \text{const.}, \quad \mu = \text{const.},$$

Gleichungen einer durch O, und

$$\psi = \text{const.}, \quad \nu = \text{const.},$$

Gleichungen einer durch O' gehenden geraden Linie. Während wir also in dem gewöhnlichen Coordinatensysteme geometrische Örter durch den Durchschnitt zweier, den Coordinaten-Axen parallelen geraden Linien construiren, construiren wir in dem neuen Coordinatensysteme geometrische Örter durch den Durchschnitt zweier, durch zwei feste Puncte O und O' gehenden geraden Linien.

Die Gleichung einer geraden Linie welche durch den dritten Coordinatenpunct geht, hat folgende Form:

$$\frac{\varphi}{\psi} = \text{const.}, \quad \frac{\mu}{\nu} = \text{const.}$$

6. Irgend zwei gerade Linien, die durch folgende beiden Gleichungen

$$\varphi = c, \quad \varphi = -c,$$

oder auch durch folgende:

$$\mu = c', \quad \mu = -c',$$

indem wir durch c und c' constante Gröfsen bezeichnen, dargestellt werden, bilden mit den beiden Coordinatenlinien OO' und OO'' ein System von solchen vier geraden Linien, die man „Harmonicalen" nennt.

7. Von solchen zwei geraden Linien, die durch folgende beiden Gleichungen:

$$\varphi = c, \quad \psi\left(=\frac{1}{\varphi}\right) = c,$$

in welchen wir durch c dieselbe beliebige Constante bezeichnen, dargestellt werden, bildet die eine mit OO' denselben Winkel als die andere mit OO''; von zweien geraden Linien

$$\psi = c', \quad \nu\left(=\frac{1}{\psi}\right) = c',$$

bildet eine denselben Winkel mit $O'O$, als die andere mit $O'O''$, und endlich von den beiden geraden Linien

$$\frac{\varphi}{\psi} = c'', \quad \frac{\mu}{\nu} = c'',$$

bildet eine mit $O''O$ denselben Winkel, als die andere mit $O''O'$.

8. Die Gleichung einer geraden Linie, die durch O'' und den Durchschnitt der beiden Linien

$$\varphi = c, \quad \psi = c'$$

geht, ist folgende:

$$\frac{\varphi}{\psi} = \frac{c}{c'}.$$

Eben so ist die Gleichung einer geraden Linie, die durch O'' und den Durchschnitt der beiden Linien

$$\mu = c, \quad \nu = c'$$

geht, folgende:

$$\frac{\mu}{\nu} = \frac{c}{c'}.$$

Nach der vorigen Nummer liegt hierin der Beweis von folgendem bekannten Satze:

Wenn man von irgend einem Puncte M in der Ebene eines Dreiecks, nach den Winkelpuncten desselben O, O' und O'' drei gerade Linien zieht, die mit den Seiten OO', $O'O$ und $O''O'$ Winkel bilden, welche gleich β, β' und β'' sind, so gehen diejenigen drei geraden Linien, welche durch dieselben Winkelpuncte gehen, und dieselben Winkel, β, β' und β'' mit den Seiten OO', $O'O''$ und $O''O$ machen, durch ein- und denselben Punct N.

Dieser Satz schliefst als besondern Fall den Satz ein, dafs diejenigen drei geraden Linien, welche die Winkel eines Dreiecks halbiren, sich in demselben Puncte schneiden. In diesem Falle fallen die beiden Puncte M und N zusammen und sind der Mittelpunct eines, die drei Seiten des Dreiecks berührenden Kreises. Im Allgemeinen sind M und N die beiden Brennpuncte einer in das Dreieck beschriebenen Linie zweiter Ordnung.

9. Die allgemeine Gleichung der geraden Linie ist folgende:

$$p + aq + br = 0,$$

mit der die nachstehenden beiden Gleichungen identisch sind:

$$1 + a\varphi + b\psi = 0,$$
$$\mu\nu + a\nu + b\mu = 0.$$

Für diejenigen beiden Puncte Q und R (Fig. 2.), in welchen diese gerade Linie die Coordinatenlinien OO'' und $O'O''$ schneidet, erhalten wir folgende:

$$\left(\varphi = 0,\ \psi = -\frac{1}{b}\right) \text{ und } \left(\varphi = -\frac{1}{a},\ \psi = 0\right),$$

und mithin ergiebt sich für S, den Durchschnitt von OR und $O'Q$:

$$\mu = \frac{1}{\varphi} = -a, \quad \nu = \frac{1}{\psi} = -b,$$

wodurch die beiden Constanten der obigen Gleichung bestimmt sind.

10. Wenn zwei lineare Gleichungen von folgender Form

$$mp + n(aq + br) = 0,$$
$$m'p + n'(aq + br) = 0,$$

wobei m, m', n und n' vier willkürliche Coëfficienten bezeichnen, gegeben sind, so erhalten wir durch eine einfache Verbindung dieser beiden Gleichungen folgende dritte:

$$p = 0.$$

Wir sehen hieraus dafs wenn wir m und n als unbestimmte Coëfficienten betrachten, alle einzelnen durch

$$mp + n(aq + br) = 0$$

dargestellten geraden Linien sich in einem festen Puncte von OO' schneiden. Auf ähnliche Weise schneiden sich alle durch die beiden Gleichungen

$$mq + n(p + br) = 0 \text{ und}$$
$$mr + n(p + aq) = 0$$

dargestellten geraden Linien in zwei festen Puncten von OO'' und $O'O''$.

11. Für zwei parallele gerade Linien OT und $O'T'$, die durch O und O' gehen und mit OO' irgend einen Winkel ω bilden, erhalten wir sogleich folgende beide Gleichungen:

$$p\sin(\alpha - \omega) + q\sin\omega = 0,$$
$$p\sin(\alpha' - \omega) - r\sin\omega = 0.$$

Diese beiden Gleichungen geben:

$$\cot\omega = -\frac{q - p\cos\alpha}{p\sin\alpha},$$
$$\cot\omega = \frac{r - p\cos\alpha'}{p\sin\alpha'}.$$

Setzen wir diese beiden Werthe für $\cot\omega$ gleich, entwickeln und berücksichtigen dafs

$$\sin\alpha\cos\alpha' + \sin\alpha'\cos\alpha = \sin(\alpha + \alpha') = \sin\alpha'',$$

so kommt:

$$3.\quad p\sin\alpha'' - q\sin\alpha' - r\sin\alpha = 0,$$

oder:

$$4.\quad \varphi\sin\alpha' + \psi\sin\alpha = \sin\alpha''.$$

Wir wären gerade zu derselben Gleichung gekommen, wenn wir statt OT und $O'T'$ zwei andere durch O und O' gehende Parallelen genommen hätten, die mit OO', statt ω, irgend einen andern Winkel bilden. Es stellen also die beiden letzten Gleichungen nur solche Puncte dar, die unendlich weit entfernt sind. Die lineare Form dieser Gleichung zeigt, dafs alle unendlich weit entfernten Puncte einer und derselben Ebene als in gerader Linie liegend zu betrachten sind *).

12. Nach der letzten Nummer ist offenbar, dafs wir durch Verbindung der Gleichungen irgend zweier parallelen geraden Linien zu den Gleichungen (3.) und (4.) kommen können. Wenn also

$$Ap = Bq + Cr$$

die Gleichung irgend einer gegebenen geraden Linie ist, so stellt, indem wir durch m irgend einen unbestimmten Coëfficienten bezeichnen, folgende Gleichung:

$$(mA + \sin\alpha'')p = (mB + \sin\alpha')q + (mC + \sin\alpha)r$$

alle möglichen geraden Linien dar, die der gegebenen parallel sind.

Für die allgemeinen Gleichungen aller, den drei Coordinatenlinien OO', OO'' und $O'O''$ parallelen graden Linien, erhalten wir hiernach, indem m immer noch einen unbestimmten Coëfficienten bezeichnet:

$$\begin{aligned} mp &= q\sin\alpha' + r\sin\alpha, \\ mq &= p\sin\alpha'' - r\sin\alpha, \\ mr &= p\sin\alpha'' - q\sin\alpha'. \end{aligned}$$

Zur Theorie der Linien zweiter Ordnung.

13. Die allgemeine Gleichung der Linien dieser Ordnung sei folgende:

$$1.\quad Ap^2 + 2Bpq + 2Cpr + Dq^2 + 2Eqr + Fr^2 = 0,$$

---

*) Denselben Satz leitet Herr Poncelet in seinem *Traité des propriétés projectives* aus der Theorie der Projection her.

„*Tous les points situés à l'infini sur un plan peuvent être considérés idéalement comme distribués sur une ligne droite unique, située elle même à l'infini sur ce plan.*" (No. 107.)

Mir scheint es sehr bemerkenswerth, dafs dieser Satz sich in unserm neuen Coordinatensysteme direct ergiebt und wir zugleich durch eine Gleichung zwischen zwei veränderlichen Gröfsen und bestimmten Constanten jene (ideale) gerade Linie, die alle unendlich weit entfernten Puncte der Ebene enthält, darstellen können. Hr. Poncelet zieht aus jenem Satze wichtige Folgerungen: wir kommen unmittelbar zu denselben Folgerungen, auf einem Wege der gegen jeden Einwurf gesichert ist, indem wir auf die lineare Form der letzten Gleichung des Textes Rücksicht nehmen. Wir werden noch in Laufe dieses Aufsatzes hierauf zurückzukommen Veranlassung finden.

mit der, nach unserer Bezeichnung, folgende identisch sind:

$$2. \quad A + 2B\varphi + 2C\psi + D\varphi^2 + 2E\varphi\psi + F\psi^2 = 0,$$

$$3. \quad A\mu^2\nu^2 + 2B\mu\nu^2 + 2C\mu^2\nu + D\nu^2 + 2E\mu\nu + F\mu^2 = 0.$$

Wenn wir die Voraussetzung machen, dafs die Curve durch den Punct O gehe, so mufs die Gleichung (1.) befriedigt werden, wenn man zugleich $p = 0$ und $q = 0$ setzt, woraus ersichtlich ist, dafs alsdann $F = 0$. Auf ähnliche Weise ergiebt sich, dafs $D = 0$ wenn die Curve durch den Punct O', und dafs $A = 0$, wenn sie durch den Punct A'' geht. In dem Falle also, dafs die Curve durch alle drei Puncte O, O' und O'' zugleich geht, erhalten wir statt (1.), (2.) und (3.) nun folgende Gleichungen:

$$4. \quad Bpq + Cpr + Eqr = 0,$$

$$5. \quad B\varphi + C\psi + E\varphi\psi = 0,$$

$$6. \quad Br + C\mu + E = 0.$$

Die letzte dieser drei Gleichungen ist dadurch, dafs wir alle Glieder durch $\mu\nu$ dividirt haben, linear geworden. Wir können also jede Linie zweiter Ordnung durch eine Gleichung vom ersten Grade ausdrücken, wenn wir die drei Coordinatenpuncte auf dem Umfange derselben annehmen. Hiernach ergiebt sich auf die leichteste Weise die Discussion der Eigenschaften solcher Linien zweiter Ordnung, die durch dieselben drei Puncte gehen. Zwei solcher Linien können sich, was die lineare Form ihrer Gleichungen zeigt, nur noch in einem einzigen Puncte schneiden.

Da die Gleichung (6.) dieselbe Form hat, als die Gleichung der geraden Linie in dem gewöhnlichen Coordinatensysteme, so ist offenbar, dafs jedem Satze über die Durchschnitte von geraden Linien ein Satz über die vierten Durchschnitte von Linien zweiter Ordnung, die sich in denselben drei Puncten schneiden, entspricht, und aus jeder analytischen Beweisführung eines jener Sätze ergiebt sich unmittelbar der Beweis des analogen Satzes, wenn wir den Constanten in der linearen Gleichung diejenige Bedeutung geben, welche sie in der Gleichung (6.) haben.

14. Indem wir

$$A + 2B\varphi + 2C\psi + D\varphi^2 + 2E\varphi\psi + F\psi^2 = 0$$

für die allgemeine Gleichung der Linien zweiter Ordnung nehmen und dieselbe differentiiren, kommt:

$$7. \quad (B + D\varphi + E\psi)d\varphi + (C + E\varphi + F\psi)d\psi = 0.$$

Setzen wir nach einander $d\varphi = 0$ und $d\psi = 0$, so giebt diese Gleichung:

$$8. \quad C + E\Phi + F\Psi = 0,$$
$$9. \quad B + D\Phi + E\Psi = 0.$$

Die Gleichung $d\Phi = d\frac{q}{p} = 0$ giebt aber

$$\frac{p}{q} = \frac{dp}{dq} = \frac{p+dp}{q+dq},$$

und eben so giebt die Gleichung $d\Psi = d\frac{r}{p} = 0$:

$$\frac{p}{r} = \frac{dp}{dr} = \frac{p+dp}{r+dr}.$$

Die vorletzte Gleichung zeigt, dafs, wenn wir von einem Puncte der Curve, der zugleich auf der geraden Linie (8.) liegt, zu einem consecutiven Puncte der Curve fortgehen, die beiden Puncte mit dem Puncte O in gerader Linie liegen, oder mit andern Worten, dafs die Tangenten in den Durchschnitten der geraden Linie (8.) mit der Curve, durch den Punct O gehen, und also diese gerade Linie die Polare des Punctes O ist. Eben so ist (9.) die Polare des Punctes O', und für die Gleichung der Polaren des Punctes O'' erhalten wir, ohne weitere Rechnung, folgende:

$$10. \quad A + B\Phi + C\Psi = 0.$$

Wir erhalten die Gleichungen (8.), (9.) und (10.) sogleich aus der Gleichung:

$$Ap^2 + 2Bpq + 2Cpr + Dq^2 + 2Eqr + Fr^2 = 0;$$

denn bezeichnen wir den ersten Theil dieser Gleichung der Kürze halber durch u, so sind jene drei Gleichungen keine andern als:

$$\frac{du}{dr} = 0, \quad \frac{du}{dq} = 0, \quad \frac{du}{dp} = 0.$$

Indem wir die Durchschnitte der durch die Gleichungen (8.), (9.) und (10.) dargestellten geraden Linien mit den Coordinatenlinien betrachten, ergiebt sich eine einfache **Bestimmung der Constanten in der allgemeinen Gleichung.**

15. Den Gleichungen (4.) und (6.) der 13ten Nummer können wir folgende Form geben:

$$\alpha pq + \beta pr = \alpha\beta qr,$$
$$\alpha\nu + \beta\mu = \alpha\beta,$$

und wir erhalten alsdann, indem wir differentiiren, für die Polaren der Coordinaten-Puncte O, O' und O'', oder, was in diesem Falle dasselbe heifst, für die Tangenten in diesen drei Puncten, folgende Gleichungen:

$$\mu = \alpha, \quad \nu = \beta, \quad \frac{\mu}{\nu} = -\frac{\alpha}{\beta};$$

so dafs also (Fig. 3.) für den Punct P'': $\mu = \alpha$, $\nu = \beta$;
- - - P': $\mu = \alpha$, $\nu = -\beta$;
- - - P $\mu = -\alpha$, $\nu = \beta$.

Hieraus ist zugleich ersichtlich, dafs die drei geraden Linien OP, $O'P'$ und $O''P''$ durch folgende drei Gleichungen dargestellt werden:

$$\mu = -\alpha, \quad \nu = -\beta, \quad \frac{\mu}{\nu} = \frac{\alpha}{\beta},$$

und also, wie bekannt, durch ein und denselben Punct Q gehen, dessen Coordinaten $\mu = -\alpha$ und $\nu = -\beta$ sind.

16. Um bei der Annahme eines beliebigen Coordinatendreiecks die Gleichungen derjenigen drei geraden Linien $O''\omega''$, $O'\omega'$ und $O\omega$ zu erhalten, welche die Puncte O'', O' und O mit den Polen ω'', ω' und ω der gegenüberstehenden Coordinatenlinien OO', OO'' und $O'O''$ verbinden, brauchen wir nur erstens die Gleichung (8.) mit B und (9.) mit C, zweitens (8.) mit B und (10.) mit E, drittens (9.) mit C und (10.) mit E zu multipliciren und dann abzuziehen. Auf diese Weise kommt:

$$\begin{aligned}(BE - CD)\varphi + (BF + CE)\psi &= 0,\\ (BC - EA) \quad + (BF - CE)\psi &= 0,\\ (BC - EA) \quad - (BE - CD)\varphi &= 0.\end{aligned}$$

Wenn wir irgend zwei dieser drei Gleichungen von einander abziehen, so erhalten wir die dritte. Also:

Wenn in der Ebene irgend einer Linie zweiter Ordnung zwei Dreiecke sich befinden, von denen die Winkelpuncte des einen die Pole der Seiten des andern sind, so gehen diejenigen drei geraden Linien, welche die gegenüberstehenden Winkelpuncte der beiden Dreiecke verbinden, durch ein- und denselben Punct, und also schneiden sich auch (nach dem Princip der Reciprocität) die gegenüberliegenden Seiten der beiden Dreiecke in solchen drei Puncten, die in einer geraden Linie liegen, der Polaren jenes Durchschnittspunctes.

Diese beiden Sätze können wir noch auf folgende Weise vervollständigen:

Diejenigen sechs übrigen geraden Linien, welche die drei Winkelpuncte des einen Dreiecks mit den drei Winkelpuncten des andern Dreiecks verbinden, berühren eine und

dieselbe Linie zweiter Ordnung, und die sechs übrigen Durchschnitte der drei Seiten des einen und der drei Seiten des andern Dreiecks liegen auf einer und derselben Linie zweiter Ordnung. *) Diese beiden Linien zweiter Ordnung sind *courbes polaires réciproques* in Beziehung auf die gegebene.

17. Tangenten-Theorie. Wir wollen wiederum folgende Gleichung:

$$A + 2B\varphi + 2C\psi + D\varphi^2 + 2E\varphi\psi + F\psi^2 = 0$$

zu Grunde legen. Ist alsdann durch irgend einen Punct (ψ', φ') eine Tangente an die Curve gelegt, und bezeichnen wir den Berührungspunct durch (ψ'', φ''), so ist die Gleichung der Tangente:

$$\psi - \psi'' = \frac{\psi' - \psi''}{\varphi' - \varphi''}(\varphi - \varphi'').$$

Diese Gleichung mufs befriedigt werden wenn wir für die veränderlichen Gröfsen ψ und φ die Coordinaten des auf der Curve genommenen, consecutiven Punctes $(\psi'' + d\psi'', \varphi'' + d\varphi'')$ nehmen. Auf diese Weise kommt:

$$d\psi'' = \frac{\psi' - \psi''}{\varphi' - \varphi''} d\varphi''.$$

Wenn wir die Differential-Ausdrücke vermittelst folgender Gleichung (7.):

$$(B + D\varphi + E\psi)d\varphi + (C + E\varphi + F\psi)d\psi = 0$$

fortschaffen und zugleich auf folgende Gleichung:

$$A + 2B\varphi'' + 2C\psi'' + D\varphi''^2 + 2E\varphi''\psi'' + F\psi''^2 = 0$$

Rücksicht nehmen, so erhalten wir endlich folgende, in Beziehung auf ψ'', φ'' und ψ', φ' symmetrische Gleichung:

11. $(C + E\varphi' + F\psi')\psi'' + (B + D\varphi' + E\psi')\varphi'' + C\psi' + D\varphi' + A = 0$,

welche, wenn wir φ' und ψ' als veränderlich betrachten, die Tangente im Puncte (ψ'', φ'') darstellt, und wenn wir ψ'' und φ'' als veränderlich betrachten, die Polare des Punctes (ψ', φ').

---

*) Man hat nemlich folgende beiden Sätze, von denen einer aus dem andern nach dem Principe der Reciprocität folgt:

Wenn von den neun Durchschnitten zweier Systeme von drei geraden Linien drei in graden Linien liegen, so liegen die übrigen sechs auf dem Umfange einer und derselben Linie zweiter Ordnung. (Entwicklungen S. 226.)

Wenn man zwei Systeme von drei Puncten durch neun gerade Linien verbindet, und drei dieser Linien durch denselben Punct gehen, so berühren die übrigen sechs ein und dieselbe Linie zweiter Ordnung.

Die Form der letzten Gleichung stimmt ganz mit der Form der ntspre chenden Gleichung in dem gewöhnlichen Coordinatensysteme überein. Diefs ergiebt sich leicht *a priori.* In dem Verlaufe dieses Aufsatzes werden wir noch eine elegantere Tangenten-Theorie entwickeln.

18. Wenn der Punct (ψ', φ') auf $O'O''$ liegt, so ist $\psi' = 0$, und je weiter er sich auf dieser Linie entfernt, desto mehr nähert sich φ' dem Werthe $\frac{\sin \alpha''}{\sin \alpha'}$. Hiernach erhalten wir aus (11):

12. $(C\sin\alpha' + E\sin\alpha'')\psi + (B\sin\alpha' + D\sin\alpha'')\varphi + (A\sin\alpha' + B\sin\alpha'') = 0,$

für die Gleichung desjenigen Durchmessers, der alle mit $O'O''$ parallele Chorden halbirt. Eben so erhalten wir

13. $(C\sin\alpha + F\sin\alpha'')\psi + (B\sin\alpha + E\sin\alpha'')\varphi + (A\sin\alpha + C\sin\alpha'') = 0$

14. $(E\sin\alpha - F\sin\alpha')\psi + (D\sin\alpha - E\sin\alpha')\varphi + (B\sin\alpha - C\sin\alpha') = 0$

für die Gleichungen derjenigen beiden Durchmesser, die alle mit OO'' und OO' parallele Chorden halbiren.

Aus der Zusammenstellung irgend zweier der letzten drei Gleichungen erhalten wir die Coordinaten des Mittelpunctes der Curve. Wenn dieser Punct mit dem Punct O'' zusammenfallen soll, so erhalten wir folgende Bedingungs-Gleichungen:

$$\frac{C}{\sin\alpha} = \frac{B}{\sin\alpha'} = -\frac{A}{\sin\alpha''}.$$

Auf ähnliche Weise ergiebt sich, wenn O' und O der Mittelpunct der Curve sein sollen:

$$\frac{F}{\sin\alpha} = \frac{E}{\sin\alpha'} = -\frac{C}{\sin\alpha''},$$

$$\frac{E}{\sin\alpha} = \frac{D}{\sin\alpha'} = -\frac{B}{\sin\alpha''}.$$

Nach der 12ten Nummer ist es leicht, auszudrücken, dafs zwei der drei Coordinatenlinien zweien zugeordneten Durchmessern parallel sind. So erhalten wir z. B. für den Fall, dafs $O''O$ und $O''O'$ zweien zugeordneten Durchmessern parallel sind, folgende Bedingungs-Gleichung:

$$\frac{A\sin\alpha + C\sin\alpha''}{B\sin\alpha + E\sin\alpha''} = -\frac{\sin\alpha''}{\sin\alpha'}$$

und wenn wir entwickeln,

$$A\sin\alpha\sin\alpha' + B\sin\alpha\sin\alpha'' + C\sin\alpha'\sin\alpha'' + E\sin^2\alpha'' = 0.$$

Nach der eben angezogenen 12ten Nummer können wir auch ausdrücken, dafs irgend zwei der drei Durchmesser (12.) (13.) (14.) parallel

sind, und also zu der Bedingungs-Gleichung kommen, die Statt finden mufs wenn die allgemeine Gleichung eine Parabel darstellen soll.

19. Sei wiederum:

15. $Ap^2 + 2Bpq + 2Cpr + Dq^2 + 2Eqr + Fr^2 = 0$

die allgemeine Gleichung der Linien zweiter Ordnung. Soll die Curve die Coordinatenlinie OO' berühren, so mufs diese Gleichung, wenn wir $p = o$ setzen, für $\frac{q}{r}$ zwei gleiche Werthe geben. Diefs führt zu folgender Bedingungs-Gleichung:

$$E^2 = DF.$$

Auf ähnliche Weise erhalten wir, wenn die Coordinatenlinien OO'' und OO' berührt werden sollen, folgende Bedingungs-Gleichungen:

$$C^2 = AF, \quad B^2 = AD.$$

Wenn alle drei Coordinatenlinien von der Curve berührt werden, und wir $A = 1$ setzen, wodurch der Allgemeinheit kein Abbruch geschieht, so können wir der Gleichung (15.), indem wir zugleich durch p^2 dividiren, folgende Form geben:

16. $1 + 2B\varphi + 2C\psi + B^2\varphi^2 - 2BC\psi\varphi + C^2\psi^2 = 0.$

Diese Gleichung ist in Beziehung auf B, C und φ, ψ symmetrisch. Wir müssen das vorletzte Glied derselben mit dem Zeichen — nehmen, weil wir, wenn wir das entgegengesetzte Zeichen nehmen, der Gleichung folgende Form geben können:

$$(A + B\varphi + C\psi)^2 = 0.$$

Alsdann erhalten wir also statt der Curve (16) ein System zweier zusammenfallender gerader Linien, was ganz der Anlage der letzten Entwicklungen gemäfs ist.

Wenn wir nach einander in der Gleichung der Curve $p = o$, $q = o$ und $r = o$ setzen, so kommt:

$$\frac{\psi}{\varphi} = \frac{B}{C}, \quad \psi = -\frac{1}{C}, \quad \varphi = -\frac{1}{B}$$

für die Gleichungen derjenigen drei geraden Linien, welche die drei Coordinatenpuncte O'', O' und O mit den Berührungen auf den gegenüberstehenden Seiten verbinden. Hiernach erhalten wir eine einfache Constanten-Bestimmung der Gleichung (16.).

20. Wenn die durch die Gleichung:

$$A + 2B\varphi + 2C\psi + D\varphi^2 + 2E\varphi\psi + F\psi^2 = 0,$$

dargestellte Curve eine Hyperbel ist, und wir auf einem Zweige derselben uns einen Punct immer weiter fortgerückt denken, so nähern sich die Werthe von φ und ψ immer mehr einer bestimmten Gränze, ohne, im Allgemeinen, unendlich oder Null zu werden. Diese Gränzenwerthe bestimmen zwei durch O und O' gehende geraden Linien, die, je weiter jener Punct sich entfernt, sich dem Parallelismus mit der Asymptote jenes Hyperbelzweiges immer mehr nähern. Hiernach ergiebt sich, wenn wir den Winkel, welchen jene Asymptote mit OO' bildet, ω nennen, für jene Grenzwerthe:

$$17. \quad \varphi = -\frac{\sin(\alpha-\omega)}{\sin\omega}, \quad \psi = \frac{\sin(\alpha'+\omega)}{\sin\omega}.$$

Substituiren wir diese Werthe in die Gleichung der Curve, so kommt:

$$17'. \quad A\sin^2\omega - 2B\sin\omega\sin(\alpha-\omega) + 2C\sin\omega\sin(\alpha'+\omega) + D\sin^2(\alpha-\omega) + 2E\sin(\alpha-\omega)(\sin\alpha'+\omega) + F\sin^2(\alpha'+\omega) = c.$$

Wenn wir entwickeln, so erhalten wir eine in Beziehung auf tang ω quadratische Gleichung. Die Wurzeln dieser Gleichung bestimmen die Richtung der beiden Asymptoten der Hyperbel, oder wenn die Wurzeln dieser Gleichung gleich sind, die Richtung der Durchmesser der Parabel. Werden die Wurezln imaginär, so stellt die vorstehende Gleichung eine Ellipse dar. Wir gehen in die Entwickelung dieser verschiedenen Beziehungen, die bei gehöriger Annahme des Coordinatendreiecks sich sehr vereinfacht, nicht weiter ein.

Wenn die letzte Gleichung (17.) für tang ω gleiche und entgegengesetzte Werthe giebt, so ist OO' parallel einer Axe der Curve. Für diesen Fall erhalten wir, wenn wir überdiefs annehmen, dafs die Curve durch die drei Coordinatenpuncte geht, und also $A = D = F = 0$ setzen:

$$B\sin\alpha - C\sin\alpha' + E\sin(\alpha-\alpha') = 0.$$

21. Wenn die Coordinatenlinie $O'O''$ einer Asymptote parallel ist, so erhalten wir für die Grenzwerthe (17.):

$$\psi = 0, \quad \varphi = \frac{\sin(\alpha+\alpha')}{\sin\alpha'} = \frac{\sin\alpha''}{\sin\alpha'} = \varphi',$$

und hiernach folgende in Beziehung auf A, B und D lineare Bedingungs-Gleichung:

$$A + 2B\varphi' + D\varphi'^2 = 0.$$

Soll $O'O''$ überdiefs selbst Asymptote sein, so mufs die letzte Gleichung, aufgelöset in Beziehung auf φ', gleiche Wurzeln geben, wonach:

$$\frac{B}{A} = -\frac{1}{\varphi'} = \frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha''}, \quad \frac{D}{A} = \frac{1}{\varphi'^2} = \frac{\sin^2\alpha'}{\sin^2\alpha''}.$$

Auf ähnliche Weise kommt, wenn OO'' der andern Asymptote parallel ist und wir $\frac{\sin\alpha''}{\sin\alpha} = \psi'$ setzen:

$$A + 2C\psi' + F\psi'^2 = 0,$$

und wenn OO'' selbst Asymptote sein soll:

$$\frac{C}{A} = -\frac{1}{\psi} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha''}, \quad \frac{F}{A} = \frac{1}{\psi'^2} = \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha''}.$$

Hiernach erhalten wir, wenn wir zugleich $A = 1$ setzen, für die Gleichung einer Hyperbel, deren Asymptoten OO'' und $O'O''$ sind:

$$1 - 2\frac{\varphi}{\varphi'} - 2\frac{\psi}{\psi'} + \frac{\varphi^2}{\varphi'^2} + 2E\varphi\psi + \frac{\psi^2}{\psi'^2} = 0,$$

oder:

$$\sin^2\alpha'' - 2\varphi\sin\alpha'\sin\alpha'' - 2\psi\sin\alpha\sin\alpha'' + \varphi^2\sin^2\alpha' + 2E\varphi\psi + \psi^2\sin^2\alpha = 0.$$

In diesen beiden Gleichungen ist E der einzige unbestimmte Coëfficient, und wir erhalten alle möglichen Hyperbeln, deren Asymptoten-System durch die Gleichung:

$$\varphi\psi = 0,$$

dargestellt wird, indem wir E alle möglichen Werthe beilegen. Durch eine einfache Verbindung zweier solcher Gleichungen, oder durch Verbindung einer solchen Gleichung und der Gleichung des Asymptoten-Systems, kommen wir zu folgender Gleichung:

$$(\sin\alpha'' - \varphi\sin\alpha' - \psi\sin\alpha)^2 = 0,$$

d. h. zu der Gleichung des Systems zweier zusammenfallender, unendlich weit entfernter gerader Linien.

Mit derselben Gleichung lassen sich auch die Gleichungen zweier ähnlicher und concentrischer Ellipsen verbinden, für deren allgemeine Gleichung wir, bei gehöriger Coordinaten-Bestimmung, die folgende, in welcher M einen unbestimmten Coëfficienten bedeutet, nehmen können:

$$\sin^2\alpha'' - 2\varphi\sin\alpha'\sin\alpha'' - 2\psi\sin\alpha\sin\alpha'' + M\varphi^2\sin^2\alpha' + 2\varphi\psi\sin\alpha\sin\alpha' + M\psi^2\sin^2\alpha = 0.$$

Und somit können wir mit H. Poncelet (*Traité des propriétés projectives* No. 130) sagen, dafs zwei ähnliche, concentrische Linien zweiter Ordnung in unendlicher Entfernung einen doppelten Contact haben, der reell oder ideal ist, je nachdem die beiden Curven Hyperbeln oder Ellipsen sind, und zugleich haben wir die Gleichung der unend-

lich weit entfernten Berührungs-Chorde. In der analytischen Behandlungsweise der Linien zweiter Ordnung ist dieser Satz von keiner besondern Wichtigkeit, weil wir alle allgemeinen Beziehungen sich doppelt berührender Linien dieser Ordnung unmittelbar erhalten, indem wir die Gleichungen zweier derselben durch allgemeine Symbole bezeichnen, und berücksichtigen, dafs solche zwei Gleichungen sich immer zu einer Gleichung, deren erster Theil das vollständige Quadrat eines linearen Ausdruckes ist, verbinden lassen. Der Satz gewinnt aber in der Methode des H. Poncelet eine besondere Bedeutung, weil derselbe, vermittelst dieses Satzes, die allgemeinen Beziehungen zweier sich doppelt berührender Curven zweiter Ordnung zu einander, aus den Eigenschaften eines Systems zweier concentrischen Kreise herleitet.

22. Theorie der Osculation. Wenn die durch:

$$p^2 + 2Bpq + 2Cpr + Dq^2 + 2Eqr + Fr^2 = 0$$

dargestellte Curve die Coordinatenlinie OO'' im Puncte O berühren soll, so mufs, wenn wir $q = 0$ setzen, die Gleichung

$$p^2 + 2Cpr + Fr^2 = 0,$$

für p zwei gleiche und verschwindende Werthe geben, so dafs also

$$C = 0, \quad F = 0.$$

Die Gleichungen zweier solcher Curven, die OO'' im Puncte O berühren, seien hernach folgende:

$$p^2 + 2Bpq + Dq^2 + 2Eqr = 0,$$
$$p^2 + 2B'pq + D'q^2 + 2E'qr = 0.$$

Ziehen wir diese beiden Gleichungen von einander ab, und vernachläfsigen den gemeinschaftlichen Factor q, so kommt:

$$2(B - B')p + (D - D')q + 2(E - E')r = 0:$$

für die Gleichung der gemeinschaftlichen Chorde beider Curven. Soll diese Chorde durch den Puunct O gehen, und sollen also die beiden Curven eine dreipunctige Osculation haben, so erhalten wir folgende Bedingungs-Gleichung:

$$E = E'.$$

Soll in diesem Falle der Durchschnittspunct beider Curven in die Coordinatenlinie OO' fallen, so erhalten wir, neben der letzten Bedingungs-Gleichung, noch folgende:

$$D = D'.$$

Für eine vierpunctige Osculation, wo die gemeinschaftliche Chorde mit der gemeinschaftlichen Tangente, der Coordinatenlinie OO'', zusammenfällt, erhält man endlich folgende beiden Bedingungs-Gleichungen:

$$E = E' \quad B = B'.$$

23. Für die Gleichungen zweier Linien zweiter Ordnung, die OO'' zur gemeinschaftlichen Asymptote haben, erhalten wir, (21.) indem wir $\frac{\sin \alpha''}{\sin \alpha} = \psi'$ setzen, Gleichungen von folgender Form:

$$p^2 + 2Bpq + 2\frac{1}{\psi'}pr + Dq^2 + 2Eqr + \frac{1}{\psi'^2}r^2 = 0,$$

$$p^2 + 2B'pq + 2\frac{1}{\psi'}pr + D'q^2 + 2E'qr + \frac{1}{\psi'^2}r^2 = 0.$$

Wenn wir abziehen, und den gemeinschaftlichen Factor p vernachläfsigen, so kommt:

$$18. \quad 2(B - B')p + (D - D')q + 2(E - E')r = 0,$$

für die Gleichung derjenigen geraden Linie, welche die zwei übrigen Durchschnitte der beiden Curven verbindet. Diese Chorde fällt mit der Asymtpote OO'' zusammen, und die beiden Curven haben in unendlicher Entfernung einen vierpunctigen Contact, wenn

$$B = B', \quad E = E'.$$

Soll dieser Contact blofs ein dreipunctiger sein, so ist die durch (18) dargestellte gerade Linie der Asymptote nur parallel, und es mufs also diese Gleichung befriedigt werden, wenn wir zugleich $q = 0$ und $\frac{r}{p} = \psi' = \frac{\sin \alpha''}{\sin \alpha}$ setzen, wonach wir folgende Bedingungs-Gleichung erhalten:

$$\frac{B - B'}{E - E'} = -\frac{\sin \alpha''}{\sin \alpha}.$$

24. Alle möglichen Curven, welche die Coordinatenlinien OO'' und $O'O''$ in denselben vier Puncten schneiden, können wir durch folgende Gleichung darstellen:

$$p^2 + 2Bpq + 2Cqr + Dq^2 + 2Eqr = Fr^2 = 0,$$

indem wir B, C, D und F als ein für alle Mal gegeben betrachten, und E nach einander alle möglichen Werthe beilegen. Eben so stellt dieselbe Gleichung alle möglichen Curven zweiter Ordnung dar, welche OO'' und OO' und dann $O'O''$ und $O'O$ in denselben vier Puncten schneiden, wenn

wir einmal blofs C, das andere Mal blofs B als unbestimmten Coëfficienten betrachten.

25. Eine Linie zweiter Ordnung, welche die beiden Coordinatenlinien $O''O$ und $O''O'$ in den Puncten O und O' berührt, hat folgende einfache Form:

$$p^2 + 2Eqr = 0.$$

26. Folgende Gleichung:

$$p^2 + Dq^2 + Fr^2 = 0$$

stellt eine Linie zweiter Ordnung dar, in Beziehung auf welche jede der drei Coordinatenlinien die Polare des gegenüberstehenden Coordinatenpunctes ist. (14.) Sind D und F beide positiv, so ist die Curve imaginär; sind D und F beide negativ und gleich, und nehmen wir überdiefs an, der Coordinatenwinkel bei O'' sei ein rechter, so stellt die Gleichung

$$p^2 + D(q^2 + r^2) = 0$$

eine Linie zweiter Ordnung dar, deren einer Brennpunct O'' und deren Brennpuncts-Polare (Directrix) OO' ist; und diese Linie ist Ellipse, Parabel oder Hyperbel je, nachdem $(-D) < 1$, $(-D) = 1$, $(-D) > 1$.

Aus dem Vorstehenden ergeben sich unmittelbar mehrere bekannte Sätze.

27. Wenn die Gleichung:

$$p^2 + 2Bpq + 2Cpr + Dq^2 + 2Eqr + Fr^2 = 0$$

eine Linie zweiter Ordnung darstellen soll, von welcher die Coordinatenlinien OO' und $O'O''$ berührt werden, so erhalten wir folgende beiden Bedingungs-Gleichungen:

$$E^2 = DF, \quad B^2 = D,$$

und mithin:

$$\frac{E}{B} = \pm\sqrt{[F]}.$$

Wenn dieselbe Curve überdiefs OO'' in zwei festen Puncten schneiden soll, so ist C und F constant. Da F constant ist, so es ist auch $\frac{E}{B}$ und mithin schneidet die Polare von O', die durch folgende Gleichung dargestellt wird:

$$B + D\varphi + E\psi = 0$$

die Coordinatenlinie OO'' in einem von zwei festen Puncten. In diesen beiden Puncten und in den Puncten O und O'' wird OO'' harmonisch getheilt. Hiernach erhalten wir folgenden bekannten Satz.

Wenn mehrere Linien zweiter Ordnung durch dieselben beiden Puncte gehen, und dieselben beiden geraden Linien berühren, so gehen die Berührungs-Chorden durch einen von zwei festen Puncten der gemeinschaftlichen Chorde aller Curven.

28. Wenn

$$A + 2B\varphi + 2C\psi + D\varphi^2 + 2E\varphi\psi + F\psi^2 = 0$$

irgend eine Linie zweiter Ordnung darstellt, so stellt:

$$D\varphi^2 + 2E\varphi\psi + F\psi^2 = 0$$

das System derjenigen beiden geraden Linien dar, die vom Puncte O'' nach den Durchschnitten der Curve mit OO' gezogen werden können, mithin stellt die Gleichung:

$$19.\quad A + 2B\varphi + 2C\psi = 0$$

diejenige gerade Linie dar, welche durch die beiden übrigen Durchschnitte jenes Linien-Systems und der Curve geht.

Die durch (19.) dargestellte gerade Linie und die Polare des Punctes O''

$$A + B\varphi + C\psi = 0,$$

schneiden sich, nach der 10ten Nummre, auf der Coordinatenlinie OO'. Wenn wir darauf Rücksicht nehmen, dafs das Coordinaten-Dreieck ein durchaus beliebiges ist, so liegt hierin die allgemeine Theorie der Pole und Polaren.

29. Für die Gleichungen derjenigen beiden geraden Linien, die zu den beiden Puncten O' und O'' in derselben Beziehung stehen, als die gerade Linie (19.) zu dem Puncte O'' steht, erhalten wir

$$2B + D\varphi + 2E\psi = 0,$$
$$2C + 2E\varphi + F\psi = 0.$$

Wenn wir diese beiden Gleichungen und die Gleichung (19.) mit den drei Gleichungen (8.), (9.) und (10.) vergleichen, so sehen wir, auch ohne die Beweis-Art der 16ten Nummer zu wiederholen, dafs die drei geraden Linien, welche die gengenüberstehenden Winkelpuncte des von den drei erstgenannten geraden Linien gebildeten Dreiecks uud des Coordinaten-Dreiecks verbinden, durch ein und denselben Punct gehen, und also auch die gegenüberliegenden Seiten der beiden Dreiecke sich in solchen drei Puncten schneiden, die in gerader Linie liegen. Wenn wir den besondern Fall betrachten, dafs die drei Coordinatenpuncte auf der Linie zwei-

ter Ordnung liegen, so erhalten wir den Satz vom umschriebenen Dreieck. (No. 15.)

30 Wenn wir, der Kürze wegen, durch

$$20. \quad A = 0, \quad A' = 0, \quad A'' = 0,$$

die Gleichungen irgend dreier Linien zweiter Ordnung (homogene Gleichungen des zweiten Grades zwischen p, q und r) bezeichnen, die durch zwei feste Puncte gehen, und wir durch diese beiden Puncte die Coordinatenlinie OO' legen, so können wir die Coëfficienten von q^2, qr und r^2 in den drei Gleichungen gleich nehmen, so dafs

$$A - A' = 0, \quad A - A'' = 0, \quad A' - A'' = 0,$$

drei Gleichungen darstellen, die linear sind und von denen zwei die dritte bedingen. Hierin liegt der Beweis des bekannten, an Corollarien reichen Satzes:

Wenn mehrere Linien zweiter Ordnung eine gemeinschaftliche Chorde haben, so gehen die zweiten gemeinschaftlichen Chorden je zwei derselben durch einen constanten Punct.

Wenn wir durchaus keine besondere Coordinaten-Bestimmung machen, und die gemeinschaftliche Chorde der drei Curven (20.) durch die Gleichung $e = o$, die drei zweiten Chorden durch die Gleichungen $a'' = 0$, $a' = o$, $a = o$, und endlich durch m, m' und m'' unbestimmte Coëfficienten bezeichnen, so kommt offenbar, (ähnlich wie Analyt. geom. Entw. No. 383):

$$A - m''A' = c.a'' = 0, \quad A - m'A'' = c.a', \quad A' - mA'' = c.a = 0,$$

und die Form dieser drei Gleichungen zeigt, dafs die drei zweiten Chorden durch denselben Punct gehen. Hierin liegt also ein anderer Beweis des vorstehenden Satzes, und überdiefs, wenn wir, als besondern Fall,

$$c = p\sin\alpha'' - q\sin\alpha' - r\sin\alpha$$

setzen, die Theorie der Chordalen (*axes radicaux*) ähnlicher und ähnlich liegender Linien zweiter Ordnung.

31. Wir wollen beispielsweise, in Beziehung auf einige der in dem Vorstehenden vorkommenden Gleichungen, einen allgemeinen Satz über die Variation der Constanten, den ich bei einer andern Gelegenheit gegeben habe, construiren; und werden auf diese Weise zu verschiedenartigen speciellen Sätzen kommen. *)

---

*) Der im Texte erwähnte Satz ist folgender. Es sei:

$$a. \qquad \varphi(y, x, b, a) = o$$

irgend eine algebraische oder transcendente Gleichung zwischen zweien veränderlichen Gröfsen y und

Wir haben in der 15ten Nummer für die Gleichung einer Linie zweiter Ordnung, die durch die drei Coordinatepnuncte geht, folgende gefunden: (Taf. I. Fig. 3.)

$$1. \quad \frac{\nu}{\beta} + \frac{\mu}{\alpha} = 1.$$

Bezeichnen wir irgend einen Punct dieser Curve durch (ν', μ'), so ist

$$\frac{\nu'}{\beta} + \frac{\mu'}{\alpha} = 1;$$

betrachten wir ferner in dieser Gleichung β und α als veränderlich und setzen $\beta = \nu$, $\alpha = \mu$, so erhalten wir folgende Gleichung:

$$2. \quad \nu'\mu + \mu'\nu = \mu\nu,$$

die eine gerade Linie darstellt, welche, wie auch der Punct (ν', μ') auf der Curve (1.) fortrücken mag, immer durch den festen Punct ($\nu = \beta$, $\mu = \alpha$) oder durch P'', den Durchschnitt der beiden Tangenten in den Coordinatenpuncten O und O' geht.

Die Construction der geraden Linie, (2.), die durch die beiden Puncte (ν', o) oder V, und (o, μ') oder W geht, giebt folgenden bekannten Satz:

Wenn man in eine Linie zweiter Ordnung, über einer und derselben Chorde, als Basis, mehrere Dreiecke beschreibt, so geht diejenige gerade Linie, welche die Durchschnitte der Schenkel je zweier solcher Dreiecke verbindet, durch einen festen Punct, den Pol der gemeinschaftlichen Basis aller Dreiecke.

Wir erhalten andere Constructionen desselben Satzes, wenn wir nicht β und α, sondern $(-\beta)$ und α oder β und $(-\alpha)$ für die veränderlichen Gröfsen nehmen, und statt (2.) die Gleichungen

---

x und beliebigen Constanten, von denen wir zwei durch b und a bezeichnet haben. Diese Gleichung stellt, wenn y und x auf irgend ein Coordinatensystem bezogen werden, eine Curve dar; bezeichnen wir irgend einen Punct dieser Curve durch (y', x') und betrachten die beiden Constanten als Coordinaten und veränderlich, so stellt die Gleichung:

$$b. \qquad \varphi(y', x', y, x) = 0$$

eine neue Curve dar, die sich ändert, wenn der Punct (y', x') auf der gegebenen Curve fortrückt, aber dabei nicht aufhört, durch den festen Punct $(y = b, x = a)$ zu gehen. Wenn die Gleichung $(a.)$ eine Constante nur im Quadrate enthält, so geht die Curve $(b.)$ durch zwei feste Puncte; sie geht durch vier feste Puncte, wenn jene Gleichung nur die Quadrate der beiden Constanten enthält. Nichts verhindert uns in der ursprünglichen Gleichung b und a Null zu setzen.

$$\nu'\mu - \mu'\nu = 1, \quad -\nu'\mu + \mu'\nu = 1$$

construiren, welche solche gerade Linien darstellen, die durch die beiden festen Puncte ($\nu = -\beta$, $\mu = \alpha$) oder P', und ($\nu = \beta$, $\mu = -\alpha$) oder P, gehen. Wir erhalten aber einen andern Satz, wenn wir $(-\beta)$ und $(-\alpha)$ für die beiden veränderlichen Gröfsen nehmen und also folgende Gleichung:

$$\nu'\mu + \mu'\nu + \mu\nu = 0,$$

oder:

$$p + \mu' q + \nu' r = 0,$$

construiren. Die durch diese Gleichungen dargestellte gerade Linie geht durch den festen Punct ($\nu = -\beta$, $\mu = -\alpha$) d. h. durch Q, den Kreuzungspunct derjenigen drei graden Linien, welche die Winkelpuncte des umschriebenen Dreiecks $PP'P''$ mit den gegenüberliegenden Berührungspuncten O, O' und O'' verbinden.

Wenn wir von irgend einem Puncte (μ', ν') gerade Linien nach den Winkelpuncten des Coordinaten-Dreiecks ziehen, so bestimmen die Durchschnitte derselben mit den Seiten dieses Dreiecks ein neues Dreieck UVW. Die gegenüberliegenden Seiten der beiden Dreiecke schneiden sich in solchen drei Puncten, die in gerader Linie liegen, und diese gerade Linie wird durch (3.) dargestellt. Wenn der Punct (ν', μ') auf irgend einer, durch die Winkelpuncte des Dreiecks $OO'O''$ gehenden Linie zweiter Ordnung fortrückt, so dreht sich diese gerade Linie um einen festen Punct. (Dieser Satz ist von Herrn Steiner in einem frühern Hefte dieses Journals zur Beweisführung vorgelegt worden. Ich bemerke beiläufig, dafs bei dem analogen Satze im Raum, an die Stelle der beliebigen, dem Dreieck umschriebenen, Linie zweiter Ordnung irgend eine Fläche dritter Ordnung tritt, in welcher die sechs Kanten eines Tetraëders liegen.)

32. Wenn wir in der Gleichung (1.) der vorigen Nummer nicht β und α, sondern $\frac{1}{\beta}$ und $\frac{1}{\alpha}$ als veränderliche Gröfsen construiren, so erhalten wir, nach derselben Verfahrungs-Weise, nun nicht mehr gerade Linien, die durch denselben Punct gehen, sondern Linien zweiter Ordnung, die, aufser in den drei Coordinatenpuncten, sich noch in einem vierten festen Puncte schneiden .Die Bestimmung dieser Curven hat keine Schwierigkeit.

33. Wir können auch von der Gleichung (2.):

$$\nu'\mu + \mu'\nu = \mu\nu,$$

als der Gleichung einer gegebenen geraden Linie, ausgehen, und indem wir $(\pm\nu')$ und $(\pm\mu')$ als veränderlich betrachten und irgend einen Punct dieser Linie durch (β, d) bezeichnen, zu der Gleichung einer Linie zweiter Ordnung:

$$\pm\frac{\nu}{\beta} \pm \frac{\mu}{\alpha} = 1$$

zurückgehen. Alle Linien dieser Ordnung, die wir auf diese Weise erhalten, indem der Punct (β, α) auf der gegebenen geraden Linie fortrückt, gehen durch den festen Punct $(\pm\nu', \pm\mu')$. Wenn (Taf. I. Fig. 4.) MN die gegebene gerade Linie ist, und die Coordinatenlinien OO'' und $O'O''$ in den beiden Puncten Q und R schneidet, so ist S, der Durchschnitt von OR und $O'Q$, der feste Punct (ν', μ').

Also:

Alle Linien zweiter Ordnung, welche durch dieselben drei Puncte gehen, und in diesen drei Puncten die Seiten eines veränderlichen Dreiecks berühren, in welchen einer der drei Winkelpuncte oder der Kreuzungspunct der von diesen Winkelpuncten nach den gegenüberliegenden Berührungen gezogenen, geraden Linien auf einer gegebenen geraden Linie fortrückt, gehen durch noch einen vierten festen Punct.

Wenn ein Winkelpunct auf einer geraden Linie fortrückt, so rücken offenbar auch die beiden übrigen Winkelpuncte und der Kreuzungspunct auf geraden Linien fort, und wenn der Kreuzungspunct auf gerader Linie fortrückt, so thut es auch jeder Winkelpunct.

Nach der Theorie der Reciprocität (*des polairer réciproques*) erhalten wir aus dem Vorstehenden folgenden Satz:

Wenn man in ein gegebenes Dreieck beliebig viele Linien zweiter Ordnung beschreibt, so entsprechen jeder derselben drei Berührungs-Chorden, welche die drei Dreiecksseiten in solchen drei Puncten schneiden, die in derselben geraden Linie liegen. Wenn irgend eine jener drei Berührungs-Chorden durch einen festen Punct geht, so thun es auch die beiden andern und jene letztgenannte gerade Linie: alsdann berühren alle Curven, aufser den drei Dreiecksseiten, noch eine constante vierte gerade Linie.

34. Für die Gleichung einer die drei Coordinatenlinien berührenden Linie zweiter Ordnung erhalten wir, nach der 19ten Nummer, folgende:

1. $1 - 2A\varphi - 2B\psi + A^2\varphi^2 - 2AB\varphi\psi + B^2\psi^2 = 0$;

wenn der Kreuzungspunct der drei von den Coordinatenpuncten nach den gegenüberstehenden Berührungen gezogenen geraden Linien der Punct $\left(\psi = \frac{1}{B}, \varphi = \frac{1}{A}\right)$ ist. Bezeichnen wir irgend einen Punct der Curve durch (ψ', φ'), so stellt die Gleichung:

2. $1 - 2\varphi'\varphi - 2\psi'\psi + \varphi'^2\varphi^2 - 2\varphi'\psi'\varphi\psi + \psi'^2\psi^2 = 0$

neun die drei Coordinatenlinien berührende Linien zweiter Ordnung dar, die alle durch den festen Punct $(\psi = B, \varphi = A)$ gehen und für welche der veränderliche Kreuzungspunct $\left(\psi = \frac{1}{\psi'}, \varphi = \frac{1}{\varphi'}\right)$ ist.

Die Beziehung der Curve (1.) zu jeder Curve (2.) ist eine gegenseitige. Der Kreuzungspunct der einen hat zu Coordinaten die reciproken Werthe der Coordinaten eines Punctes der andern. Sind daher irgend zwei Puncte der Curve (1.) gegeben, so erhalten wir zwei Curven (2.); diese beiden Curven schneiden sich im Allgemeinen in vier Puncten, und die reciproken Coordinaten-Werthe dieser vier Puncte bestimmen die vier Kreuzungspuncte derjenigen vier Linien zweiter Ordnung, welche, im Allgemeinen, die drei Coordinatenlinien berühren und durch die beiden gegebenen Puncte gehen. Die hierdurch angezeigte Construction einer Linie zweiter Ordnung, die drei gegebene gerade Linien berührt und durch zwei gegebene Puncte geht, läfst sich, nach bekannten Sätzen, auf elementarem Wege ausführen. —

35. Wenn wir durch die Gleichung:

1. $F(\psi, \varphi) = 0$

irgend eine algebraische oder transcendente Curve darstellen, so erhalten wir die Gleichung einer zweiten Curve, wenn wir für ψ und φ ihre reciproken Werthe nehmen:

2. $F\left(\frac{1}{\psi}, \frac{1}{\varphi}\right) = F(\nu, \mu) = 0.$

Die Beziehung der beiden Gleichungen zu einander ist eine gegenseitige. Im Allgemeinen ist, wenn die eine derselben algebraisch und von irgend einem $m$ten Grade ist, die andere vom $2m$ten Grade. Beide Cur-

ven sind durch gleichviele Puncte bestimmt. Wenn eine derselben gegeben ist, so können wir so viele Puncte der andern construiren, als wir wollen. Wenn (1.) irgend eine gerade Linie darstellt, so stellt (2.) eine durch die drei Coordinatenpuncte gehende Linie zweiter Ordnung dar. Wenn daher, aufser diesen drei Coordinatenpuncten, noch irgend zwei Puncte dieser Linie gegeben sind, so können wir zwei Puncte jener geraden Linie und dann wiederum so viele Puncte der Linie zweiter Ordnung construiren, als wir wollen (N. 7.). Wenn (1.) eine durch einen Coordinatenpunct gehende gerade Linie darstellt, so stellt (2) eine zweite solche gerade Linie dar. Wenn (1.) eine durch zwei Coordinatenpuncte gehende Linie zweiter Ordnung darstellt, so stellt (2.) ebenfalls eine solche Linie zweiter Ordnung dar, und diese beiden Linien können auch identisch dieselben sein.

Durch drei Tangenten und einen der beiden Brennpuncte ist eine Linie zweiter Ordnung vollkommen bestimmt. Läfst man diese Linie sich so ändern, dafs der eine Brennpunct die Curve (1.) beschreibt, so beschreibt der andere Brennpunct die Curve (2.) (Nr. 8.). In dem Falle der Parabel liegt ein Brennpunct unendlich weit; wir können also für (1.) nach der 11ten Nummer folgende Gleichung nehmen:

$$\varphi \frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha''} + \psi \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha''} = 1,$$

und erhalten alsdann für (2.):

$$\mu \frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha''} + \nu \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha''} = 1:$$

eine Gleichung, in der wir ohne Mühe die Gleichung des, um das Coordinaten-Dreieck beschriebenen Kreises erkennen.

Theorie der Reciprocität.*)

36. Die Theorie der Reciprocität**) ist unstreitig eine der schönsten und bedeutendsten Erweiterungen der Geometrie in neuester Zeit. In die Ehre ihrer ersten Erfindung theilen sich die H. H. Gergonne

*) Um kein neues Wort einzuführen, werde ich diesen Ausdruck als die Uebertragung des Poncelet'schen „*théorie des polaires réciproques*" gebrauchen.

**) Aus der im Texte entwickelten analytischen Theorie der Reciprocität springt sogleich in die Augen, dafs sich jeder Satz, der sich auf gerade Linien bezieht, und zur „*géométrie de situation*" gehört, unmittelbar auf alle solche algebraische oder transcendente Curven, deren Gleichungen, bezogen auf irgend ein Coordinatensystem, in Beziehung auf zwei ihrer Constanten linear sind, übertragen und also unendlich vervielfältigen läfst. Da unsere Entwicklungen auf der Variation der Constanten beruhen, so erscheint, wie ich schon anderswo angedeutet habe, wenn wir noch einen

und Poncelet. Ich meinerseits bin später auf einem sehr verschiedenen, rein analytischen Wege und ohne eine *conique directrice* zu Hülfe zu nehmen, zu demselben Ziele gekommen, und habe, was immer der unschätzbare Vortheil der analytischen Methode ist, gleich von Anfang an der Sache eine viel allgemeinere Seite abgewonnen. Eine Entwicklung der analytischen Theorie der Reciprocität habe ich bereits im August 1828 an den verdienstvollen Redacteur der Annalen nach Montpellier eingesandt: ich kann hier nur ein paar Andeutungen geben, die in speciellerer Beziehung zu dem neuen Coordinatensysteme stehen.

37. Es sei:

$$b\psi + a\varphi = 1$$

die Gleichung irgend einer geraden Linie. Wir wollen den leicht zu construirenden Punct ($\psi = b$, $\varphi = a$) den Pol dieser Linie nennen. Es sei ferner (ψ', φ') irgend ein Punct der geraden Linie; alsdann stellt:

$$\psi'\psi + \varphi'\varphi = 1$$

irgend eine gerade Linie dar, die durch den Punct (b, a) geht und deren Pol, der obigen Definition gemäfs, der Punct (ψ', φ') ist. Also:

Der geometrische Ort für die Pole aller geraden Linien, die durch einen gegebenen Punct gehen, ist eine gerade Linie, deren Pol jener Punct ist.

Auf diesen Satz läfst sich unmittelbar die ganze Theorie der *polaires réciproques* gründen. Wir verweilen nicht hierbei, weil, aufser der Definition und der Construction des Poles, hier Alles gerade so sich verhält, wie bei dem gewöhnlichen Coordinatensysteme, und wollen nur ein Beispiel von der Verallgemeinerung dieser Theorie geben.

38. Es sei:

$$1.\quad \frac{\psi}{b} + \frac{\varphi}{a} = 1$$

die Gleichung irgend einer geraden Linie. Wir wollen den Punct ($\psi = b$, $\varphi = a$) den Pol der geraden Linie nennen. Es sei ferner:

$$\frac{B}{\psi} + \frac{A}{\varphi} = 1$$

die Gleichung irgend einer, durch die drei Coordinatenpuncte gehenden, Linie zweiter Ordnung. Wir wollen den Punct ($\psi = B$, $\varphi = A$) den Pol dieser Linie zweiter Ordnung nennen. Bezeichnet nun (ψ', φ') irgend

---

Schritt weiter gehen, die Reciprocität insbesondere auch mit der Theorie der Abwickelung (*théorie des développées et développantes*) unter einem allgemeinen Gesichtspuncte.

einen Punct der graden Linie (1.), so stellt

$$2. \quad \frac{\psi'}{\psi} + \frac{\varphi'}{\varphi} = 1$$

eine Linie zweiter Ordnung dar, die durch den Punct (b, a), d. h. durch den Pol von (1.) geht, und deren Pol, gegenseitig, der auf (1.) liegende Punct (ψ', φ') ist. Also:

Der geometrische Ort für die Pole aller Linien zweiter Ordnung, die aufser durch die drei Coordinatenpuncte, noch durch einen vierten festen Punct gehen, ist eine gerade Linie, deren Pol dieser vierte feste Punct ist, und, gegenseitig, der geometrische Ort für die Pole aller geraden Linien, die durch denselben festen Punct gehen, ist eine Linie zweiter Ordnung, deren Pol dieser feste Punct ist.

Die Pole der Seiten eines gegebenen Sechsecks z. B. bestimmen ein neues Sechseck, dessen Seiten Bogen von Linien zweiter Ordnung sind, und die Winkelpuncte des gegebenen Sechsecks zu Polen haben. Wenn sich eine Linie zweiter Ordnung in das gegebene Sechseck beschreiben läfst, so schneiden sich diejenigen Linien zweiter Ordnung, deren Bogen die gegenüberliegenden Seiten des zweiten Sechsecks sind, in solchen drei Puncten, die mit den drei Coordinatenpuncten auf derselben Linie zweiter Ordnung liegen. Wenn sich um das gegebene Sechseck eine Linie zweiter Ordnung beschreiben läfst, so schneiden sich diejenigen drei Linien zweiter Ordnung, welche durch die drei Coordinatenpuncte und die drei Paare von gegenüberliegenden Winkelpuncten des zweiten Sechsecks gehen, in demselben Puncte u. s. w.

39. Von der Vervielfältigung bekannter Sätze, worin eigentlich die Theorie der Reciprocität besteht, wollen wir ein einziges Beispiel geben: Wenn die gegenüberliegenden Winkelpuncte zweier Dreiecke auf drei, durch denselben Punct gehenden geraden Linien liegen, so schneiden sich, wie bekannt, die gegenüberliegenden Seiten der beiden Dreiecke in solchen drei Puncten, die in gerader Linie liegen. Diesem Satze entspricht, nach der vorigen Nummer, folgender:

Drei Linien zweiter Ordnung, welche durch irgend drei feste (Coordinaten-)Puncte gehen, schneiden sich, paarweise genommen, noch in drei Puncten: legt man durch jeden dieser Durchschnitte, durch die drei Coordinatenpuncte und

irgend einen vierten festen Punct drei neue Linien derselben Ordnung, so schneiden diese die drei gegebenen, aufser in den drei Coordinatenpuncten, noch in drei Puncten, und diese sechs Puncte liegen auf einer und derselben Linie zweiter Ordnung.

40. Wenn irgend eine Curve gegeben ist, so giebt es eine zweite Curve, welche alle durch drei feste Puncte (Coordinatenpuncte) gehende Linien zweiter Ordnung, deren Pole auf der ersten Curve liegen, umhüllt, und deren Puncte wiederum die Pole der Tangenten der zweiten Curve sind. Der Grad der ersten Curve zeigt an, wie viele Linien zweiter Ordnung sich im Allgemeinen, durch die drei Coordinatenpuncte und einen vierten beliebigen Punct legen lassen, die die zweite Curve berühren; die Zahl der Durchschnittspuncte der zweiten Curve mit einer durch die drei Coordinatenpuncte gehenden Linie zweiter Ordnung zeigt an, wie viele Tangenten sich im Allgemeinen an die erste Curve legen lassen.

Wenn die Gleichung der ersten Curve gegeben ist, so können wir leicht die Gleichung der zweiten Curve finden; und umgekehrt. Wenn etwa eine zweite Curve durch die Gleichung:

$$3. \quad \psi = F(\varphi).$$

gegeben ist, so erhalten wir die ihr zugehörige erste Curve, wenn wir zwischen der vorstehenden Gleichung (3.) undderGleic h ung:

$$\frac{B}{\psi} + \frac{A}{\varphi} = 1,$$

und den beiden Differential-Gleichungen derselben:

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = F'(\varphi), \qquad \frac{d\psi}{d\varphi} = -\frac{B-\psi}{A-\varphi},$$

ψ, φ und $\frac{d\psi}{d\varphi}$ eliminiren und in der resultirenden Gleichung ψ und φ für B und A schreiben.

Wenn insbesondere die Gleichung (3.) eine gerade Linie darstellt, und demnach folgende Form hat:

$$b\psi + a\varphi = 1,$$

so erhalten wir für die gesuchte Curve eine Linie zweiter Ordnung. Hieraus ist, nach den Bemerkungen zu Anfang dieser Nummer, ersichtlich, dafs durch vier Puncte sich im Allgemeinen zwei Linien zweiter Ordnung legen lassen. Zugleich ergiebt sich dafs, da zwei Linien zweiter

Ordnung sich im Allgemeinen in vier Puncten schneiden, es eben so viel Linien zweiter Ordnung giebt, die durch drei gegebene Puncte gehen und zwei gegebene gerade Linien berühren. Wir müssen hier aus Mangel an Raum abbrechen.

Coordinaten-Verwandlung.

41. Die Verwandlung der Coordinaten hat in dem neuen Systeme eine viel gröfsere Ausdehnung, als in dem gewöhnlichen Systeme. Da wir aber von derselben in diesem Aufsatze keinen Gebrauch machen, so beschränken wir uns auch hier nur auf einige Andeutungen.

Die Gleichung einer geraden Linie, bezogen auf irgend drei Coordinatenpuncte, ist, in Beziehung auf ψ und φ, vom ersten Grade und bleibt es, wie wir auch die drei Coordinatenpuncte anders annehmen mögen. Hiernach ist, wenn wir die Coordinaten irgend eines Punctes in dem einem Systeme ψ und φ, und die Coordinaten desselben Punctes in dem andern Systeme Ψ und Φ nennen:

$$1. \quad \Psi = a + b\psi + c\varphi,$$
$$2. \quad \Phi = d + e\psi + f\varphi.$$

a, b, c, d, e und f sind Constante, die nach der bekannten Methode bestimmt werden müssen. Wir wollen Beispielsweise den speciellen Fall nehmen, dafs sich blofs (Fig. 5.) die eine Coordinatenlinie $O''O'$ um den Punct O'' bis $O''\Omega'$ dreht, und den Winkel $OO''\Omega'$ durch γ' bezeichnen, während wir den Winkel $OO''O'$ wie gewöhnlich γ nennen. Bei dieser Annahme ist offenbar

$$3. \quad \Phi = \varphi,$$

so dafs: $d = e = 0$, $f = 1$. Da für den Punct O'' zugleich Ψ, ψ und φ verschwindet, so ist auch $a = 0$. Dividiren wir die Gleichung (1.) durch $\Phi = \varphi$, so kommt also

$$\frac{\Psi}{\Phi} = b\,\frac{\psi}{\varphi} + c.$$

Für $O''O'$ erhalten wir folgende Gleichungen:

$$\frac{\Psi}{\Phi} = -\frac{\sin(\gamma - \gamma')}{\sin\gamma}, \qquad \frac{\psi}{\varphi} = 0,$$

und für $O''\Omega'$ folgende Gleichungen:

$$\frac{\Psi}{\Phi} = 0, \quad \frac{\psi}{\varphi} = \frac{\sin(\gamma - \gamma')}{\sin\gamma'};$$

und mithin ergeben sich zur Bestimmung der Coëfficienten b und c aus (4) folgende beiden Gleichungen:

$$-\frac{\sin(\gamma-\gamma')}{\sin\gamma} = c,$$

$$0 = b\,\frac{\sin(\gamma-\gamma')}{\sin\gamma'} + c.$$

Hiernach erhalten wir:

$$c = \frac{\sin(\gamma'-\gamma)}{\sin\gamma}, \qquad b = \frac{\sin\gamma'}{\sin\gamma},$$

und endlich:

$$5.\quad \Psi\sin\gamma = \psi\sin\gamma' + \varphi\sin(\gamma'-\gamma).$$

Allgemeinere Coordinaten-Bestimmung.

42. Wir haben in dem Bisherigen nur drei gerade Linien als Coordinatenlinien genommen. Wir können deren aber auch beliebig viele nehmen. Die Abstände irgend eines Punctes von solchen festen Coordinatenlinien wollen wir durch p, q, r, s, t . . . bezeichnen. Alsdann stellt die Gleichung:

$$F(p, q, r, s, t, \ldots) = 0$$

irgend eine Curve dar, deren Ordnung durch den Grad dieser Gleichung angezeigt wird. Zwischen irgend dreien der verschiedenen Abstände findet eine lineare Beziehung Statt, und einen vierten Abstand können wir hiernach auch ohne constantes Glied durch drei gegebene auf lineare Weise ausdrücken, so dafs also, wenn wir durch a, b, c, a', b', c', u. s. w. Constante bezeichnen, die von der gegenseitigen Lage der Coordinatenlinien abhängen:

$$s = ap + bq + cr$$
$$t = a'p + b'q + c'r$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Wir wollen, wie bisher, auch in dem Folgenden annehmen, die Gleichung (1.) sei in Beziehung auf die verschiedenen Abstände $p, q, r, s, t \ldots$, homogen.

43. Wir wollen, der Kürze halber, irgend eine homogene Function des $m$ten Grades von p, q, r, s, t, . . . durch U bezeichnen. Alsdann ist nach dem bekannten Theorem über die homogenen Functionen:

$$1.\quad \frac{dU}{dp}p + \frac{dU}{dq}q + \frac{dU}{dr}r + \frac{dU}{ds}s + \frac{dU}{dt}t \ldots = mU.$$

Der erste Theil dieser Gleichung, gleich Null gesetzt:

$$2.\quad \frac{dU}{dp}p + \frac{dU}{dq}q + \frac{dU}{dr}r + \frac{dU}{ds}s + \frac{dU}{dt}t \ldots = 0$$

ist also die Gleichung der Curve selbst, die auch durch $U = 0$ darge-

stellt wird. Beziehen wir aber in dieser letzten Gleichung die partiellen Differential-Coëfficienten auf einen gegebenen Punct der Curve, für welchen $p = p'$, $q = q'$, $r = r'$, $s = s'$, $t = t'$ u. s. w., und betrachten mithin dieselben als constant, so stellt die letzte Gleichung, die wir der Kürze halber, bei dieser Voraussetzung, folgendergestalt schreiben wollen:

$$3. \quad V = 0,$$

eine gerade Linie dar. Diese Gleichung geht durch den gegebenen Punct der Curve, denn die letzte Gleichung wird nach dem oben erwähnten Theorem befriedigt, wenn wir $p = p'$, $q = q'$ . . setzen. Noch mehr, differentiiren wir die Gleichung (3.) und die Gleichung der gegebenen Curve, so ergiebt sich:

$$dV = dU,$$

wenn wir nach der Differentiation für die veränderlichen Gröfsen die besondern Werthe $p', q', r', s', t', \ldots$ substituiren. Die durch die Gleichung (3.) dargestellte gerade Linie ist also eine Tangente der Curve in dem gegebenen Puncte.

Beschränken wir uns auf drei Coordinatenlinien, wie in dem Frühern, so erhalten wir hiernach für die Tangente in irgend einem gegebenen Puncte folgende Gleichung:

$$\frac{dU}{dp}p + \frac{dU}{dq}q + \frac{dU}{dr}r = 0,$$

wobei wir nach der Differentiation in den partiellen Differential-Coëfficienten für p, q und r diejenigen Werthe substituiren müssen, die sich auf den gegebenen Berührungspunct beziehen. Hiernach erhalten wir z. B., wenn die Gleichung der Curve vom zweiten Grade ist, sogleich die allgemeine Gleichung der 17ten Nummer.

44. Wir können weiter gehen. Es führt uns das Theorem über die homogenen Functionen nicht nur zu der eben entwickelten, gewifs sehr zierlichen Tangenten-Methode, sondern auch zu der Theorie des Contactes höherer Ordnung. Wir haben nehmlich nach diesem Theorem auch:

$$\frac{d^2U}{dp^2}p^2 + 2\frac{d^2U}{dp\,dq}pq + \frac{d^2U}{dq^2}q^2 + 2\frac{d^2U}{dp\,dr}pr + 2\frac{d^2U}{dq\,dr}qr + \frac{d^2U}{dr^2}r^2 + 2\frac{d^2U}{dp\,ds}ps + \ldots = m(m-1)U.$$

Der erste Theil dieser Gleichung, gleich Null gesetzt, ist also die Glei-

chung der gegebenen Curve. Beziehen wir die partiellen Differential-Coëfficienten wiederum auf einen gegebenen Punct, dessen Coordinaten $p', q', r', s', t', \ldots$ sind, und betrachten mithin dieselben als constant, so stellt, wenn wir, bei dieser Voraussetzung, den ersten Theil der letzten Gleichung durch W bezeichnen, die Gleichung:

$$4. \quad W = 0$$

eine Linie zweiter Ordnung dar, die aus denselben Gründen, als in der vorigen Nummer die Tangente, durch den gegebenen Punct geht. Da auch diese Gleichung homogen und überdies vom zweiten Grade ist, so erhalten wir für die Gleichung der Tangente an die bezügliche Curve:

$$\frac{dW}{dp}p + \frac{dW}{dq}q + \frac{dW}{dr}r + \frac{dW}{ds}s \ldots = 0,$$

wobei wir die partiellen Differential-Coöfficienten auf den Berührungspunct beziehen. Diese Gleichung ist aber identisch mit der Gleichung (2). Da nemlich auch $\frac{dU}{dp}$ eine homogene Function und vom $(m-1)$ten Grade ist, so kommt:

$$\frac{d^2U}{dp^2}p + \frac{d^2U}{dp\,dq}q + \frac{d^2U}{dp\,dr}r + \frac{d^2U}{dp\,ds}s + \ldots = (m-1)\frac{dU}{dp}.$$

Der erste Theil dieser Gleichung ist aber nichts Anderes als $\frac{1}{2}.\frac{dW}{dp}$, so dafs also:

$$\frac{dW}{dp} = 2(m-1)\frac{dU}{dp},$$

Auf ganz analoge Weise ist auch:

$$\frac{dW}{dq} = 2(m-1)\frac{dU}{dq},$$
$$\frac{dW}{dr} = 2(m-1)\frac{dU}{dr},$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Die gegebene Curve hat also mit der durch die Gleichung (4.) dargestellten Linie zweiter Ordnung in dem gemeinschaftlichen Puncte eine gemeinschaftliche Tangente.

Wenn wir die Gleichung (4.) und die Gleichung der gegebenen Curve zweimal differentiiren, so kommt offenbar:

$$d^2W = 2d^2U,$$

wenn wir nach der Differentiation für die veränderlichen Gröfsen die Coordinaten des Berührungspunctes substituiren. Die durch die Gleichung

(4.) dargestellte Linie zweiter Ordnung hat also mit der gegebenen Curve in dem auf derselben gegebenen Punct einen Contact zweiter Ordnung.

45. Es ist leicht einzusehen, dafs wir für jeden beliebigen auf der gegebenen Curve gegebenen Punct unmittelbar, nicht nur die Gleichung der Tangente, sondern auch die Gleichungen osculirender Curven erhalten. Wenn der Grad der gegebenen Curve eine ganze Zahl ist, so kommen wir, indem wir den Grad der Osculation immer steigern, endlich zu der Gleichung der gegebenen Curve selbst; wenn hingegen jener Grad ein Bruch ist, so kommen wir auf dem angezeigten Wege zu Gleichungen nach allen Ordnungen osculirender Curven.

Hier würde es uns zu weit führen, wenn wir in ausführliche Entwicklungen über das neue Coordinatensystem eingehen wollten. Um schliefslich noch ein Beispiel der Behandlungsweise zu geben, wähle ich den Beweis eines allgemeinen Satzes.

Characteristische Eigenschaft der Curven aller Grade.

46. Wenn irgend eine Curve des $m$ten Grades und irgend ein Punct gegeben sind, so lassen sich, wie bekannt, im Allgemeinen von dem gegebenen Puncte an die gegebene Curve $m(m-1)$ Tangenten legen, und alle $m(m-1)$ Berührungspuncte liegen auf einer Curve des $(m-1)$ten Grades. Diese Curve hat man die Polarcurve des gegebenen Punctes in Beziehung auf die gegebene Curve genannt (*courbe polaire du point par rapport à la courbe directrice proposée*). *) Wenn wir diese Benennung beibehalten, so haben wir folgenden Satz:

Wenn irgend eine Curve des $m$ten Grades und irgend n Puncte, die auch beliebig zusammenfallen können, gegeben sind, und wir construiren die Polarcurve des ersten gegebenen Punctes in Beziehung auf die gegebene Curve, construiren, in Beziehung auf diese zweite Curve, die Polarcurve des zweiten gegebenen Punctes, dann, in Beziehung auf diese dritte Curve, die Polarcurve des dritten Punctes und so fort, bis wir endlich zu einer Polarcurve des $n$ten Punctes, die vom $(m-n)$ten Grade sein wird, gelangen: so ist diese Curve identisch dieselbe, in welcher Ordnung wir auch die gegebenen Puncte mögen auf einander folgen lassen.

---

*) *Recherches sur les lois générales qui régissent les courbes algébriques. Par M. Bobillier.* Gerg. Ann. XIX p. 110.

Die Polarcurve der $(m-n)$ten Ordnung können wir also auf $\frac{n(n+1)}{1.2}$ verschiedene Arten construiren und erhalten zuvor n verschiedene Curven der $(m-n+1)$ten Ordnung, in Beziehung auf welche die Polarcurven der n gegebenen Puncte dieselbe Curve sind. Wenn z. B. $m = n+1$, so erhalten wir n Linien zweiter Ordnung, in Beziehung auf welche die Polaren der n gegebenen Puncte dieselbe gerade Linie sind.

Um den vorstehenden Satz zu beweisen, wollen wir der Kürze halber die Gleichung der gegebenen Curve $m$ten Grades, bezogen auf drei Coordinatenlinien, durch

$$U = 0$$

bezeichnen. Alsdann ist:

$$\frac{dU}{dp}p + \frac{dU}{dq}q + \frac{dU}{dr}r = 0$$

die allgemeine Gleichung der Tangente, wenn wir die partiellen Differential-Coëfficienten auf den Berührungspunct beziehen und p, q und r als veränderlich betrachten. Bezeichnen wir hingegen die Coordinaten irgend eines Punctes durch p', q', r', und betrachten $\frac{dU}{dp}, \frac{dU}{dq}, \frac{dU}{dr}$ als Functionen $(m-1)$ten Grades der veränderlichen Gröfsen p, q und r, so erhält man:

$$1. \quad \frac{dU}{dp}p' + \frac{dU}{dq}q' + \frac{dU}{dr}r' = 0,$$

für die Polarcurve des Punctes (r', q', p') in Beziehung auf die gegebene Curve. Nehmen wir nach einander für den Punct (r', q', p') die drei Coordinatenpuncte $(r', 0, 0)$, $(0, q', 0)$ und $(0, 0, p')$, so verwandelt sich die letzte Gleichung nach einander in folgende drei:

$$\frac{dU}{dr} = 0, \qquad \frac{dU}{dq} = 0, \qquad \frac{dU}{dp} = 0:$$

in die Gleichungen dreier Curven $(m-1)$ten Grades, der Polarcurven des ersten, zweiten und dritten Coordinatenpunctes. Hiernach erhalten wir ferner für die Polarcurven des zweiten und ersten Coordinatenpunctes, in Beziehung auf die erste und zweite dieser drei Curven, folgende Gleichungen:

$$\frac{d^2U}{drdq} = 0, \qquad \frac{d^2U}{dqdr} = 0.$$

Die ersten Theile dieser beiden Gleichungen sind nach den Grundregeln der Differentiation der Gleichungen mit mehreren veränderlichen Gröfsen

identisch dieselben. Hierin liegt der Beweis des obigen Satzes für den Fall, dafs $n = 2$. Indem wir je zwei der drei gegebenen Puncte zusammenstellen, erhalten wir also folgende drei Polarcurven $(m-2)$ter Ordnung:

$$\frac{d^2U}{drdq} = 0, \quad \frac{d^2U}{drdp} = 0, \quad \frac{d^2U}{dqdp} = 0.$$

Für die drei Polarcurven des dritten, zweiten und ersten Coordinatenpunctes, in Beziehung auf die erste, zweite und dritte dieser drei Curven, erhalten wir ferner nach dem Vorstehenden sogleich:

$$\frac{d^3U}{drdqdp} = 0, \quad \frac{d^3U}{drdpdq} = 0, \quad \frac{d^3U}{dqdpdr} = 0:$$

Gleichungen des $(m-3)$ten Grades, die alle drei identisch sind. Hierin liegt der Beweis unseres Satzes für den Fall, dafs $n = 3$.

Um weiter zu gehen, wollen wir lieber wieder von der allgemeinen Gleichung (1.), die wir, der Kürze halber, $U' = 0$ schreiben, ausgehen. In Beziehung auf die bezügliche Curve erhalten wir alsdann für die Polarcurve irgend eines zweiten Punctes (r'', q'', p'') folgende Gleichung:

$$\frac{dU'}{dp}p'' + \frac{dU'}{dq}\,''+ \frac{dU'}{dr}r'' = 0,$$

oder, wenn wir entwickeln:

$$\frac{d^2U}{dp^2}p'p'' + \frac{d^2U}{dpdq}(p'q'' + p''q') + \frac{d^2U}{dpdr}(p'r'' + p''r') + \frac{d^2U}{dq^2}q'q'' + \frac{d^2U}{dqdr}(q'r'' + q''r') + \frac{d^2U}{dr^2}r'r'' = 0.$$

Diese Gleichung ist symmetrisch in Beziehung auf p', q', r' und p'', q'', r''. Bezeichnen wir dieselbe, der Kürze halber, durch $U'' = 0$, so kommt:

$$\frac{dU''}{dp}p''' + \frac{dU''}{dq}q''' + \frac{dU''}{dr}r''' = 0,$$

für die Gleichung der Polarcurve eines dritten Punctes (r''', q''', p'''). Entwickeln wir die letzte Gleichung, so kommen wir zu einer Gleichung, die in Beziehung auf die Coordinaten der drei Puncte symmetrisch ist; und, wenn wir auf diese Weise bis zu n Puncten fortschreiten, so erhalten wir offenbar eine Gleichung des $(m-n)$ten Grades, die in Beziehung auf die Coordinaten aller n Puncte symmetrisch ist. Hierin liegt der allgemeine Beweis unseres Satzes.

Dieser Satz läfst sich nach der Theorie der Reciprocität verdoppeln und dann auch auf den Raum übertragen.

2.

Einige stereometrische Sätze,

mit Bezug auf die Aufgaben Bd. II. Hft. 3. S. 292. No. 66.

(Vom Herrn Professor Dr. *Grunert* zu Brandenburg.)

1.

Die erste der beiden a. a. O. vorgelegten Aufgaben:

„Wenn beliebige Puncte in einer und derselben Ebene, in beliebiger Zahl n, zu zweien durch gerade Linien so verbunden werden, dafs sich die verbindenden Linien nicht schneiden, so soll man finden, auf wie vielerlei Arten diese Verbindung möglich sei, ob die Zahl der verbindenden Linien verschieden, und welche die gröfste, welche die kleinste Zahl sei,"

gestattet folgende einfache Behandlung.

2.

Durch die angegebene Construction erhält man ein Netz von Dreiecken, welches von einem gewissen convexen Polygon eingeschlossen wird. Die Zahl der Spitzen dieses Polygons sei $= k$, die Zahl der innerhalb desselben liegenden Linien $= x$, die Zahl aller Linien $= l$, die Anzahl der Dreiecke $= d$, so erhellet leicht die Richtigkeit folgender Gleichungen:

$$x = \frac{3d-k}{2}, \quad d = \frac{2x+k}{3}.$$

Setzt man nun den rechten Winkel $= 1$, so ist die Summe der Winkel aller Dreiecke des Netzes

$$= \frac{2(2x+k)}{3}.$$

Da aber die Summe der Winkel am Umfange des einschliefsenden Polygons $= 2k-4$ ist, und um jeden der $n-k$ innern Puncte vier rechte Winkel liegen, so ist obige Summe auch

$$= 2k-4+4(n-k) = 4n-2k-4.$$

Setzt man diese beiden Werthe einander gleich, so erhält man:

$$x = 3(n-1)-2k.$$

Es ist aber offenbar $l = x + k$, also:

$$1. \quad l = 3(n-1) - k,$$

und, wie leicht aus dem Obigen folgt:

$$2. \quad d = 2(n-1) - k,$$

woraus durch Subtraction:

$$3. \quad l - d = n - 1,$$

d. h. die Differenz zwischen der Anzahl der verbindenden geraden Linien und der Anzahl der Dreiecke ist immer um Eins kleiner als die Anzahl der gegebenen Puncte.

Die gefundenen Formeln würden übrigens, wie leicht in die Augen fällt, auch gelten, wenn das einschliefsende Vieleck nicht gerade ein convexes wäre.

3.

l und d erhalten also ihre $\left\{\begin{matrix}\text{gröfsten}\\\text{kleinsten}\end{matrix}\right\}$ Werthe, wenn k seinen $\left\{\begin{matrix}\text{kleinsten}\\\text{gröfsten}\end{matrix}\right\}$ Werth erhält. Offenbar ist aber Min. $k = 3$, Max. $k = n$. Also

$$4. \quad \text{Max. } l = 3(n-2), \quad \text{Min. } l = 2n-3,$$

$$5. \quad \text{Max. } d = 2n-5, \quad \text{Min. } d = n-2.$$

4.

Eliminirt man n aus (1.) und (2.), so erhält man:

$$6. \quad 2l - 3d = k,$$

d. h. die Differenz zwischen der doppelten Anzahl der verbindenden Linien und der dreifachen Anzahl der entstandenen Dreieke ist immer der Anzahl der Seiten des einschliefsenden Polygons gleich.

5.

Ist in einem von lauter Dreiecken eingeschlossenen Polyëder die Anzahl der Kanten $= K$, die Anzahl der Ecken $= E$, die Anzahl der Seitenflächen $= F$, so läfst sich eine Seitenfläche als einschliefsendes Polygon der übrigen betrachten, und man erhält aus (1.) und (2.) für $k = 3$:

$$7. \quad K = 3(E-2), \quad F = 2(E-2),$$

wobei zu bemerken, dafs man zu dem aus (2.) erhaltenen Ausdrucke für F noch 1 für das als einschliefsendes Polygon betrachtete Dreieck addiren mufs.

Diese Resultate werden durch den Eulerschen Satz, nach welchem

$$E + F = K + 2$$

ist, bestätigt. Sind nemlich die Seitenflächen lauter Dreiecke, so ist offenbar:

$$K = \frac{3F}{2}, \quad F = \frac{2K}{3};$$

$$E + F = \frac{3F}{2} + 2, \quad E + \frac{2K}{3} = K + 2;$$

$$F = 2(E-2), \quad K = 3(E-2),$$

wie vorher.

6.

Als Maafs eines körperlichen Winkels wollen wir, uns nun näher zu der zweiten a. a. O. vorgelegten Aufgabe wendend, das zwischen den ihn begränzenden Ebenen enthaltene Segment einer aus seiner Spitze als Mittelpunct mit dem Radius $= 1$ beschriebenen Kugelfläche betrachten, und der sphärische Octant soll die Einheit der körperlichen Winkel, der Kreisquadrant für denselben Radius die Einheit der ebenen Winkel sein.

In einem beliebigen Tetraëder bezeichne man die den körperlichen Winkeln A, B, C, D gegenüber liegenden Seitenflächen durch a, b, c, d, und die von je zwei Seitenflächen eingeschlossenen Flächenwinkel durch die beiden diesen Seitenflächen entsprechenden Buchstaben, in Parenthesen eingeschlossen, so hat man nach einem sehr bekannten Satze vom sphärischen Dreieck:

$$A = (bc) + (bd) + (cd) - 2,$$
$$B = (ac) + (ad) + (cd) - 2,$$
$$C = (ab) + (ad) + (bd) - 2,$$
$$D = (ab) + (ac) + (bc) - 2;$$

$$A + B + C + D = 2\{(ab) + (ac) + (ad) + (bc) + (bd) + (cd)\} - 8$$

folglich, wenn man die Summe der körperlichen Winkel durch S, die Summe der Flächenwinkel durch Σ bezeichnet:

$$8. \quad S = 2\Sigma - 8,$$

d. h. in jedem Tetraëder ist die Summe der körperlichen Winkel um 8 kleiner als die doppelte Summe der Flächenwinkel, oder gleich der doppelten um vier verminderten Summe der Flächenwinkel, Alles in den obigen Maafsen ausgedrückt.

7.

Eine beliebige Pyramide von α Seiten kann immer in $\alpha - 2$ Tetraëder zerlegt werden. Für diese einzelnen Tetraëder ist in leicht zu-

verstehenden, den obigen ähnlichen Zeichen:

$$S_1 = 2\Sigma_1 - 8,$$
$$S_2 = 2\Sigma_2 - 8,$$
$$S_3 = 2\Sigma_3 - 8,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$S_{\alpha-2} = 2\Sigma_{\alpha-2} - 8;$$

$$S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_{\alpha-2} = 2\{\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \ldots + \Sigma_{\alpha-2}\} - 8(\alpha-2).$$

Sind nun S, Σ die Summen der körperlichen- und Flächenwinkel der Pyramide, so ist offenbar:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_{\alpha-2},$$

und, weil in der Grundfläche $\alpha - 3$ Diagonalen gezogen sind, an deren jeder zwei Flächenwinkel der Tetraëder liegen, welche Nebenwinkel von einander, und folglich zusammen $= 2$ sind:

$$\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \ldots + \Sigma_{\alpha-2} - 2(\alpha-3),$$

woraus:

$$S = 2\{\Sigma + 2(\alpha-3)\} - 8(\alpha-2),$$
$$9. \quad S = 2\Sigma - 4(\alpha-1),$$

d. h. in jeder Pyramide ist die Summe der körperlichen Winkel gleich der doppelten Summe der Flächenwinkel, weniger der vierfachen um Eins verminderten Seitenzahl der Pyramide.

8.

Ein beliebiges Polyëder werde von a Dreiecken, b Vierecken, c Fünfecken, d Sechsecken, u. s. f. eingeschlossen. Innerhalb desselben nehme man einen beliebigen Punct an, und ziehe von demselben nach allen Ecken gerade Linien, so wird das Polyëder in a dreiseitige, b vierseitige, c fünfseitige, d sechsseitige, u. s. f. Pyramiden zerlegt. Bezeichnet man nun die Winkelsummen in allen a dreiseitigen, b vierseitigen, c fünfseitigen, d sechsseitigen, u. s. f. Pyramiden durch:

$$(S_3),\ (S_4),\ (S_5),\ (S_6),\ \ldots\ldots;$$
$$(\Sigma_3),\ (\Sigma_4),\ (\Sigma_5),\ (\Sigma_6),\ \ldots\ldots;$$

so ergiebt sich aus dem Bewiesenen leicht:

$$(S_3) = 2(\Sigma_3) - 4.2a,$$
$$(S_4) = 2(\Sigma_4) - 4.3b,$$
$$(S_5) = 2(\Sigma_5) - 4.4c,$$
$$(S_6) = 2(\Sigma_6) - 4.5d,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$(S_3)+(S_4)+(S_5)+(S_6)+\ldots.$$
$$=2\{(\Sigma_3)+(\Sigma_4)+(\Sigma_5)+(\Sigma_6)+\ldots.\}-4(2a+3b+4c+5d+\ldots.).$$

Sind aber S, Σ die Winkelsummen des Polyëders, E die Anzahl seiner Ecken, folglich auch die Anzahl der von dem innerhalb angenommenen Puncte an die Ecken gezogenen geraden Linien, um deren jede 4 rechte Winkel liegen; so erhellet leicht, dafs

$$S=(S_3)+(S_4)+(S_5)+(S_6)+\ldots.-8,$$
$$\Sigma=(\Sigma_3)+(\Sigma_4)+(\Sigma_5)+(\Sigma_6)+\ldots.-4E.$$

Also

$$S+8=2\{\Sigma+4E\}-4(2a+3b+4c+5d+\ldots.),$$
$$S=2\Sigma-4(2a+3b+4c+5d+\ldots.-2E+2).$$

Nach einer bekannten Folgerung aus dem Eulerschen Satze (Crelle's „Lehrbuch der Elemente der Geometrie. II. Berlin 1826. §. 546. 4.") ist aber

$$2E=4+a+2b+3c+4d+5e+\ldots.$$

Also

$$S=2\Sigma-4\left\{\begin{matrix}2a+3b+4c+5d+\ldots.+2\\-a-2b-3c-4d-\ldots.-4\end{matrix}\right\}$$
$$=2\Sigma-4(a+b+c+d+\ldots.-2).$$

Die Anzahl der Seitenflächen, welche wir durch F bezeichnen wollen, ist aber offenbar $=a+b+c+d+\ldots.$, und folglich:

10. $S=2\Sigma-4(F-2)$,

d. h. in jedem Polyëder ist die Summe der körperlichen Winkel gleich der doppelten Summe der Flächenwinkel, weniger der vierfachen um 2 verminderten Anzahl der Seitenflächen.

Für die αseitige Pyramide ist $F=\alpha+1$, woraus $S=2\Sigma-4(\alpha-1)$, ganz wie oben (7.).

Man kann die Gleichung auch so schreiben:

11. $2\Sigma-S=4(F-2)$,

und es ist folglich, da immer $F>2$ ist, in jedem Polyëder:

12. $2\Sigma>S$, $\Sigma>\frac{1}{2}S$.

Auch erhellet aus (11.), dafs $2\Sigma-S$ immer eine durch 4 theilbare ganze Zahl ist.

9.

Nach dem Eulerschen Satze ist $F-2=K-E$. Also auch

13. $2\Sigma-S=4(K-E)$,

so dafs also in jedem Polyëder der Unterschied zwischen der doppelten Summe der Flächenwinkel und einfachen Summe der körperlichen Winkel dem vierfachen Unterschiede der Kanten und Ecken gleich ist.

Ist das Polyëder von lauter α Ecken eingeschlossen, so ist $K=\frac{\alpha F}{2}$, woraus mittelst des Eulerschen Satzes sich leicht ergiebt:

$$14.\quad F-2=\frac{2(E-\alpha)}{\alpha-2},\quad S=2\Sigma-\frac{8(E-\alpha)}{\alpha-2}.$$

Also für $\alpha=3$, d. h. für Körper, welche von lauter Dreiecken begränzt sind:

$$15.\quad S=2\Sigma-8(E-3).$$

10.

Ist das Polyëder regulär, so sei jeder Körperwinkel $=W$, jeder Flächenwinkel $=w$, so ist offenbar $S=EW$, $\Sigma=Kw$. Folglich nach (13.):

$$16.\quad 2Kw-EW=4(K-E)=4(F-2).$$

Also für das reguläre Tetraëder:

$$17.\quad 12w-4W=8,\quad 3w-W=2.$$

Für das Octaëder:

$$18.\quad 24w-6W=24,\quad 4w-W=4.$$

Für das Icosaëder:

$$19.\quad 60w-12W=72,\quad 5w-W=6.$$

Für das Hexaëder:

$$20.\quad 24w-8W=16,\quad 3w-W=2.$$

Für das Dodecaëder:

$$21.\quad 60w-20W=40,\quad 3w-W=2.$$

Das Tetraëder, Hexaëder und Dodecaëder haben also die gemeinschaftliche Eigenschaft, dafs $3w-W=2$, $3w=W+2$, d. h. dafs der dreifache Flächenwinkel dem um zwei vergröfserten körperlichen Winkel gleich ist.

11.

Bezeichnet $\mathfrak{S}$ die Summe aller ebenen Winkel der Seitenflächen des Polyëders, so ist (Crelle a. a. O. II. S. 679.):

$$\mathfrak{S}=4(E-2),\quad E=\tfrac{1}{4}\mathfrak{S}+2,$$

woraus sich mittelst (13.) leicht ergiebt:

$$22.\quad 2\Sigma+\mathfrak{S}-S=4(K-2);$$

folglich ist z. B. im Tetraëder, wo $K=6$ ist:

$$2\Sigma+\mathfrak{S}-S=16.$$

Ist das Polyëder von lauter α Ecken eingeschlossen, so ist $\mathfrak{S} = (2\alpha - 4)F$, woraus mittelst (10.):

$$23. \quad S - 2\Sigma + \frac{2\mathfrak{S}}{\alpha - 2} = 8,$$

folglich für von lauter Dreiecken eingeschlossene Körper:

$$S - 2\Sigma + 2\mathfrak{S} = 8, \quad S - 8 = 2(\Sigma - \mathfrak{S}).$$

12.

Erweitert man die Seitenflächen des Polyëders über die Ecken hinaus, so entsteht an jeder Ecke ein körperlicher Winkel, welcher als Scheitelwinkel dem entsprechenden innern Körperwinkel gleich ist. Jeder aufserhalb entstehende Körperwinkel hat eben so einen ihm gleichen Scheitelwinkel. Setzen wir die Summe der äufsern Körperwinkel $= S'$, so ist offenbar $2S' + 2S = 8E$, $S' + S = 4E$; folglich nach (10.):

$$4E - S' = 2\Sigma - 4(F - 2),$$

woraus leicht folgt:

$$24. \quad S' + 2\Sigma = 4(E + F) - 8 = 4K,$$

d. h. in jedem Polyëder ist die Summe der äufsern Körperwinkel nebst der doppelten Summe der Flächenwinkel der vierfachen Anzahl der Kanten gleich, und also auch $S' + 2\Sigma$ immer eine durch 4 theilbare ganze Zahl.

13.

Von diesen Sätzen läfst sich auf die zweite a. a. O. vorgelegte Aufgabe:

„Beliebige Puncte im Raume, in beliebiger Zahl n, werden zu zweien durch geraden Linien, und zu dreien durch Ebenen immer so verbunden werden können, dafs sich die verbindenden Linien und Ebenen nicht schneiden. Es fragt sich, auf wie vielerlei Arten diese Verbindung möglich sei, ob die Zahl der verbindenden Linien und Ebenen verschieden, und welche die gröfste, und welche die kleinste Zahl sei,"

folgende Anwendung machen.

14.

Durch die angegebene Construction wird immer ein in mehrere Tetraëder zerlegtes convexes Polyëder erhalten. Die Anzahl seiner Ecken sei $= k$, die Anzahl der verbindenden Linien $= l$, die Anzahl der verbindenden Dreiecke $= d$, die Anzahl aller Tetraëder $= t$. Die Anzahl der auf der äufsern Oberfläche des Polyëders liegenden Linien und Dreiecke sei $= x$ und $= y$,

die Anzahl der innern Linien und Dreiecke aber $=x'$ und $=y'$, so ist offenbar

$$x + x' = l, \quad y + y' = d.$$

Da ferner jedes Tetraëder vier Dreiecke zu Seitenflächen hat, so erhellet leicht die Richtigkeit folgender Gleichung:

$$\frac{4t - y}{2} = y'.$$

Auch ist nach (7.)

$$x = 3k - 6, \quad y = 2k - 4.$$

Folglich

$$4t - 2k + 4 = 2y', \quad 2t - k + 2 = y' = d - 2k + 4,$$

$$25. \quad d - 2t = k - 2.$$

Ferner ist in den einzelnen Tetraëdern, wenn man sich einer ähnlichen Bezeichnung wie oben (8.) bedient:

$$\begin{aligned} S_1 &= 2\Sigma_1 - 8, \\ S_2 &= 2\Sigma_2 - 8, \\ S_3 &= 2\Sigma_3 - 8, \\ &\cdots\cdots \\ S_t &= 2\Sigma_t - 8; \end{aligned}$$

$$S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_t = 2\{\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \ldots + \Sigma_t\} - 8t.$$

Da nun $n - k$ Puncte innerhalb des Polyëders liegen, und die Summe der körperlichen Winkel an jedem dieser innern Puncte $= 8$ ist, so erhellt sogleich, dafs, wenn S, Σ die Summen der Körper- und Flächenwinkel des Polyëders sind:

$$S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_t = S + 8(n - k),$$

und eben so leicht, dafs

$$\begin{aligned} \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \ldots + \Sigma_t &= \Sigma + 4x' \\ &= \Sigma + 4(l - x) = \Sigma + 4(l - 3k + 6) \end{aligned}$$

ist. Folglich hat man:

$$S + 8(n - k) = 2\Sigma + 8(l - 3k + 6) - 8t.$$

Da aber die Anzahl der Seitenflächen $= y = 2k - 4$ ist, so ist nach (10.)

$$S = 2\Sigma - 4(2k - 6),$$

welches, für S in obige Gleichung gesetzt, nach einigen leichten Reductionen giebt:

$$26. \quad l - t = n + k - 3.$$

Eliminirt man t aus (25.) und (26.), so erhält man

$$27. \quad 2l - d = 2n + k - 4,$$

und, wenn man aus derselben Gleichung, oder auch aus den beiden letzten, k eliminirt:

$$28. \quad l + t - d = n - 1,$$

d. h. die Summe aller verbindenden Linien und Tetraëder weniger der Anzahl der Dreiecke ist immer um Eins kleiner als die Anzahl der gegebenen Puncte.

15.

Mittelst vorhergehender Analysis ergeben sich also nur zwei Gleichungen, [(25.) und (26.)], zwischen den drei Gröfsen l, d, t; und diese Gröfsen können folglich blofs durch n und k nicht bestimmt werden, vielmehr mufs immer noch eine dieser drei Gröfsen gegeben sein, wenn man die beiden andern finden soll. Da hier offenbar $\text{Min}\, k = 4$, $\text{Max}\, k = n$ ist, so ergiebt sich aus den gefundenen Gleichungen leicht:

$$29.\quad \text{Max}(d-2t) = n-2, \quad \text{Min}(d-2t) = 2,$$
$$30.\quad \text{Max}(l-t) = 2n-3, \quad \text{Min}(l-t) = n+1,$$
$$31.\quad \text{Max}(2l-d) = 3n-4, \quad \text{Min}(2l-d) = 2n,$$

und die $\left\{\begin{matrix}\text{gröfsten}\\ \text{kleinsten}\end{matrix}\right\}$ Werthe dieser Differenzen treten ein, wenn die Anzahl der Ecken des einschliefsenden Polyëders am $\left\{\begin{matrix}\text{gröfsten}\\ \text{kleinsten}\end{matrix}\right\}$ ist.

Auch folgt hieraus leicht:

$$32.\quad \left\{\begin{matrix}\text{Max}(d-2t) - \text{Min}(d-2t)\\ = \text{Max}(l-t) - \text{Min}(l-t)\\ = \text{Max}(2l-d) - \text{Min}(2l-d)\end{matrix}\right\} = n-4,$$

so dafs also die Unterschiede zwischen diesen Maximis und Minimis alle einander gleich, nemlich alle $= n-4$ sind.

Eben so construirt man mittelst der gefundenen Formeln leicht folgende Tafel.

Wenn gegeben:	so ist die Gröfse	$\geqq$	$\leqq$
t	d	$2(t+1)$	$2t+n-2$
	l	$t+n+1$	$t+2n-3$
l	d	$2l-3n+4$	$2(l-n)$
	t	$l-2n+3$	$\frac{1}{2}l-n-1$
d	t	$\frac{1}{2}(d-n+2)$	$\frac{1}{2}(d-2)$
	l	$\frac{1}{2}(d+2n)$	$\frac{1}{2}(d+3n-4)$

16.

Die Zahl der Puncte, in welchen 3, 4, 5, 6, u. s. f. verbindende Linien zusammenstofsen, sei a_1, b_1, c_1, d_1, u. s. w., so erhellet leicht, dafs

$$33.\quad l = \frac{3a_1 + 4b_1 + 5c_1 + 6d_1 + \ldots.}{2}$$

ist, woraus sich mittelst (26.) und (25.) leicht ergiebt:

$$34.\quad t = \frac{a_1 + 2b_1 + 3c_1 + 4d_1 + \ldots.}{2} - k + 3,$$

$$35.\quad d = a_1 + 2b_1 + 3c_1 + 4d_1 + \ldots. - k + 4,$$

so dafs also immer sowohl $3a_1 + 4b_1 + 5c_1 + 6d_1 + \ldots.$, als auch $a_1 + 2b_1 + 3c_1 + 4d_1 + \ldots.$ eine gerade Zahl, und die Anzahl der Dreiecke gerade oder ungerade ist, je nachdem die Anzahl der Ecken des einschliefsenden Polyëders gerade oder ungerade ist.

Da

$$l = a_1 + 2b_1 + 2c_1 + 3d_1 + 3e_1 + \ldots. + \frac{a_1 + c_1 + e_1 + g_1 + \ldots.}{2}$$

ist, so ist auch immer $a_1 + c_1 + e_1 + g_1 + \ldots.$, d. i. die Gesammtzahl aller der Puncte, in welchen verbindende Linien in ungerader Anzahl zusammenstofsen, eine gerade Zahl.

17.

Bezeichnet man ferner durch a', b', c', d', u. s. w. die Zahl der Verbindungslinien, in denen 2, 3, 4, 5, u. s. w. Dreiecks-Ebenen zusammenstofsen, so erhellet leicht, dafs

$$36.\quad d = \frac{2a' + 3b' + 4c' + 5d' + \ldots.}{3},$$

also immer $2a' + 3b' + 4c' + 5d' + \ldots.$ eine durch 3 theilbare Zahl ist.

18.

Da

$$2l = 3a_1 + 4b_1 + 5c_1 + 6d_1 + \ldots.,$$
$$3d = 2a' + 5b' + 4c' + 5d' + \ldots.,$$
$$6l = 9a_1 + 12b_1 + 15c_1 + 18d_1 + \ldots.,$$

ist, so erhält man nach (27.):

$$9a_1 + 12b_1 + 15c_1 + 18d_1 + \ldots.$$
$$= 2a' + 3b' + 4c' + 5d' + \ldots. + 6n + 3k - 12$$
$$= 3a_1 + 6b_1 + 9c_1 + 12d_1 + \ldots. + 6(a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + \ldots.)$$
$$= 3a_1 + 6b_1 + 9c_1 + 12d_1 + \ldots. + 6n.$$

Folglich ist immer

$$37.\quad \left\{\begin{matrix} 3(a_1+2b_1+3c_1+4d_1+\ldots.) \\ -(2a'+3b'+4c'+5d'+\ldots.) \end{matrix}\right\} = 3(k-4)$$

eine durch 3 theilbare Zahl.

19.

Da offenbar

$$l = a'+b'+c'+d'+\ldots.,$$
$$6l = 6a'+6b'+6c'+6d'+\ldots.,$$
$$3d = 2a'+3b'+4c'+5d'+\ldots.$$

ist, so ist

$$6l-3d = 4a'+3b'+2c'+d'-f'-2g'-3h'-\ldots.$$
$$= 6n+3k-12 \text{ [M. v. (27.)]};$$

folglich immer

$$38.\quad 4a'+3b'+2c'+d' = 6n+3k-12+f'+2g'+3h'+\ldots.$$

oder auch:

$$39.\quad f'+2g'+3h'+4i'+\ldots. = 4a'+3b'+2c'+d'-6n-3k+12.$$

20.

Aus dem Vorhergehenden hat man:

$$l = \tfrac{3}{2}(a_1+b_1+c_1+d_1+\ldots.)+\frac{b_1+2c_1+3d_1+4e_1+\ldots.}{2},$$

$$d = \tfrac{2}{3}(a'+b'+c'+d'+\ldots.)+\frac{b'+2c'+3d'+4e'+\ldots.}{3};$$

folglich

$$l > \tfrac{3}{2}n, \qquad d > \tfrac{2}{3}l,$$
$$= \tfrac{3}{2}n+\lambda, \quad = \tfrac{2}{3}l+\delta.$$

Also

$$2l = 3n+2\lambda, \quad d = n+\tfrac{2}{3}\lambda+\delta;$$
$$2l-d = 2n+\tfrac{4}{3}\lambda-\delta = 2n+k-4 \text{ [S. (27.)]};$$
$$40.\quad \tfrac{4}{3}\lambda-\delta = k-4, \quad 4\lambda-3\delta = 3(k-4).$$

Also ist $4\lambda-3\delta$ immer eine durch 3 theilbare Zahl, die, von n völlig unabhängig, blofs durch k bestimmt wird.

$$41.\quad \text{Min}(4\lambda-3\delta) = 0, \quad \text{Max}(4\lambda-3\delta) = 3(n-4).$$

Im Tetraëder ist $k=4$; also im Tetraëder immer $4\lambda = 3\delta$, oder $2(b_1+2c_1+3d_1+4e_1+\ldots.) = b'+2c'+3d'+4e'+\ldots.$

Überhaupt ist immer

$$2(b_1+2c_1+3d_1+4e_1+\ldots.)-(b'+2c'+3d'+4e'+\ldots.) = 3(k-4),$$

$$42.\quad 2b_1-b'+2(2c_1-c')+3(2d_1-d')+4(2e_1+e')+\ldots. = 3(k-4)$$

auch immer eine durch 3 theilbare Zahl.

21.

Mittelst (25.), (26.), (27.), (40.) erhält man ohne Schwierigkeit:

$$43.\quad \begin{cases} l = \frac{3}{2}n + \lambda = \frac{3}{2}n + 3(\frac{1}{4}k - 1) + \frac{3}{4}\delta, \\ d = n - k + 4 + 2\lambda = n + 2(\frac{1}{4}k - 1) + \frac{3}{2}\delta, \\ t = n - k + 3 + \lambda = \frac{1}{2}n - \frac{1}{4}k + \frac{3}{4}\delta. \end{cases}$$

22.

Zwischen den drei Gröfsen l, d, t haben wir die beiden Gleichungen:

$$d = 2l - 2n - k + 4, \quad t = l - n - k + 3 \quad (27.\ 26.),$$

wodurch also diese Gröfsen nicht völlig bestimmt werden. Übrigens fällt leicht in die Augen, dafs die Lage der gegebenen Puncte im Raume so unendlich verschieden sein kann, dafs auch diese Gröfsen unendlich viele Werthe haben können. Die eine derselben mufs gegeben sein, wenn die Bestimmung der beiden andern möglich sein soll. Indessen erhellet aus obigen Gleichungen, dafs d, t am $\left\{\begin{matrix}\text{gröfsten}\\\text{kleinsten}\end{matrix}\right\}$ werden, wenn l am $\left\{\begin{matrix}\text{gröfsten}\\\text{kleinsten}\end{matrix}\right\}$ und zugleich k am $\left\{\begin{matrix}\text{kleinsten}\\\text{gröfsten}\end{matrix}\right\}$ wird. Es wird aber offenbar l am kleinsten werden, wenn die gegebenen n Puncte eine solche Lage im Raume haben, dafs sie alle in einer Ebene liegen, und wenn sie ferner in dieser Ebene so liegen, dafs l ein Minimum in derselben wird. Nimmt man nun hierzu, dafs in diesem Falle offenbar $t = 0$ ist; so erhält man nach (4.) und (5.):

$$44.\quad \text{Min}\, l = 2n - 3, \quad \text{Min}\, d = n - 2, \quad \text{Min}\, t = 0.$$

Setzt man in den obigen Gleichungen für d, t den gröfsten Werth von k, $= n$, und $l = 2n - 3$, so wird $d = 4n - 6 - 2n - n + 4 = n - 2$, $t = 2n - 3 - n - n + 3 = 0$, wie vorher.

23.

Auf der andern Seite erhellet eben so leicht, dafs n gegebene Puncte im Raume gewifs immer eine solche Lage gegen einander haben können, dafs wenn sie je zwei durch gerade Linien verbunden werden, diese geraden Linien sich nicht schneiden, wenn sie sich auch gegenseitig durchkreuzen können. Die Anzahl dieser Linien ist $= \frac{1}{2}n(n-1)$, und gröfser kann die Anzahl der verbindenden Linien nie werden.

24.

Es entsteht nun die Frage, ob, wenn n Puncte überhaupt zu zweien so verbunden sind, dafs die verbindenden Linien sich nicht schneiden, diese Puncte dann auch immer zu dreien durch sich nicht schneidende Ebenen verbunden werden können. Wir wollen einmal annehmen, dafs dies für jede $n-1$, durch sich nicht schneidende Linien zu zweien verbundene Puncte gelte, und man habe nun n Puncte, die ebenfalls durch sich nicht schneidende Linien zu zweien verbunden sind. Man denke sich einen dieser Puncte A, also auch alle von demselben ausgehende gerade Linien AB, AC, AD, AE u. s. w., hinweg, so sind die übrigbleibenden $n-1$ Puncte offenbar noch durch sich nicht schneidende gerade Linien zu zweien verbunden, und können folglich nach der Annahme auch durch sich nicht schneidende Ebenen zu dreien verbunden werden. Nun setze man A nebst den Linien AB, AC, AD, AE, u. s. f. wieder, und lasse von jenen Ebenen alle die hinweg, von welchen diese Linien geschnitten werden, so wird ein Polyëder zurückbleiben, dessen Oberfläche entweder einen concaven Theil hat, in welchem die Puncte B, C, D, E, u. s. f. liegen, oder aus welchem innerhalb gewissermafsen ein Polyëder, dessen Ecken dieselben Puncte sind und in dessen innerem Raume der Punct A liegt, herausgeschnitten ist. Legt man nun durch den Punct A und die sich nicht schneidenden Linien, welche die Puncte B, C, D, E, u. s. f. verbinden, Ebenen: so werden nun offenbar auch die im Raume gegebenen, durch sich nicht schneidende gerade Linien verbundenen n Puncte, durch sich nicht schneidende Ebenen zu dreien verbunden sein, so dafs also unser zu beweisender Satz für n Puncte gilt, wenn er für $n-1$ Puncte gilt. Für vier Puncte im Raume gilt er aber offenbar immer, und ist demnach allgemein. Für fünf Puncte A, B, C, D, E (Taf. I. Fig. 6.) sei z. B. die Zahl der sich nicht schneidenden verbindenden Linien $= 10$, so sind die sich nicht schneidenden verbindenden Ebenen ABC, ABD, ABE, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE an der Zahl $= 9$, wie es nach unsern Formeln auch sein mufs, da $d = 2l - 2n - k + 4 = 2.10 - 2.5 - 5 + 4 = 9$.

25.

Da nun die möglichst gröfste Anzahl von $l = \frac{1}{2}n(n-1)$ war (23.), da diesen sich nicht schneidenden Verbindungslinien immer eine gewisse

Anzahl sich nicht schneidender Verbindungs-Ebenen (24.) und dadurch gebildeter Tetraëder entspricht, und da aus dem Maximo von l und Minimo von k das Maximum von d und t resultirt (22.), das Minimum von k aber offenbar $= 4$ ist, so ist nach (22.):

$$\text{Max}\, d = n(n-1) - 2n - 4 + 4,$$
$$\text{Max}\, t = \tfrac{1}{2}n(n-1) - n - 4 + 3,$$

woraus sich leicht ergiebt:

45. $\text{Max}\, l = \tfrac{1}{2}n(n-1)$, $\text{Max}\, d = n(n-3)$, $\text{Max}\, t = \tfrac{1}{2}n(n-3) - 1$.

Für $n = 5$ z. B. ist Max $l = 10$, Max $d = 10$, Max $t = 4$, und man findet diese Resultate leicht bestätigt, wenn man sich fünf Puncte denkt, von denen einer innerhalb des durch die vier andern gebildeten Tetraëders liegt.

3.

Allgemeine und vollständige Berechnung aller beim Gleichgewichte mit Rücksicht auf Zapfenreibung vorkommenden Bestimmungsstücke.

(Von dem Herrn Dr. *G. S. Ohm* zu Berlin.)

Schon vor längerer Zeit wurde ich durch eine äufsere Veranlassung bewogen, die Probleme der Zapfenreibung in einer gröfseren Ausführlichkeit zu behandeln, als diefs gewöhnlich zu geschehen pflegt; dadurch gelangte ich zu nachstehenden Resultaten, die mir einer öffentlichen Mittheilung nicht unwerth schienen. Die Behandlung solcher Aufgaben wird eine andere, je nachdem an der zu berechnenden Maschine Zapfen und Zapfenlager beide, oder nur die einen von beiden beweglich sind. Daher werde ich zunächst den Fall behandeln, wo die Zapfenlager unverrückbar fest angenommen werden, und erst später den andern Fall, wo, wie in der losen Rolle, nicht blofs die Zapfen, sondern auch die Zapfenlager als beweglich angesehen werden müssen, noch besonders berücksichtigen. Jedesmal aber ist zum leichten Überblick des Ganzen erforderlich, dafs ich in gedrängter Kürze einige allgemeine Eigenthümlichkeiten der Reibung der jedesmaligen Untersuchung voran gehen lasse.

1) Wenn ein beweglicher Körper A mit einem ebenen Theile seiner Oberfläche auf der ebenen Fläche eines andern Körpers B, den wir uns zunächst unbeweglich denken wollen, ruhet, und nun auf den beweglichen Körper A Kräfte einwirken, die sich auf 2 andere R und S zurückführen, von denen die erste R den Körper A in senkrechter Richtung gegen die Ebene, auf der er ruhet, antreibt, die zweite S aber den Körper A in einer mit der gedachten Ebene parallelen Richtung zu bewegen strebt, so müfste, wenn aufser den genannten Kräften keine andern zwischen beiden Körpern thätig wären, und die Kraft R in Folge des Widerstandes der Ebene, gegen welche sie gerichtet ist, nicht fähig wäre, den Körper A in Bewegung zu setzen, dieser Körper doch noch vermöge der Kraft S längs der Ebene, gegen die er angedrückt wird, hingleiten, und es müfste, um dieses Verschieben des Körpers A an dem

Körper B zu verhüten, jenem eine der S völlig gleiche und ihr gerade entgegengesetzt wirkende Kraft mitgetheilt werden. Die Erfahrung zeigt nun zwar, dafs der bewegliche Körper A durch eine der S gerade entgegengesetzte Kraft P in Ruhe erhalten wird, wenn $P=S$, zugleich aber auch, dafs diese Ruhe nicht jedesmal unterbrochen wird, sobald man die Kraft P kleiner oder gröfser als S nimmt, sondern nur dann, wenn diese Verminderung oder Vermehrung einen gewissen, dem Drucke R proportionalen Werth μR übersteigt. Das Gleichgewicht erhält sich nemlich in dem Körper A so lange, als die Kraft P ihrer Gröfse nach nicht über die beiden Grenzen $S-\mu R$ und $S+\mu R$ hinaus fällt. Dabei bleibt die Zahl μ stets dieselbe, wie auch die Kräfte R und S sich ändern mögen, wenn nur die an einander gepreſsten Ebenen der Körper A und B ihrer physischen Natur nach fortwährend dieselben bleiben; denn selbst die geometrische Form und Gröfse der an einander gedrückten Ebenen hat, wenn man von dem aus der Adhäsion der Theile hervorgehenden Widerstand absieht, auf den Werth von μ keinen Einfluſs. Aus dem Vorgebrachten erhellet sonach, dafs durch das Aneinanderdrücken zweier Körper eine Kraft an der Berührungsstelle beider erzeugt wird, die einer relativen Änderung dieser Berührungsstellen in der Richtung der Berührungs-Ebene nach allen Seiten hin in dem Maafse, als sie dazu aufgefordert wird, bis zu einer gewissen Stärke sich zu widersetzen im Stande ist. Diese den Charakter eines Widerstandes besitzende Kraft nennen wir die Reibung, und die von der physischen Natur der an einander gedrückten Flächen abhängige Zahl μ, wodurch das Maximum μR der Reibung angezeigt wird, den Reibungscoëfficienten. Der Werth des Reibungscoëfficienten ist für jeden in der Anwendung vorkommenden Fall zunächst aus Beobachtungen abzuleiten; dann aber ist diese Zahl μ in jeder spätern Rechnung als eine völlig bekannte Zahl stets anzusehen.

2) Aufgabe 1. Eine horizontale Achse ruht mit ihren beiden Zapfen vom Halbmesser ϱ in festen Zapfenlagern, und es wirken, in einer senkrecht auf diese Achse gestellten Ebene, Kräfte P, P', P'', u. s. f., deren Richtungen mit einer zu dieser Ebene gehörigen Horizontallinie *)

*) Es fällt in die Augen, dafs statt der Horizontallinie jede andere Linie von unveränderlicher Richtung in der Ebene genommen werden könnte; aber die horizontale oder die verticale führt

respective die Winkel α, α', α'', u. s. f. bilden, und deren Entfernungen von der Umdrehungs-Achse beziehlich r, r', r'', u. s. f. sind; man soll die beim Gleichgewicht ohne Mitwirkung der Reibung vorhandenen Umstände angeben.

Auflösung. Nennt man S den Druck, welchen die beiden Zapfenlager zusammen gerechnet beim Gleichgewichte ohne Reibung zu ertragen haben (wobei es bekanntlich gestattet ist, sich diesen Druck blofs in der Ebene, worin die Kräfte wirken, auf einen in der Verlängerung der wirklichen liegenden, aber dort nur gedachten Zapfen vorzustellen), und φ den Winkel, welchen die Richtung dieses Druckes mit der angezeigten Horizontallinie macht, so geben die bekanntesten Gesetze der Statik für die Auflösung obiger Aufgabe sogleich nachstehende Gleichungen:

$$(A.)\quad \begin{cases} 0 = Pr \pm P'r' \pm P''r'' \pm \ldots. \\ S\sin\varphi = P\sin\alpha + P'\sin\alpha' + P''\sin\alpha'' + \ldots. \\ S\cos\varphi = P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \ldots. \end{cases}$$

Von den doppelten Zeichen in der ersten Gleichung ist das obere zu nehmen, wenn die Kraft, zu welcher es gehört, die Ebene in demselben Sinne als die Kraft P zu drehen strebt; im Gegenfalle ist das untere Zeichen zu setzen. Aus der ersten dieser Gleichungen läfst sich eine der Gröfsen P, P', P'', ..., r, r', r'', ... durch alle übrigen bestimmen, und die zweite und dritte der obigen Gleichungen dienen dann dazu, die Gröfse des durch die Achse gehenden Druckes S sowohl, als den Winkel φ, unter welchem er gegen die Zapfenlager ausgeübt wird, zu bestimmen. Quadrirt und addirt man nemlich die beiden letzten der Gleichungen $(A.)$, so findet man:

$$S^2 = (P\sin\alpha + P'\sin\alpha' + P''\sin\alpha'' + \ldots.)^2 + (P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \ldots.)^2;$$

dividirt man aber die zweite durch die dritte, so erhält man:

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{P\sin\alpha + P'\sin\alpha' + P''\sin\alpha'' + \ldots.}{P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \ldots.}.$$

3) Aufgabe 2. Es bleibe alles noch ganz so, wie in der vorigen Aufgabe, nur mit dem Unterschiede, dafs jetzt zu den Kräften P, P', P'', ..., welche unter sich im Gleichgewichte stehen, noch eine

---

immer zu der leichtesten Ausdrucksweise, weshalb eine von diesen beiden in allen hier vorkommenden Aufgaben jedesmal zur Bestimmung der Lage aller übrigen Linien gewählt werden wird.

neue Kraft p hinzukommt, welche mit der Horizontallinie den Winkel η macht, und in der Entfernung d von der Umdrehungs-Achse wirkt; man soll die Umstände aufsuchen, unter denen die im Maximo auftretende Reibung der Kraft p das Gleichgewicht hält *).

Auflösung. Wir denken uns, um diesen Fall an den vorigen eng anschliefsen zu können, die in den Entfernungen r, r', r'', ... wirkenden Kräfte P, P', P'', ... auch jetzt noch als solche, die ohne Rücksicht auf Reibung unter sich im Gleichgewichte sich befinden, und nennen noch immer S den aus ihnen hervorgehenden Druck, so wie φ den Winkel, unter welchem dieser Druck geschieht, so dafs also zwischen den Gröfsen P, P', P'', ..., r, r', r'', ..., α, α', α'', ..., S und φ noch immer die vorhin gefundenen Gleichungen (*A.*) Statt finden. Dagegen wollen wir hier noch aufserdem durch S' den Druck bezeichnen, welcher bei dem Gleichgewichte unter Mitwirkung der Reibung im Maximo auf die Zapfenlager ausgeübt wird, so wie durch φ' den Winkel, unter welchem es geschieht. Dies vorausgesetzt, so ist aus der Natur der Reibung, wie sie oben beschrieben worden ist, leicht zu entnehmen, dafs sie nur am Umfange der Zapfen an der Stelle, wo sich der Druck S' äufsert, und in dem Maafse, als sie dazu aufgefordert wird, hervorgerufen, und in einer Richtung, die senkrecht auf der des Druckes S' steht, thätig werden, dabei aber die Gröfse $\mu S'$ nie übersteigen kann. Es wird also alles noch ganz so wie bei der vorigen Aufgabe bleiben, nur mit dem Unterschiede, dafs zu den dortigen Kräften jetzt noch die Kraft p, welche unter dem Winkel η in der Entfernung d von der Umdrehungs-Achse thätig ist, hinzukommt, und noch überdies die Reibung in der Entfernung des Zapfenhalbmessers ϱ, deren Richtung senkrecht auf der Richtung des Druckes S' steht, und die jedesmal nach der Seite hin strebt, wodurch sie einem durch die Kraft p beabsichtigtem Verschieben der Zapfen auf ihren Lagern gerade entgegenwirkt. Der Winkel, welchen die Richtung der Reibung mit der Horizontallinie macht, ist daher $\varphi' - 90°$

---

*) Gerade die Allgemeinheit, in welcher obige Aufgabe gestellt ist, bringt in ihre Behandlung eine bedeutende Erleichterung. Wollte man aber die Gröfse p wissen, um welche eine der Kräfte P, P', P'', ..., z. B. P, vermehrt oder vermindert werden kann, ohne dafs unter dem Zutritte der Reibung im Maximo das Gleichgewicht zu bestehen aufhört, so darf man nur r statt d setzen, und α statt η, wenn die Kraft P um p vermehrt werden soll, dagegen $\alpha \pm 180°$ statt η, wenn die Kraft P um p vermindert werden soll.

oder $\varphi' + 90°$, je nachdem die Kraft p eine Ortsveränderung der Zapfenpuncte in demselben oder in entgegengesetztem Sinne hervorzurufen strebt, in welchem man das Wachsen der Winkel festgestellt hat. Um jedoch eine daraus entspringende doppelte Betrachtung zu vermeiden, wollen wir darin übereinkommen, dafs gleich von vorn herein alle Winkel α, α', α'', ..., Φ und φ' jederzeit nach der Seite hin gezählt werden, welche der, wohin die Zapfenpuncte von der Kraft p im Falle einer Bewegung getrieben werden, entgegengesetzt ist, was sich aus der Lage und Richtung der Kraft p in jedem besondern Falle zum Voraus leicht bestimmen läfst, so dafs der Winkel, den die Reibung mit der Horizontallinie macht, allemal $\varphi' + 90°$ wird. Beschränken wir uns demnach hier auf den Fall, wo die Reibung ihren gröfsten Werth $\mu S'$ annimmt *), so erhalten wir ganz wie in der vorigen Auflösung zur Bestimmung der Umstände, welche das Gleichgewicht unter Mitwirkung der Reibung begleiten, folgende Gleichungen:

$$(B.)\quad \begin{cases} 0 = \pm pd \mp \mu S'\varrho + Pr \pm P'r' \pm P''r'' \pm \ldots. \\ S'\sin\varphi' = p\sin\eta + \mu S'\cos\varphi' + P\sin\alpha + P'\sin\alpha' + P''\sin\alpha'' + \ldots. \\ S'\cos\varphi' = p\cos\eta - \mu S'\sin\varphi' + P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \ldots. \end{cases}$$

Was die doppelten Vorzeichen in der ersten dieser Gleichungen betrifft, so gilt für sie nicht nur alles das, was schon bei den Gleichungen (*A.*) erwähnt worden ist, sondern es ist hier noch aufserdem zu bemerken, dafs von den vor p stehenden doppelten Zeichen das obere oder das untere genommen werden müsse, je nachdem p die Ebene, worin alle Kräfte liegen, in demselben oder in entgegengesetztem Sinne zu drehen bemüht ist, als die Kraft P, und dafs von den zu dem Gliede $\mu S'\varrho$ gehörigen Vorzeichen stets das entgegengesetzte von dem zu nehmen ist, welches vor p gesetzt wird.

Mit Zuziehung der Gleichungen (*A.*) gehen aber die Gleichungen (*B.*) in folgende einfachere über:

---

*) Wenn die Reibung nicht mit ihrem vollen Werthe $\mu S'$, sondern nur mit einem Theile $\mu' S'$ jenes Werthes auftreten soll, wobei natürlicherweise immer $\mu' < \mu$ sein mufs, so bringt dies keinen andern Unterschied hervor, als dafs in den kommenden Gleichungen (*B.*) überall μ' statt μ gesetzt werden mufs. Man überzeugt sich so ganz einfach, dafs durch die angezeigte Aenderung alle folgenden Resultate auch noch für den Fall brauchbar werden, wo nur ein aliquoter Theil der vollen Reibung bei der Bildung des Gleichgewichts geweckt werden soll.

$$(C.)\quad \begin{cases} pd = \mu\varrho S', \\ S'(\sin\varphi' - \mu\cos\varphi') = S\sin\varphi + p\sin\eta, \\ S'(\cos\varphi' + \mu\sin\varphi') = S\cos\varphi + p\cos\eta. \end{cases}$$

Aus den beiden letzten der Gleichungen (*C.*) erhält man nun, wenn man sie quadrirt und addirt, folgende neue Gleichung:

$$(1+\mu^2)S'^2 = S^2 + 2pS\cos(\varphi-\eta) + p^2,$$

welche, wenn man in sie für p seinen Werth aus der ersten von den Gleichungen (*C.*) setzt, übergeht in:

$$(1+\mu^2)S'^2 = S^2 + 2\mu\frac{\varrho}{d}SS'\cos(\varphi-\eta) + \mu^2\frac{\varrho^2}{d^2}S'^2,$$

und aus dieser erhält man, durch Auflösung derselben, für S' folgenden Werth:

$$S' = \frac{\mu\frac{\varrho}{d}\cos(\varphi-\eta) \pm \sqrt{\left(1+\mu^2-\mu^2\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2(\varphi-\eta)\right)}}{1+\mu^2-\mu^2\frac{\varrho^2}{d^2}}.S,$$

oder, wenn man Zähler und Nenner durch

$$\mu\frac{\varrho}{d}\cos(\varphi-\eta) \mp \sqrt{\left(1+\mu^2-\mu^2\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2(\varphi-\eta)\right)}$$

multiplicirt:

$$S' = \frac{S}{-\mu\frac{\varrho}{d}\cos(\varphi-\eta) \pm \sqrt{\left(1+\mu^2-\mu^2\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2(\varphi-\eta)\right)}}.$$

Setzt man nun

$$(\dagger.)\quad \frac{1}{-\mu\frac{\varrho}{d}\cos(\varphi-\eta) \pm \sqrt{\left(1+\mu^2-\mu^2\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2(\varphi-\eta)\right)}} = f,$$

so dafs also f eine blofs von μ, $\frac{\varrho}{d}$ und $\varphi-\eta$ abhängige und eben deswegen als bekannt anzusehende Zahl vorstellt, so folgt:

$$(a.)\quad S' = f.S,$$

und nun aus der ersten der Gleichungen (*C.*) sogleich auch:

$$(b.)\quad p = \mu\frac{\varrho}{d}.f.S.$$

Ferner läfst sich mit Hülfe der gefundenen Werthe jetzt auch noch der Winkel φ', unter welchem beim Zutritte der Reibung der Druck S' auf die Zapfenlager geschieht, aus den beiden letzten von den Gleichungen (*C.*) berechnen. Die genannten Gleichungen gehen nemlich mit Berücksichtigung der eben für S' und p gefundenen Werthe über in:

$$\sin\varphi' - \mu\cos\varphi' = \frac{\sin\varphi}{f} + \mu\frac{\varrho}{d}\sin\eta,$$

$$\cos\varphi' + \mu\sin\varphi' = \frac{\cos\varphi}{f} + \mu\frac{\varrho}{d}\cos\eta.$$

Führt man daher einen positiven hohlen Winkel ν von der Beschaffenheit ein, dafs $\text{tang}\,\nu = \mu$ ist, welcher Winkel ν stets spitz und kleiner als 45° sein wird, weil die Zahl μ ihrer Natur nach immer positiv und kleiner als 1 ist, und setzt man in vorstehenden Gleichungen statt μ überall $\text{tang}\,\nu$, so gehen sie auf bekannte Weise in diese über:

$$(\Theta.)\quad \begin{cases} \sin(\varphi' - \nu) = \dfrac{\cos\nu \,.\, \sin\varphi}{f} + \dfrac{\varrho}{d} \sin\gamma \,.\, \sin\eta, \\ \cos(\varphi' - \nu) = \dfrac{\cos\nu \,.\, \cos\varphi}{f} + \dfrac{\varrho}{d} \sin\gamma \,.\, \cos\eta. \end{cases}$$

Da durch die Gleichungen (Θ.) sowohl der Sinus als der Cosinus von $\varphi' - \nu$ bestimmt wird, so erhält man in jedem Falle den Winkel φ' ohne die geringste Zweideutigkeit. Übrigens wiederhole ich hier noch ein für allemal die Bemerkung, dafs die bisher aufgestellten Gleichungen und die daraus abgeleiteten, welche noch folgen werden, nur unter der Voraussetzung allgemein wahr sind, dafs man alle in ihnen erscheinenden Winkel nach der Seite hinauf fafst, die der, nach welcher die Zapfen von der Kraft p zu einer Drehung angereizt werden, gerade entgegengesetzt ist, welche Bestimmung stets in der Willkühr dessen liegt, der die Aufgabe behandelt.

4) Die Gleichungen (*a.*), (*b.*) und (Θ.) in Verbindung mit der Gleichung (♂.) genügen zur Bestimmung aller beim Gleichgewichte unter Mitwirkung der Reibung eintretenden Umstände, und sind völlig genau. Der leichte Gebrauch dieser Gleichungen in der Ausübung hängt ganz allein davon ab, dafs die Gleichung (♂.) sowohl als die Gleichungen (Θ.) eine für die Rechnung bequemere Form erhalten. Wir werden weiter unten zusehen, was sich in dieser Hinsicht noch thun läfst; zuvor aber wollen wir noch einige allgemeine Bemerkungen über die in No. 3. erhaltenen Ausdrücke und deren Bedeutung machen. Vor Allem mache ich darauf aufmerksam, dafs der Werth f, wie ihn die Gleichung (♂.) giebt, seiner Natur nach nur positiv sein kann, weil ein negativer Werth von f zu negativen Kräften führen würde, die unzulässig sind, da für jede Kraft alle möglichen Richtungen in die Rechnung aufgenommen worden sind, und deswegen das Zeichen — nicht sowohl einen Gegensatz in der Richtung, als einen Gegensatz in dem Wesen der Kraft anzudeuten hätte, der nicht denkbar ist. Aus diesem Grunde darf von den doppelten Zeichen vor dem Wurzelwerthe stets nur dasje-

nige genommen werden, welches zu einem positiven Werthe von f führt. Dies geschieht zwar in der Regel nur durch das obere Zeichen, aber in manchen Fällen auch, wie wir finden werden, durch das untere. Aufser den für f sich ergebenden negativen Werthen, welche stets zu verwerfen sind, können für f unter Umständen auch imaginäre Ausdrücke entstehen. Dies geschieht, wenn der unter dem Wurzelzeichen stehende Werth negativ wird. In diesem Falle läfst sich für f überhaupt kein reeller Werth, weder ein positiver noch ein negativer, angeben, worin sich eine absolute Unmöglichkeit der Aufgabe ausspricht, die jedoch von einer ganz andern Art ist, als da, wo sich für f negative Werthe herausstellen, und die wir weiter unten näher kennen lernen werden. Übrigens versteht sich schon von selbst, dafs wenn ein Werth von f von der Auflösung ausgeschlossen werden mufs, auch der dazu gehörige Werth von φ', selbst wenn er möglich wäre, von ihr ausgeschlossen bleiben müsse, weil beide nicht von einander getrennt aufgefafst werden können.

Die allgemeine Untersuchung der Natur des für f gefundenen Ausdruckes läfst sich durch nachstehende Betrachtung blofs auf einen Theil des ganzen Bezirkes zurückführen. Da nemlich in dem für f gefundenen Ausdrucke nur $\cos(\varphi-\eta)$ und $\sin(\varphi-\eta)$, und zwar letzterer nur im Quadrate vorkommt, so erhält man für f, man mag dabei die obern oder die untern Zeichen gebrauchen, immer noch denselben Werth, wenn man $-(\varphi-\eta)$ oder $360°-(\varphi-\eta)$ statt $\varphi-\eta$ in den Ausdruck für f setzt, weil nicht nur

$$\cos x = \cos(-x) \quad \text{und} \quad \sin^2 x = \sin^2(-x),$$

sondern auch

$$\cos x = \cos(360° - x) \quad \text{und} \quad \sin^2 x = \sin^2(360° - x).$$

Hieraus folgt, dafs der Werth von f derselbe ist, wenn nur die Richtung von p mit der Richtung von S denselben Winkel, gleichgültig ob nach der einen oder nach der andern Seite hin, bildet, und dabei ist es völlig einerlei, welcher von den beiden Winkeln φ und η der gröfsere oder der kleinere sei. Man kann sich also bei der Untersuchung der zu den möglichen Werthen von $\varphi-\eta$ gehörigen Werthe von f auf den einen Fall beschränken, wo $\varphi-\eta$ einen positiven Winkel x zwischen $0°$ und $180°$ vorstellt; denn verlangt man den Werth von f zu wissen, wenn $\varphi-\eta$ von der Form $360°-x$, oder von der Form $-x$, oder endlich von der Form $-(360°-x)$ ist, so hat man jedesmal blofs den

Werth von f zu nehmen, wo $\varphi - \eta = x$ ist, wobei x jedesmal einen nicht über 0° und 180° hinaus fallenden positiven Winkel bezeichnet. Es ist einleuchtend, dafs durch diese vorausgeschickte Betrachtung die Untersuchung des für f gefundenen Ausdruckes gar sehr erleichtert wird.

Endlich wollen wir noch die Umstände kennen lernen, unter welchen der für f erhaltene Ausdruck ein Maximum oder Minimum wird, in Bezug auf die als unabhängig angesehene veränderliche Gröfse $\varphi - \eta$.

Es ist bekannt, dafs man die zum Maximum oder Minimum erforderlichen Bedingungen des Ausdruckes f erhält, wenn man ihn nach $\varphi - \eta$ differentiirt und den Differentialquotienten gleich Null oder einem unendlich grofsen Werthe gleich setzt. Der genannte Differentialquotient erscheint aber in der Gestalt eines Bruches, dessen Zähler:

$$-\mu\frac{\varrho}{d}\sin(\varphi-\eta) \pm \frac{\mu^2\frac{\varrho^2}{d^2}\sin(\varphi-\eta)\cos(\varphi-\eta)}{\sqrt{\left(1+\mu^2-\mu^2\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2(\varphi-\eta)\right)}},$$

und dessen Nenner:

$$\left[-\mu\frac{\varrho}{d}\cos(\varphi-\eta) \pm \sqrt{\left(1+\mu^2-\mu^2\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2(\varphi-\eta)\right)}\right]^2$$

ist; man kann demnach den Differentialquotienten auch so schreiben:

$$f^2\left\{-\mu\frac{\varrho}{d}\sin(\varphi-\eta) \pm \frac{\mu^2\frac{\varrho^2}{d^2}\sin(\varphi-\eta)\cos(\varphi-\eta)}{\sqrt{\left(1+\mu^2-\mu^2\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2(\varphi-\eta)\right)}}\right\},$$

und aus dieser Form lassen sich leicht folgende Bedingungen für das Maximum oder Minimum des Werthes f, in Beziehung auf den Winkel $\varphi - \eta$, herleiten:

I. Der hier gegebene Differentialquotient wird mit f zugleich Null und unendlich. Da jedoch f im Sinne unserer Aufgabe den Werth Null nie annehmen kann, und ein an sich unendliches f eben so wenig statthaft ist, so hat man diese Bedingung, als eine in jetziger Betrachtung bedeutungslose, nicht weiter zu berücksichtigen.

II. Der obige Differentialquotient wird Null, wenn $\sin(\varphi - \eta) = 0$ ist, d. h. wenn entweder $\varphi - \eta = 0$, oder $\varphi - \eta = \pm 180°$ ist.

III. Der gedachte Differentialquotient wird Null, wenn

$$-1 + \frac{\mu\frac{\varrho}{d}\cos(\varphi-\eta)}{\pm\sqrt{\left(1+\mu^2-\mu^2\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2(\varphi-\eta)\right)}} = 0,$$

d. h. wenn $1+\mu^2-\mu^2\frac{\varrho^2}{d^2}=0$ und zugleich der Werth

$$\frac{\mu\frac{\varrho}{d}\cos(\varphi-\eta)}{\pm\sqrt{\left(1+\mu^2-\mu^2\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2(\varphi-\eta)\right)}}$$

positiv ist, welches Letztere nichts Anderes sagt, als dafs $\cos(\varphi-\eta)$ bei dem positiven Wurzelwerthe positiv, und bei dem negativen Wurzelwerthe negativ sein müsse.

IV. Endlich wird der Differentialquotient unendlich grofs, wenn

$$1+\mu^2-\mu^2\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2(\varphi-\eta)=0$$

ist, ohne dafs zu gleicher Zeit

$$\mu^2\frac{\varrho^2}{d^2}\sin(\varphi-\eta)\cos(\varphi-\eta)=0$$

ist, welches Letztere im Sinne unserer Aufgabe nichts Anderes sagen will, als dafs dabei der Winkel $\varphi-\eta$ weder ein positives noch ein negatives Vielfache von einem rechten Winkel sein darf, oder dafs von diesem Falle die beiden vorigen ausgeschlossen bleiben.

Es wäre nun auf demselben Wege noch weiter zu untersuchen, ob die in II., III. und IV. ausgesprochenen Bedingungen in der That zu einem Maximum oder Minimum führen, und an welcher Stelle jedesmal das Maximum oder Minimum eintrete; aber wir werden in diese Betrachtungen nicht weiter eingehen, indem wir uns begnügen, obige Bedingungen hier aufgestellt zu haben, und ihre Bedeutung in der Folge auf einem andern nicht minder directem Wege nachweisen zu können.

5) Um den in der Gleichung (ð.) für f gegebenen Ausdruck in eine zur Rechnung bequemere Gestalt zu bringen, wollen wir Zähler und Nenner des erwähnten Ausdrucks durch $\sqrt{(1+\mu^2)}$ dividiren; dann erhalten wir:

$$f=\frac{\frac{1}{\sqrt{(1+\mu^2)}}}{-\frac{\varrho}{d}\cdot\frac{\mu}{\sqrt{(1+\mu^2)}}\cdot\cos(\varphi-\eta)\pm\sqrt{\left(1-\frac{\varrho^2}{d^2}\cdot\frac{\mu^2}{\sqrt{(1+\mu^2)}}\cdot\sin^2(\varphi-\eta)\right)}}.$$

Erwägen wir nun, dafs der zu Ende von Nr. 4. eingeführte Winkel ν die Eigenschaft besitzt, dafs $\sin\nu=\frac{\mu}{\sqrt{(1+\mu^2)}}$ und $\cos\nu=\frac{1}{\sqrt{(1+\mu^2)}}$ ist, so verwandelt sich vorstehende Gleichung durch Substitution dieser Werthe in folgende:

$$f = \frac{\cos\nu}{-\frac{\varrho}{d}\sin\nu.\cos(\varphi-\eta) \pm \sqrt{\left(1-\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2\nu.\sin^2(\varphi-\eta)\right)}}.$$

Führen wir nun noch einen zweiten, nicht über die Grenzen 0° und ± 90° hinaus liegenden Winkel λ von der Beschaffenheit ein, dafs

$$\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2\nu.\sin^2(\varphi-\eta) = \sin^2\lambda$$

ist, so wird

$$\frac{\varrho}{d}\sin\nu = \pm\frac{\sin\lambda}{\sin(\varphi-\eta)},$$

und da $\frac{\varrho}{d}\sin\nu$ stets positiv ist, so können wir dem doppelten Vorzeichen dadurch entgehen, dafs wir λ positiv oder negativ nehmen, je nachdem $\sin(\varphi-\eta)$ positiv oder negativ ist; d. h. λ so, dafs

$$\frac{\varrho}{d}\sin\nu.\sin(\varphi-\eta) = \sin\lambda$$

wird. Setzen wir nun dem gemäfs $\cos\lambda$ statt $\sqrt{\left(1-\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2\nu.\sin^2(\varphi-\eta)\right)}$ und $\frac{\sin\lambda}{\sin(\varphi-\eta)}$ statt $\varrho\sin\nu$, so geht der letzte für f erhaltene Ausdruck nach einer leichten Reduction über in:

$$(\text{♀.})\quad f = \pm\frac{\cos\nu.\sin(\varphi-\eta)}{\sin(\varphi-\eta\mp\lambda)},$$

wobei entweder nur die obern oder nur die untern Zeichen zu nehmen sind, und für λ der positive oder negative Winkel, dessen Sinus $= \frac{\varrho}{d}\sin\nu.\sin(\varphi-\eta)$ ist. Die obern Zeichen in diesem Ausdrucke für f entsprechen fortwährend den obern Zeichen in der Gleichung (♁.), so dafs also $+\frac{\cos\nu.\sin(\varphi-\eta)}{\sin(\varphi-\eta-\lambda)}$ einerlei Bedeutung hat mit dem aus der Gleichung (♁.) genommenen Ausdrucke:

$$\frac{1}{-\mu\frac{\varrho}{d}\cos(\varphi-\eta)+\sqrt{\left(1+\mu^2-\mu^2\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2(\varphi-\eta)\right)}},\ \text{und}\ -\frac{\cos\nu.\sin(\varphi-\eta)}{\sin(\varphi-\eta+\lambda)}$$

einerlei Bedeutung mit dem aus der Gleichung (♁.) genommenen Ausdrucke:

$$\frac{1}{-\mu\frac{\varrho}{d}\cos(\varphi-\eta)-\sqrt{\left(1+\mu^2-\mu^2\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2(\varphi-\eta)\right)}},$$

in so fern in diesen beiden Ausdrücken der Wurzelwerth jedesmal absolut genommen wird. Die zuletzt für f gegebene Form ist für die Rechnung ungleich bequemer, als der in der Gleichung (♁.) für f gegebene Ausdruck, aber sie wird nichtssagend, wenn $\sin(\varphi-\eta) = 0$, d. h. wenn

$\varphi - \eta = 0$, oder $\varphi - \eta = \pm 180°$ ist; denn in diesem Falle giebt die Gleichung $\frac{\varrho}{r} \sin\nu . \sin(\varphi - \eta) = \sin\lambda$ auch $\sin\lambda = 0$, d. h. $\lambda = 0$, weshalb die erwähnten Formen unter solchen Umständen jedesmal die Gestalt $\frac{0}{0}$ annehmen, aus der sich kein Werth für f erkennen läfst. Man könnte zwar auch in diesem Falle die Bedeutung von f aus der letztern Form entweder dadurch herholen, dafs man in ihr statt $\sin(\varphi - \eta \mp \lambda)$ setzt:

$$\sin(\varphi - \eta) \mp \frac{\varrho}{d} \sin\nu . \cos(\varphi - \eta) \sin(\varphi - \eta),$$

und dann Zähler und Nenner derselben durch $\sin(\varphi - \eta)$ dividirt, oder dadurch, dafs man nach Anleitung der Differentialrechnung ihren Werth für den Fall bestimmt, wo sie die Gestalt $\frac{0}{0}$ annimmt, und dabei nicht aufser Acht läfst, dafs λ eine Function von $\varphi - \eta$ ist. Am einfachsten ist es indessen, wenn man in diesem Falle auf den durch die Gleichung ($\mathfrak{d}$.) gegebenen Ausdruck zurück geht, aus welchem man sogleich erhält, für den Fall wo $\varphi - \eta = 0$ ist:

$$(\mathfrak{o}.) \quad f = \frac{1}{-\mu \frac{\varrho}{\delta} \pm \sqrt{(1+\mu^2)}},$$

und für den Fall wo $\varphi - \eta = \pm 180°$ ist:

$$(\mathfrak{d}.) \quad f = \frac{1}{\mu \frac{\varrho}{d} \pm \sqrt{(1+\mu^2)}}.$$

Diesen besondern an sich sehr einfachen Ausdrücken von f kann man, da wo es zweckmäfsig scheint, auf mehrfache Weise eine für die genaue Rechnung noch bequemere Gestalt geben *).

6) Ehe wir weiter gehen, wollen wir noch die in den verschiedenen für f mitgetheilten Ausdrücken enthaltenen doppelten Gestalten, welche

---

*) Wenn man z. B. in dieselben den Winkel ν einführt, so erhält man,

wenn $\varphi - \eta = 0$ ist:

$$f = \pm \frac{\cos\nu}{1 \mp \frac{\varrho}{d} \sin\nu},$$

wenn $\varphi - \eta = \pm 180°$ ist:

$$f = \pm \frac{\cos\nu}{1 \pm \frac{\varrho}{d} \sin\nu}.$$

Setzt man nun $\frac{\varrho}{d} \sin\nu = \tang^2\gamma$, so wird in jedem Falle:

$$\frac{\cos\nu}{1 + \frac{\varrho}{d} \sin\nu} = \cos\nu . \cos^2\gamma;$$

aus dem doppelten Zeichen des Wurzelwerthes in der Gleichung (ð.) hervorgegangen sind, näher in's Auge fassen, und untersuchen, unter welchen Umständen die einen oder die andern zu nehmen sind. Dabei ist im Allgemeinen zu erwägen, dafs der Werth von f imaginär wird, wenn

$$\mu^2 \frac{\varrho^2}{d^2} \sin^2(\varphi - \eta) > 1 + \mu^2,$$

oder, was dasselbe ist, wenn

$$\frac{\varrho^2}{d^2} \sin^2 \nu . \sin^2(\varphi - \eta) > 1$$

wird, in welchem Falle aber auch kein durch die Gleichung

$$\frac{\varrho}{d} \sin \nu . \sin(\varphi - \eta) = \sin \lambda$$

zu bestimmender Winkel λ möglich ist, und zwar nur in diesem Falle. Da wo also in den Umformungen von f der Winkel λ sich unmöglich zeigt, deutet dies auf die absolute Unmöglichkeit von f eben so gut hin, wie die Bestimmung

$$\mu \frac{\varrho^2}{d^2} \sin^2(\varphi - \eta) > 1 + \mu^2$$

in dem ursprünglichen, durch die Gleichung (ð.) gegebenen Ausdrucke von f. Aber selbst wenn λ möglich ist, so ist darum nicht auch nothwendigerweise f möglich; denn da, wie schon in No. 4. angezeigt worden ist, f seiner Natur nach immer nur positiv, nie negativ sein kann, so sind von den verschiedenen Formen des Ausdruckes f immer nur diejenigen beizubehalten, welche zu positiven Werthen von f führen, die übrigen, welche zu negativen oder imaginären Werthen von f führen, aber jederzeit zu verwerfen. Weil aber in den verschiedenen für f gefundenen Ausdrücken eben so gut diejenigen Formen genommen werden können, welche dem additiven Wurzelwerthe entsprechen, als die, welche

---

setzt man ferner $\frac{\varrho}{d} \sin \nu = \cos^2 \gamma'$, wenn $\frac{\varrho}{d} \sin \nu < 1$, und $\frac{\varrho}{d} \sin \nu = \frac{1}{\cos^2 \gamma''}$, wenn $\frac{\varrho}{d} \sin \nu > 1$ ist, so findet man,

wenn $\frac{\varrho}{d} \sin \nu < 1$ ist:

$$\frac{\cos \nu}{1 - \frac{\varrho}{d} \sin \nu} = \frac{\cos \nu}{\sin^2 \gamma'},$$

wenn $\frac{\varrho}{d} \sin \nu > 1$ ist:

$$\frac{\cos \nu}{\frac{\varrho}{d} \sin \nu - 1} = \frac{\cos \nu}{\tang^2 \gamma''}.$$

dem subtractiven Wurzelwerthe angehören, so können für f möglicherweise aus jenen Formen zwei brauchbare Werthe hervorgehen, oder nur einer, oder gar keiner, je nachdem beide Formen, oder nur die eine, oder keine von beiden positive Werthe für f liefern. Diese verschiedenen möglichen Fälle sind es eben, welche wir nun näher kennen lernen wollen. Dabei haben wir blofs solche Werthe von $\varphi - \eta$ in's Auge zu fassen, welche nicht über die Grenzen 0° und 180° hinaus fallen, weil, wie ebenfalls schon in No. 4. gezeigt worden ist, alle übrigen Fälle sich auf diesen einen leicht zurückführen lassen. Die Natur des Werthes f hängt aber insbesondere von der Gröfse des Werthes $\frac{\varrho}{d} \cdot \frac{\mu}{\sqrt{(1+\mu^2)}}$ oder $\frac{\varrho}{d} \sin\nu$ ab; daher wollen wir nach einander die drei verschiedenen Fälle abhandeln, wo entweder $\frac{\varrho}{d} \sin\nu < 1$, oder $\frac{\varrho}{d} \sin\nu = 1$, oder $\frac{\varrho}{d} \sin\nu > 1$ ist, wobei wir jedoch blofs solche Werthe von $\varphi - \eta$ berücksichtigen werden, die $> 0°$ und $< 180°$ sind, weil die besondern Fälle, wo $\varphi - \eta = 0$ oder $\varphi - \eta = 180°$ ist, sich ohne alle Schwierigkeit durch den blofsen Anblick der Gleichungen (♉.) und (♂.) sogleich entscheiden lassen.

Erster Fall, wenn $\frac{\varrho}{d} \sin\nu < 1$ ist.

Aus der Gleichung $\frac{\varrho}{d} \sin\nu . \sin(\varphi - \eta) = \sin\lambda$ ergiebt sich für diesen Fall allgemein $\frac{\sin\lambda}{\sin(\varphi - \eta)} < 1$. Daraus folgt, weil $(\varphi - \eta)$ nicht über die Grenzen 0° und 180° hinauskommt, und eben deshalb λ die Grenzen 0° und 90° nicht überspringen kann, wie aus dessen in No. 5. gegebener Bestimmung unmittelbar hervorgehet, dafs $\lambda < \varphi - \eta$ sein werde, so lange $\varphi - \eta$ nicht stumpf ist, und dafs $\lambda < 180° - (\varphi - \eta)$, sobald $\varphi - \eta$ stumpf wird. In jedem Falle aber fällt sowohl $\varphi - \eta - \lambda$ als $\varphi - \eta + \lambda$ nicht über die Grenzen 0° und 180° hinaus, so dafs also nicht nur $\sin(\varphi - \eta)$, sondern auch $\sin(\varphi - \eta \mp \lambda)$ fortwährend positiv bleibt. Daher geben die obern Zeichen in dem Ausdrucke (♀.) ununterbrochen für f einen positiven Werth, die untern immer einen negativen. In diesem Falle ist folglich, ohne Ausnahme, aus der Gleichung (♀.):

$$f = \frac{\cos\nu . \sin(\varphi - \eta)}{\sin(\varphi - \eta - \lambda)}$$

zu nehmen, welcher Werth dem

$$f = \frac{1}{-\mu\frac{\varrho}{d}\cos(\varphi-\eta)+\sqrt{\left(1+\mu^2-\mu^2\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2(\varphi-\eta)\right)}}$$

aus der Gleichung (♂.) entspricht.

Zweiter Fall, wenn $\frac{\varrho}{d}\sin\nu = 1$ ist.

Aus der Gleichung $\frac{\varrho}{d}\sin\nu\,.\sin(\varphi-\eta) = \sin\lambda$ ergiebt sich für diesen Fall allgemein $\frac{\sin\lambda}{\sin(\varphi-\eta)} = 1$. Daraus folgt, weil $\varphi-\eta$ nicht über die Grenzen 0° und 180°, und als Folge λ nicht über die Grenzen 0° und 90° hinaus kommt, dafs $\lambda = \varphi-\eta$ wird, so lange $\varphi-\eta$ nicht stumpf ist, und dafs $\lambda = 180°-(\varphi-\eta)$ wird, sobald $\varphi-\eta$ stumpf ist. Ist nun $\varphi-\eta$ nicht stumpf und also $\lambda = \varphi-\eta$, so ist jedesmal $\varphi-\eta-\lambda = 0$. Die obern Zeichen in der Gleichung (♀.) geben sonach fortwährend einen unendlich grofsen Werth für f; $\varphi-\eta+\lambda$ hingegen fällt nie über die Grenzen 0° und 180° hinaus, $\sin(\varphi-\eta+\lambda)$ wird mithin nie negativ, folglich geben die untern Zeichen der Gleichung (♀.) fortwährend negative Werthe für f. Ist aber $\varphi-\eta$ stumpf und also $\lambda = 180°-(\varphi-\eta)$, so ist $\varphi-\eta-\lambda = 180°-2\lambda$ und fällt mithin fortwährend zwischen 0° und 180°, daher geben die obern Zeichen der Gleichung (♀.) stets positive Werthe für f; hingegen ist dann immer $\varphi-\eta+\lambda = 180°$, und dies führt zu einem unendlich grofsen Werth von f. Man ersieht hieraus, dafs in diesem Falle f ununterbrochen einen unendlich grofsen Werth annimmt, bis $\varphi-\eta$ stumpf wird; dann aber erhält f einen endlichen positiven Werth, nemlich:

$$f = \frac{\cos\nu\,.\sin(\varphi-\eta)}{\sin(\varphi-\eta-\lambda)},$$

wobei jedoch $\lambda = 180°-(\varphi-\eta)$ ist, so dafs

$$f = -\frac{\cos\nu}{2\cos(\varphi-\eta)}$$

wird. Dieser Werth von f entspricht in der Gleichung (♂.) dem:

$$f = \frac{1}{-\mu\frac{\varrho}{d}\cos(\varphi-\eta)+\sqrt{\left(1+\mu^2-\mu^2\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2(\varphi-\eta)\right)}},$$

in welchem $\frac{\mu}{\sqrt{(1+\mu^2)}}\cdot\frac{\varrho}{d} = 1$, oder $\mu\frac{\varrho}{d} = \sqrt{(1+\mu^2)}$ gesetzt wird. Dadurch aber verwandelt sich der vorstehende Ausdruck in folgenden:

$$f = -\frac{1}{2\sqrt{(1+\mu^2)}\cos(\varphi-\eta)}.$$

Dritter Fall, wenn $\frac{\varrho}{d}\sin\nu > 1$ ist.

Aus der Gleichung $\frac{\varrho}{d}\sin\nu.\sin(\varphi-\eta) = \sin\lambda$ ergiebt sich für diesen Fall allgemein $\frac{\sin\lambda}{\sin(\varphi-\eta)} > 1$. Zunächst hat man sich aber zu erinnern, dafs nur so lange ein reeller Werth von f bestehen kann, als der Winkel λ möglich ist, d. h. so lange als $\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2\nu.\sin^2(\varphi-\eta) \leqq 1$, oder, weil $\varphi-\eta$ nur zwischen den Grenzen 0° und 180° betrachtet wird, so lange $\sin(\varphi-\eta) \leqq \frac{1}{\frac{\varrho}{d}\sin\nu}$ ist; so lange also $\sin(\varphi-\eta) > \frac{1}{\frac{\varrho}{d}\sin\nu}$ ist, giebt es für f keinen reellen, weder positiven noch negativen Werth. Ist nun $\sin(\varphi-\eta) \leqq \frac{1}{\frac{\varrho}{d}\sin\nu}$ und $\varphi-\eta$ nicht stumpf, so folgt aus $\frac{\sin\lambda}{\sin(\varphi-\eta)} > 1$, dafs $\lambda > \varphi-\eta$ ist, mithin ist $\varphi-\eta-\lambda$ stets negativ und spitz; $\varphi-\eta+\lambda$ hingegen liegt fortwährend zwischen 0° und 180°, daher erhält man aus der Gleichung (♀.) für f jedesmal nur einen negativen Werth, man mag in ihr die obern oder die untern Zeichen nehmen. Ist aber $\sin(\varphi-\eta) \leqq \frac{1}{\frac{\varrho}{d}\sin\nu}$ und $\varphi-\eta$ stumpf, so folgt aus $\frac{\sin\lambda}{\sin(\varphi-\eta)} > 1$, dafs $\lambda > 180° - (\varphi-\eta)$, mithin liegt $\varphi-\eta-\lambda$ stets zwischen 0° und 180°, und $\varphi-\eta+\lambda$ stets zwischen 180° und 360°, daher erhält man aus der Gleichung (♀.) für f einen positiven Werth, man mag in ihr die obern oder die untern Zeichen nehmen. Man ersieht hieraus, dafs in diesem Falle kein positiver, also überhaupt kein brauchbarer Werth für f, nicht einmal ein unendlich grofser, gefunden wird, so lange $\varphi-\eta$ nicht stumpf ist, und selbst, wenn $\varphi-\eta$ stumpf ist, so lange nicht $\sin(\varphi-\eta) \leqq \frac{1}{\frac{\varrho}{d}\sin\nu}$ wird; ist aber $\varphi-\eta$ stumpf und zugleich $\sin(\varphi-\eta) \leqq \frac{1}{\frac{\varrho}{d}\sin\nu}$, so giebt es fortwährend für f zwei positive Werthe, von denen der eine den obern, der andere den untern Zeichen in der Gleichung (♀.) entspricht.

Jener ist $f = \frac{\cos\nu.\sin(\varphi-\eta)}{\sin(\varphi-\eta-\lambda)}$, dieser $f = -\frac{\cos\nu.\sin(\varphi-\eta)}{\sin(\varphi-\eta+\lambda)}$,

und es entspricht jener dem zur Gleichung (♂.) gehörigen Ausdrucke:

$$f = \frac{1}{-\mu\frac{\varrho}{d}\cos(\varphi-\eta)+\sqrt{\left(1+\mu^2-\mu^2\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2(\varphi-\eta)\right)}},$$

dieser hingegen entspricht dem zur Gleichung (♁.) gehörigen Ausdrucke:

$$f = \frac{1}{-\mu\frac{\varrho}{d}\cos(\varphi-\eta)-\sqrt{\left(1+\mu^2-\mu^2\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2(\varphi-\eta)\right)}},$$

wobei jedesmal die absoluten Wurzelwerthe zu nehmen sind, wie in allen vorigen, ähnlichen Ausdrücken. In dem besondern Falle, wo $\sin(\Phi-\eta)=\frac{1}{\frac{\varrho}{d}\sin\nu}$ ist, wird $\sin\lambda=1$, d. h. $\lambda=90°$; dann gehen die beiden Werthe von f in den einen über:

$$f = -\cos\nu.\tang(\Phi-\eta),$$

welcher in der Gleichung (♁.) dem Ausdrucke:

$$f = -\frac{1}{\mu\frac{\varrho}{d}\cos(\varphi-\eta)}$$

entspricht, oder, weil $\cos(\Phi-\eta)=-\sqrt{[1-\sin^2(\Phi-\eta)]}$ ist, dem:

$$f = \frac{1}{\sqrt{\left(\mu^2\frac{\varrho^2}{d^2}-(1+\mu^2)\right)}}.$$

7) Nachdem wir so gefunden haben, welche Formen der verschiedenen Ausdrücke von f jedesmal die brauchbaren Werthe für f liefern, bleibt uns nun nichts mehr übrig, als die diesen Formen entsprechenden Werthe von Φ', wie sie aus den Gleichungen (Θ.) hervorgehen, näher kennen zu lernen.

Setzen wir zu diesem Ende in die Gleichungen (Θ.) statt $\frac{\cos\nu}{f}$ seinen Werth $\pm\frac{\sin(\varphi-\eta\mp\lambda)}{\sin(\varphi-\eta)}$ aus der Gleichung (♀.), und statt $\frac{\varrho}{d}\sin\nu$ den Werth $\frac{\sin\lambda}{\sin(\varphi-\eta)}$, wie man ihn aus der in No. 5. gegebenen Bestimmung des Winkels λ erhält, so verwandeln sich dadurch die Gleichungen (Θ.) in diese:

$$\sin(\Phi'-\nu) = \frac{\pm\sin(\varphi-\eta\mp\lambda)\sin\varphi+\sin\lambda\sin\eta}{\sin(\varphi-\eta)},$$

$$\cos(\Phi'-\nu) = \frac{\pm\sin(\varphi-\eta\mp\lambda)\cos\varphi+\sin\lambda\cos\eta}{\sin(\varphi-\eta)}.$$

Schreibt man in diesen Gleichungen statt der Producte

$$\sin(\Phi-\eta\mp\lambda)\sin\Phi \text{ und } \sin(\Phi-\eta\mp\lambda)\cos\Phi$$

respective die Differenzen

$$\tfrac{1}{2}\cos(\eta\pm\lambda)-\tfrac{1}{2}\cos(2\Phi-\eta\mp\lambda) \text{ und } \tfrac{1}{2}\sin(2\Phi-\eta\mp\lambda)-\tfrac{1}{2}\sin(\eta\pm\lambda),$$

so gehen sie über in:

$$\sin(\Phi'-\nu) = \frac{\mp\tfrac{1}{2}\cos(2\varphi-\eta\mp\lambda)\pm\tfrac{1}{2}\cos(\eta\pm\lambda)+\sin\lambda.\sin\eta}{\sin(\varphi-\eta)},$$

$$\cos(\Phi'-\nu) = \frac{\pm\tfrac{1}{2}\sin(2\varphi-\eta\mp\lambda)\mp\tfrac{1}{2}\sin(\eta\pm\lambda)+\sin\lambda.\cos\eta}{\sin(\varphi-\eta)},$$

oder, wenn man $\pm\frac{1}{2}\cos(\eta\mp\lambda)$ für $\pm\frac{1}{2}\cos(\eta\pm\lambda)+\sin\lambda.\sin\eta$, und $\mp\frac{1}{2}\sin(\eta\mp\lambda)$ für $\mp\frac{1}{2}\sin(\eta\pm\lambda)+\sin\lambda.\cos\eta$ schreibt, in folgende:

$$\sin(\Phi'-\nu) = \frac{\mp\tfrac{1}{2}\cos(2\varphi-\eta\mp\lambda)\pm\tfrac{1}{2}\cos(\eta\mp\lambda)}{\sin(\varphi-\eta)},$$

$$\sin(\Phi'-\nu) = \frac{\pm\tfrac{1}{2}\sin(2\varphi-\eta\mp\lambda)\mp\tfrac{1}{2}\sin(\eta\mp\lambda)}{\sin(\varphi-\eta)}.$$

Es ist aber $\mp\frac{1}{2}\cos(2\Phi-\eta\mp\lambda)\pm\frac{1}{2}\cos(\eta\mp\lambda)=\pm\sin(\Phi-\eta)\sin(\Phi\mp\lambda)$ und $\pm\frac{1}{2}\sin(2\Phi-\eta\mp\lambda)\mp\frac{1}{2}\sin(\eta\mp\lambda)=\pm\cos(\Phi\mp\lambda)\sin(\Phi-\eta)$. Durch Substitution dieser Werthe in die zuletzt erhaltenen Gleichungen wird endlich:

$$\sin(\Phi'-\nu)=\pm\sin(\Phi\mp\lambda),\quad \cos(\Phi'-\nu)=\pm\cos(\Phi\mp\lambda),$$

wo die obern oder untern Zeichen genommen werden müssen, je nachdem in dem Ausdrucke für f die obern oder untern Zeichen genommen werden, und λ stellt, wie schon bekannt ist, entweder einen positiven oder negativen, nicht stumpfen Winkel vor, je nachdem $\sin(\Phi-\eta)$ positiv oder negativ ist. Werden daher in dem Ausdrucke für f die obern Zeichen genommen, so ist jedesmal

$$(c.)\quad \Phi'-\nu=\Phi-\lambda,$$

und λ stellt einen positiven Winkel vor, wenn $\Phi-\eta$ entweder positiv und hohl, oder negativ und erhaben ist; dagegen stellt λ einen negativen Winkel vor, wenn $\Phi-\eta$ entweder positiv und erhaben, oder negativ und hohl ist. Werden aber in dem Ausdrucke für f die untern Zeichen genommen, so ist jedesmal

$$(c.)\quad \Phi'-\nu=180^\circ+\Phi+\lambda,$$

und λ hat wiederum einen positiven Werth, wenn $\Phi-\eta$ positiv hohl, oder negativ erhaben ist; dagegen einen negativen, wenn $\Phi-\eta$ positiv erhaben, oder negativ hohl ist. Es verdient hierbei der Umstand eine besondere Erwähnung, dafs ν derselbe Winkel ist, um welchen, bei hori-

zontaler Lage der Reibungs-Ebene, diese geneigt werden kann bis ein Abgleiten erfolgt, so dafs also in der Regel der Winkel ν unmittelbar durch die Beobachtung gegeben ist, wenn man nicht gleitende Reibung und Zapfenreibung als der Art nach von einander verschieden hält, wozu die bisher im Versuche gefundenen Unterschiede noch keineswegs zu berechtigen scheinen. Übrigens erhellet, dafs die Gleichungen (*c.*) selbst dann noch gültig sind, wenn $\Phi - \eta = 0$ oder $\Phi - \eta = \pm 180°$ ist; denn der Factor $\sin(\Phi - \eta)$, welcher im Zähler und Nenner des in (♀.) gegebenen Ausdruckes von f sich befand, und daher bei den hier erwähnten Werthen von $\Phi - \eta$ jenen Ausdruck unter die Form $\frac{0}{0}$ brachte, ist während der Bildung der Gleichungen (*c.*) wieder aus Zähler und Nenner verschwunden.

8) Wir sind nunmehr in den Stand gesetzt, die beim Eintritte der Reibung, im Maximo vorfallenden Modificationen des Gleichgewichts unter allen Umständen genau und zugleich sehr einfach anzugeben. Um die mannigfaltigen zu f und Φ' gehörigen Formen bei verschiedenen Werthen von $\Phi - \eta$ mit einem Blicke überschauen zu können, wollen wir sie hier für jeden der in No. 6. behandelten drei Fälle besonders zusammen stellen, und dabei den absoluten Werth von λ, das bald positiv, bald negativ erscheint, mit $[\lambda]$ bezeichnen.

Erster Fall, wenn $\frac{\varrho}{d}\sin\nu < 1$, d. h. $\frac{\varrho}{d}\mu < \sqrt{(1+\mu^2)}$ ist.

1. Wenn $\Phi - \eta = 0°$ und daher auch $\lambda = 0$ ist, so ist ein Gleichgewichtszustand vorhanden, für welchen

$$f = \frac{1}{\sqrt{(1+\mu^2)} - \mu\frac{\varrho}{d}} \quad \text{und} \quad \Phi' = \Phi + \nu$$

ist. Statt des hier für f gegebenen Ausdruckes kann auch, wo es Vortheil bringt, eine der Rechnung sich besser anschmiegende Form genommen werden, wie schon in No. 5. angemerkt worden ist.

2. Wenn $\Phi - \eta = \pm 180°$ und daher $\lambda = 0$ ist, so ist ein Gleichgewichtszustand möglich, für welchen

$$f = \frac{1}{\sqrt{(1+m^2)} + \mu\frac{\varrho}{d}} \quad \text{und} \quad \Phi' = \Phi + \nu$$

ist, wo wieder für den zu f gehörigen Ausdruck die eben schon gemachte Bemerkung gilt.

3. So lange $\Phi - \eta$ positiv und hohl, oder negativ und erhaben, also

λ positiv ist, ist ein Gleichgewichtszustand vorhanden für welchen

$$f = \frac{\cos\nu \cdot \sin(\varphi-\eta)}{\sin(\varphi-\eta-\lambda)} = \frac{\cos\nu \cdot \sin(\varphi-\eta)}{\sin(\varphi-\eta-[\lambda])}$$

und

$$\Phi' = \Phi + \nu - \lambda = \Phi + \nu - [\lambda]$$

ist. Der hier gegebene Ausdruck von f ist mit dem aus der Gleichung (♃.) entnommenen:

$$f = \frac{1}{-\mu\frac{\varrho}{d}\cos(\varphi-\eta) + \sqrt{\left(1+\mu^2-\mu^2\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2(\varphi-\eta)\right)}},$$

dem Wesen nach völlig einerlei.

4. So lange $\Phi-\eta$ negativ und hohl, oder positiv und erhaben, also λ negativ ist, ist ein Gleichgewichtszustand vorhanden, für welchen

$$f = \frac{\cos\nu \cdot \sin(\varphi-\eta)}{\sin(\varphi-\eta-\lambda)} = \frac{\cos\nu \cdot \sin(\varphi-\eta)}{\sin(\varphi-\eta+[\lambda])}$$

und

$$\Phi' = \Phi + \nu - \lambda = \Phi + \nu + [\lambda])$$

ist. Der hier für f gegebene Ausdruck entspricht noch immer, aus der Gleichung (♃.), dem:

$$f = \frac{1}{-\mu\frac{\varrho}{d}\cos(\varphi-\eta) + \sqrt{\left(1+\mu^2-\mu^2\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2(\varphi-\eta)\right)}}.$$

Zweiter Fall, wenn $\frac{\varrho}{d}\sin\nu = 1$, d. h. $\mu\frac{\varrho}{d} = \sqrt{(1+\mu^2)}$ ist.

1. Wenn $\Phi-\eta = 0°$, also $\lambda = 0$ ist, ist ein Gleichgewichtszustand möglich, nur wenn

$$f = \infty \quad \text{und} \quad \Phi' = \Phi + \nu$$

ist.

2. Wenn $\Phi-\eta = \pm 180°$, also $\lambda = 0$ ist, ist ein Gleichgewichtszustand vorhanden, für welchen

$$f = \tfrac{1}{2}\cos\nu = \frac{1}{2\sqrt{(1+\mu^2)}} \quad \text{und} \quad \Phi' = \Phi + \nu$$

ist.

3. So lange $\Phi-\eta$ hohlspitz und positiv, oder erhabenspitz und negativ ist, ist ein Gleichgewichtszustand nur dann möglich, wenn

$$f = \infty \quad \text{und} \quad \Phi' = \Phi + \nu - \lambda = \Phi + \nu - [\lambda]$$

ist, wobei $[\lambda] = \Phi-\eta$ zu setzen ist, so lange $\Phi-\eta$ positiv und hohlspitz ist, dagegen $[\lambda] = 360° + \Phi - \eta$, wenn $\Phi-\eta$ negativ und erhabenspitz ist.

So wie aber $\Phi-\eta$ hohlstumpf und positiv, oder erhabenstumpf und negativ wird, ist ein Gleichgewichtszustand vorhanden, für welchen

$$f = -\frac{\frac{1}{2}\cos\nu}{\cos(\varphi-\eta)} \quad \text{und} \quad \Phi' = \Phi + \nu - \lambda = \Phi + \nu - [\lambda]$$

ist, wobei $[\lambda] = 180° - (\Phi - \eta)$ zu setzen ist, so lange $\Phi - \eta$ positiv und hohlstumpf ist, dagegen $[\lambda] = -(\Phi - \eta) - 180°$, wenn $\Phi - \eta$ negativ und erhabenstumpf ist. Die hier für f gegebene endliche Form ist eins mit folgendem aus der Gleichung (ð.) abgeleiteten Ausdrucke:

$$f = -\frac{1}{2\sqrt{(1+\mu^2)}\cos(\varphi-\eta)} = -\frac{1}{2\mu\frac{\varrho}{d}\cos(\varphi-\eta)}.$$

4. So lange $\Phi - \eta$ hohlspitz und negativ, oder erhabenspitz und positiv ist, ist ein Gleichgewichtszustand nur dann möglich, wenn

$$f = \infty \quad \text{und} \quad \Phi' = \Phi + \nu - \lambda = \Phi - \nu + [\lambda]$$

ist, wobei $[\lambda] = -(\Phi - \eta)$ zu setzen ist, so lange $\Phi - \eta$ negativ und hohlspitz ist, dagegen $[\lambda] = 360° - (\Phi - \eta)$, wenn $\Phi - \eta$ positiv und erhabenspitz ist.

So wie aber $\Phi - \eta$ hohlstumpf und negativ, oder erhabenstumpf und positiv wird, ist ein Gleichgewichtszustand vorhanden, für welchen

$$f = -\frac{\frac{1}{2}\cos\nu}{\cos(\varphi-\eta)} \quad \text{und} \quad \Phi' = \Phi + \nu - \lambda = \Phi + \nu + [\lambda]$$

ist, wobei $[\lambda] = 180° + (\Phi - \eta)$, so lange $\Phi - \eta$ negativ und hohlstumpf ist, dagegen $[\lambda] = \Phi - \eta - 180°$, wenn $\Phi - \eta$ positiv und erhabenstumpf ist. Der aus der Gleichung (ð.) abgeleitete endliche Ausdruck von f ist in diesem Falle wieder

$$f = -\frac{1}{2\sqrt{(1+\mu^2)}\cos(\varphi-\eta)} = -\frac{1}{2\mu\frac{\varrho}{d}\cos(\varphi-\eta)}.$$

Dritter Fall, wenn $\frac{\varrho}{d}\sin\nu > 1$, d. h. $\mu\frac{\varrho}{d} > \sqrt{(1+\mu^2)}$ ist.

1. Wenn $\Phi - \eta = 0°$, also $\lambda = 0$ ist, ist kein Gleichgewichtszustand möglich.

2. Wenn $\Phi - \eta = \pm 180°$, also $\lambda = 0$ ist, sind zwei Gleichgewichtszustände vorhanden:

α) für den einen, der den obern Zeichen entspricht, ist

$$f = \frac{1}{\mu\frac{\varrho}{d} + \sqrt{(1+\mu^2)}} \quad \text{und} \quad \Phi' = \Phi + \nu;$$

β) für den andern, der den untern Zeichen entspricht, ist

$$f = \frac{1}{\mu\frac{\varrho}{d} - \sqrt{(1+\mu^2)}} \quad \text{und} \quad \Phi' = 180° + \Phi + \nu.$$

In Bezug auf die unter α. und β. für f gegebenen Ausdrücke gilt auch hier wieder die schon beim ersten Falle unter 1. und 2. aufgestellte Bemerkung.

3. So lange $\Phi - \eta$ hohlspitz und positiv, oder erhabenspitz und negativ ist, ist kein Gleichgewichtszustand möglich. Ja selbst wenn $\Phi - \eta$ hohlstumpf und positiv, oder erhabenstumpf und negativ ist, ist noch so lange kein Gleichgewichtszustand möglich, als $\sin^2(\Phi - \eta) > \frac{1}{\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2\nu}$; wenn aber $\sin^2(\Phi - \eta) \leqq \frac{1}{\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2\nu}$, so sind zwei Gleichgewichtszustände mit positivem λ vorhanden:

α) für den einen, der den obern Zeichen entspricht, ist

$$f = \frac{\cos\nu \cdot \sin(\varphi - \eta)}{\sin(\varphi - \eta - \lambda)} = \frac{\cos\nu \cdot \sin(\varphi - \eta)}{\cos(\varphi - \eta - [\lambda])}$$

und

$$\Phi' = \Phi + \nu - \lambda = \Phi + \nu - [\lambda];$$

β) für den andern, der den untern Zeichen entspricht, ist

$$f = -\frac{\cos\nu \cdot \sin(\varphi - \eta)}{\sin(\varphi - \eta + \lambda)} = -\frac{\cos\nu \cdot \sin(\varphi - \eta)}{\sin(\varphi - \eta + [\lambda])}$$

und

$$\Phi' = 180^\circ + \Phi + \nu + \lambda = 180^\circ + \Phi + \nu + [\lambda].$$

An der Stelle, wo $\sin^2(\Phi - \eta) = \frac{1}{\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2\nu}$ ist, wird $[\lambda] = 90^\circ$; an dieser Stelle hat man daher

α') für den Gleichgewichtszustand, der den obern Zeichen entspricht:

$$f = -\cos\nu \cdot \operatorname{tang}(\Phi - \eta) \quad \text{und} \quad \Phi' = \Phi + \nu - 90^\circ,$$

β') für den Gleichgewichtszustand, der den untern Zeichen entspricht:

$$f = -\cos\nu \cdot \operatorname{tang}(\Phi - \eta) \quad \text{und} \quad \Phi' = 270^\circ + \Phi + \nu = \Phi + \nu - 90^\circ.$$

4. So lange $\Phi - \eta$ hohlspitz und negativ, oder erhabenspitz und positiv ist, ist kein Gleichgewichtszustand möglich. Ja selbst wenn $\Phi - \eta$ hohlstumpf und negativ, oder erhabenstumpf und positiv ist, ist noch so lange kein Gleichgewichtszustand möglich, als $\sin^2(\Phi - \eta) > \frac{1}{\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2\nu}$ ist; wenn aber $\sin^2(\Phi - \eta) \leqq \frac{1}{\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2\nu}$ ist, so sind zwei Gleichgewichtszustände mit negativem λ vorhanden:

α) für den einen, der den obern Zeichen entspricht, ist

$$f = \frac{\cos\nu \cdot \sin(\varphi-\eta)}{\sin(\varphi-\eta-\lambda)} = \frac{\cos\nu \cdot \sin(\varphi-\eta)}{\sin(\varphi-\eta+[\lambda]}$$

und

$$\Phi' = \Phi + \nu - \lambda = \Phi + \nu + [\lambda];$$

β) für den andern, der den untern Zeichen entspricht, ist

$$f = -\frac{\cos\nu \cdot \sin(\varphi-\eta)}{\sin(\varphi-\eta+\lambda)} = -\frac{\cos\nu \cdot \sin(\varphi-\eta)}{\sin(\varphi-\eta-[\lambda]}$$

und

$$\Phi' = 180° + \Phi + \nu + \lambda = 180° + \Phi + \quad - [\lambda],$$

An der Stelle, wo $\sin^2(\Phi-\eta) = \frac{1}{\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2\nu}$ ist, wird $[\lambda] = 90°$; an dieser Stelle hat man daher

α′) für den Gleichgewichtszustand, der den obern Zeichen entspricht:

$$f = \cos\nu \cdot \operatorname{tang}(\Phi-\eta) \quad \text{und} \quad \Phi' = \Phi + \nu + 90°;$$

β′) für den Gleichgewichtszustand, der den untern Zeichen entspricht:

$$f = \cos\nu \cdot \operatorname{tang}(\Phi-\eta) \quad \text{und} \quad \Phi' = \Phi + \nu + 90°.$$

Die hier in 3. und 4. unter α. und β. für f gegebenen Formen entsprechen in der Gleichung (ð.) den + und — Zeichen vor dem stets positiv genommenen Wurzelwerthe; die unter α. stehenden sind nämlich einerlei mit

$$f = \frac{1}{-\mu\frac{\varrho}{d}\cos(\varphi-\eta) + \sqrt{\left(1+\mu^2-\mu^2\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2(\varphi-\eta)\right)}},$$

und die unter β. stehenden sind einerlei mit

$$f = \frac{1}{-\mu\frac{\varrho}{d}\cos(\varphi-\eta) - \sqrt{\left(1+\mu^2-\mu^2\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2(\varphi-\eta)\right)}}$$

Eben so erhält man aus der Gleichung (ð.) die Ausdrücke, welche den hier in 3. und 4. unter α′. und β′. für den besondern Fall, wo $\sin^2(\Phi-\eta) = \frac{1}{\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2\nu}$ ist, gegebenen Formen entsprechen, wenn man in der Gleichung (ð.) $\sin^2(\Phi-\eta) = \frac{1+\mu^2}{\mu^2\frac{\varrho^2}{d^2}}$ setzt; sie geht dadurch in beiden Fällen über in:

$$f = \frac{1}{-\mu\frac{\varrho}{d}\cos(\varphi-\eta)} = \frac{1}{\sqrt{\left(\mu^2\frac{\varrho^2}{d^2}-(1+\mu^2)\right)}}.$$

9) Fügt man zu den Angaben der vorigen Nummer noch hinzu, dafs der absolute Werth von λ in jedem Falle an der Stelle verschwindet, wo $\varphi - \eta$ von der Form $2m.90°$ ist, wenn m jede ganze positive oder negative Zahl und auch Null vorstellt; dafs der absolute Werth von λ immer derselbe ist, wenn $\varphi - \eta$ sich von einer solchen Stelle gleichweit diesseits oder jenseits entfernt; dafs der absolute Werthe von λ in beiden Fällen so lange fort wächst, bis $\varphi - \eta$ von der Form $(2m+1)90°$ geworden ist, dann aber wieder in derselben Weise abnimmt, in der er zugenommen hat, bis $\varphi - \eta$ wieder von der Form $2m.90°$ geworden ist, was für jedes mögliche λ aus der Gleichung $\frac{\varrho}{d} \sin \nu . \sin(\varphi - \eta) = \sin \lambda$ unmittelbar hervor gehet; und vergifst man nie, dafs die Winkel φ', φ, η, durch welche die Richtung der Kräfte bestimmt wird, stets auf der Seite, welche einer beabsichtigten Drehung durch die Kraft p entgegenläuft, genommen werden müssen, so lange sie positiv sind, uud auf der andern Seite, wenn sie negativ werden, so ist man im Besitze aller Erfordernisse, um in jedem Falle mit Leichtigkeit, mit Zuziehung der Gleichungen (*a.*) und (*b.*) alle das Gleichgewicht, unter Mitwirkung der Reibung, im Maximo begleitenden Umstände ableiten zu können. In Hinsicht auf allgemeine Werthbestimmungen habe ich daher zu Obigem nichts weiter hinzuzufügen, aber ich werde noch einen Augenblick bei der Vergleichung der verschiedenen Werthe von f unter einander und bei der Deutung unmöglicher oder doppelter Werthe von f verweilen.

Es erhält f an den Stellen, wo $\varphi - \eta = 0°$ ist, so wie an den Stellen, wo $\varphi - \eta = \pm 180°$ ist, immer einen gröfsten oder kleinsten Werth, falls er möglich ist, und zwar:

1. wird der Werth von f, wenn er aus den obern Zeichen hervorgegangen ist, da ein Gröfstes, wo $\varphi - \eta = 0°$ ist, und da ein Kleinstes, wo $\varphi - \eta = \pm 180°$ ist;
2. wird der Werth von f, wenn er aus den untern Zeichen hervorgegangen ist, da ein Gröfstes, wo $\varphi - \eta = \pm 180°$ ist; da wo $\varphi - \eta = 0°$ wird, ist er, in diesem Falle unmöglich im Sinne unserer Aufgabe, ein Kleinstes als negativer Werth betrachtet.

Diese Maxima und Minima werden in No. 4. durch die unter II. stehende Bedingung ausgesprochen. Von der Realität dieser Maxima und Minima überzeugt man sich schon durch eine etwas aufmerksame Betrachtung der Gleichung (ϑ.). Aufser diesen gröfsten nnd kleinsten Werthen

von f haben sich im zweiten Falle, da wo $\frac{\varrho}{d}\sin\nu = 1$ ist, eine Reihe von unendlich grofsen Werthen von f ergeben, die einen Unterschied von vollen zwei rechten Winkeln in dem Werthe von $\Phi - \eta$ einnehmen; dieser Umstand wird durch die in Nr. 4. unter III. stehende Bedingung angedeutet. Endlich haben sich im dritten Falle, da wo $\frac{\varrho}{d}\sin\nu > 1$ ist, an der Stelle, wo $\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2\nu . \sin^2(\Phi - \eta) = 1$ ist, reelle Werthe von f vorgefunden, welche die letzten ihrer Art sind, weil darüber hinaus imaginäre Werthe von f gebildet werden; diese Grenzwerthe von f sind in der unter IV. in derselben Nummer stehenden Bedingung enthalten.

Insbesondere zeichnet sich der dritte Fall, wo $\frac{\varrho}{d}\sin\nu > 1$ ist, dadurch vor den beiden übrigen aus, dafs in ihm bald gar kein Werth für f möglich ist, bald aber zwei zugleich. Da wo gar kein Werth für f gefunden wird, ist kein Gleichgewicht möglich. Diese Unmöglichkeit ist jedoch nicht absolut, denn sie bezieht sich blofs auf die in die Gleichungen (*B.*) eingeführte Voraussetzung, dafs nämlich beim Gleichgewichte die Reibung in ihrem Maximo thätig sein soll, und es ist leicht einzusehen, dafs in allen solchen Fällen das Gleichgewicht dadurch sich herstellen wird, dafs die Reibung nicht in ihrer vollen Stärke daran Antheil nimmt; denn indem die Reibung nur auf einen Theil ihrer ganzen Wirkung hingewiesen wird, geschieht dasselbe, als wenn in allen unsern Formeln statt der Zahl μ eine in demselben Verhältnisse kleinere Zahl μ' gesetzt würde, und da das kleinere μ' auch die aus μ abgeleiteten Gröfsen ν und $\sin\nu$ in entsprechende kleinere ν' und $\sin\nu'$ verwandeln würde, so müfste auch das Product $\frac{\varrho}{d}\sin\nu$ in ein kleineres $\frac{\varrho}{d}\sin\nu'$ übergehen, und es läfst sich offenbar jederzeit die Zahl μ' so klein wählen, dafs $\frac{\varrho}{d}\sin\nu' < 1$ wird, d. h. dafs das zuvor unmögliche Gleichgewicht jetzt möglich wird. Will man wissen, in welcher Stärke die Reibung in einem solchen Falle bei einem gegebenen Kraft-Überschusse p auftritt, so hat man nur zunächst aus der Gleichung (*b.*) den Werth f, und mit dessen Hülfe hierauf aus der Gleichung (ð.) den Werth μ, welcher jetzt durch μ' zu bezeichnen ist, zu bestimmen. — Was endlich in diesem dritten Falle die doppelten Werthe von f für einerlei $\Phi - \eta$, und die daraus hervorgehenden zweierlei Gleichgewichtszustände betrifft, so

ist deshalb zu bemerken, dafs in beiden Arten des Gleichgewichts der dabei auf die Zapfenlager ausgeübte Druck stets in entgegengesetzte Hälften ihres Umkreises fällt. Bei dem Gleichgewichtszustande nämlich, welcher aus den obern Zeichen entspringt, macht nach Nr. 8. die Richtung des Druckes S' mit der Richtung des Druckes S, wenn $\varphi - \eta = \pm 180°$ ist, den Winkel ν und zieht sich von da, während $\varphi - \eta$ alle übrigen zu möglichen Werthen von f führende Werthe annimmt, um 90° nach beiden Seiten hin; bei dem Gleichgewichtszustande hingegen, der aus den untern Zeichen hervorgeht, macht nach derselben Nummer die Richtung des fraglichen Druckes S' mit der bekannten Richtung des Druckes S, wenn $\varphi - \eta = \pm 180°$ ist, den Winkel $180° + \nu$, welche Richtung der vorigen, unter dem Winkel ν erscheinenden, gerade entgegengesetzt ist, und weicht von da, während $\varphi - \eta$ seine noch übrigen zum Gleichgewicht führenden Werthe durchläuft, ebenfalls um 90° nach beiden Seiten hin ab. Die verschiedenen Richtungen des Druckes S' beim Gleichgewichte nehmen sonach den ganzen Umkreis ein, dessen eine Hälfte die Richtungen des Druckes S' beim Gleichgewichte der einen Art, und dessen andere Hälfte die Richtung desselben Druckes beim Gleichgewichte der andern Art in sich aufnimmt. Denkt man sich also die Zapfenlager in der Richtung der Achse beliebig in zwei gleiche Hälften getheilt, so giebt es für einen und denselben Winkel $\varphi - \eta$ immer zwei Gleichgewichtszustände, von denen der eine den Druck auf die Zapfenlager in deren eine Hälfte, der andern hingegen in deren andere Hälfte wirft. Aus dieser Betrachtung geht hervor, dafs in dem dritten Fall stets ein Gleichgewichtszustand für jedes zuzulassende $\varphi - \eta$ herbei geführt werden kann, wenn gleich nur die eine Hälfte der cylinderförmigen Zapfenlager, und zwar in beliebiger Stellung, vorhanden ist, indem man die Art des Gleichgewichts jedesmal so wählen kann, dafs der Druck der Zapfen auf die Zapfenlager nach der Seite hin fällt, wo die gebliebene Hälfte der Zapfenlager dem Drucke zu widerstehen vermag. Gerade dadurch unterscheidet sich aber der dritte Fall von dem ersten und zweiten, in welchen beiden die Richtung des Druckes S' Änderungen erleidet, die sich in der Regel nur auf einen kleinen Theil des Umkreises beschränken, und selbst da, wo $\frac{\varrho}{d} \sin \nu = 1$ ist, erst einen halben Umkreis einnehmen.

10) So einfach die hier mitgetheilten Resultate auch sind, so will ich doch noch aus ihnen zu Gunsten der Ausübung Näherungs-Ausdrücke ableiten, die noch einfacher sind, und in den meisten Fällen der Anwendung hinreichende Genauigkeit geben *). So lange nämlich μ und $\frac{\varrho}{d}$ kleine Brüche sind, von denen der erstere die Zahl $\frac{1}{10}$ und der andere die Zahl $\frac{1}{12}$ nicht übersteigt, erreicht λ in keinem Falle einen halben Grad, wie man sich überzeugt, wenn man in der Gleichung $\sin\lambda = \frac{\varrho}{d}\sin\nu.\sin(\varphi-\eta)$ setzt: $\sin(\varphi-\eta)=\pm 1$, wobei λ seinen möglich gröfsten absoluten Werth erreicht. Ferner wird man finden, dafs bei den angezeigten Werthen von μ und $\frac{\varrho}{d}$ die Zahl f, da wo sie am gröfsten und am kleinsten ist, von der Einheit nicht mehr als höchstens um ein Hunderttheil sich unterscheide. Bei noch geringern Werthen von μ und $\frac{\varrho}{d}$ wird, wie man sogleich einsieht, diese gröfste Abweichung nur noch geringer. Hat man also bei der Bestimmung der Kräfte auf ein Procent derselben nicht zu achten, und sieht man bei Winkelbestimmungen nicht auf einen möglichen Irrthum von weniger als einem halben Grade, so ist es, so lange μ nicht gröfser als $\frac{1}{10}$ und $\frac{\varrho}{d}$ nicht gröfser als $\frac{1}{12}$ wird, wie fast in allen Fällen der Anwendung geschieht, gestattet, für die Gleichungen (*a.*), (*b.*) und (*c.*) folgende noch weit bequemere zu setzen:

$$(\alpha.)\quad S' = S,$$

$$(\beta.)\quad p = \mu\frac{\varrho}{d}S,$$

$$(\gamma.)\quad \varphi' = \varphi + \nu.$$

Die Gleichung (γ.) ist, wie wir gesehen haben, völlig genau, wenn $\varphi = 0$ oder $\varphi = \pm 180°$ ist, und die Gleichungen (α.) und (β.) werden an der Stelle völlig genau, wo $f=1$ wird. Dies geschieht, wie wir bald finden werden, jedesmal wenn $\pm\cos(\varphi-\eta) = \frac{1}{2}\mu\frac{d^2-\varrho^2}{\varrho.d}$ ist, und ist also nur

*) Man erhält eine sehr genaue Näherungsformel für f, wenn man in der Gleichung (δ.) das Glied unter dem Wurzelzeichen, welches von der vierten Dimension in Bezug auf μ und $\frac{\varrho}{d}$ ist, wegläfst. Eine solche Näherungsformel ist aber völlig überflüssig, weil die völlig genaue Berechnung von f nach den hier mitgetheilten Formeln wenigstens nicht mehr Umstände macht, als ein solcher Nothbehelf.

dann möglich, wenn $\frac{1}{2}\mu.(d+\varrho)(d-\varrho) \gtreqless \varrho.d$ ist. Bei dem Gebrauche der Gleichungen (α.), (β.) und (γ.) darf man jedoch nie vergessen, dafs sie nur in dem angezeigten Umfange der Werthe μ und $\frac{\varrho}{d}$ den genannten Grad der Genauigkeit behalten, dafs aber da, wo μ oder $\frac{\varrho}{d}$ Werthe annehmen, die der Einheit sich beträchtlich mehr nähern, oder sie wohl gar noch übertreffen, wie dies in aufsergewöhnlichen Fällen bei dem $\frac{\varrho}{d}$ allerdings geschehen kann, durchaus die Gleichungen (*a*.), (*b*.) und (*c*.) in Verbindung mit den Gleichungen (♀.) und (☿.) zur Untersuchung der beim Gleichgewichte unter Mitwirkung der Reibung Statt findenden Umstände zugezogen werden müssen, wenn man nicht Gefahr laufen will, von der Wahrheit ganz und gar abweichende Resultate zu erhalten. Häufig hat die Maschinenlehre bei ihren Bestimmungen blofs den Kraftzuwachs p zu wissen nöthig, und dann ist der aus der Gleichung (β.) hervorgehende mögliche Irrthum um so weniger zu fürchten, da seine absolute Gröfse, wegen des in dieser Gleichung vorhandenen Factors $\mu\frac{\varrho}{d}$, nie mehr als den 10000ten Theil des Druckes S ausmachen kann, vorausgesetzt dafs μ und $\frac{\varrho}{d}$ die ihnen hier angewiesenen Schranken nicht überschreiten.

11) Schon Euler in seiner *Theoria motus corp. solid. Suppl. Cap. III.* ist bei der Behandlung der Zapfenreibung von Gleichungen ausgegangen, welche im Wesentlichen mit den Gleichungen (*B*.), aus denen die ganze vorstehende Entwicklung hervorgegangen ist, übereinstimmen; aber die von mir erzielte Form der darans abgeleiteten Resultate ist von der gewöhnlichen so abweichend, dafs ich gerade deshalb vorstehende Untersuchung einer öffentlichen Bekanntmachung nicht unwerth gehalten habe. Jene Form macht es nicht nur leicht, aus den allgemein gültigen Gleichungen (*a*.), (*b*.) und (*c*.) die abgekürzten, aber demungeachtet noch in einem sehr grofsen Umfange brauchbaren Gleichungen (α.), (β.) und (γ.) abzuleiten, die da, wo die Kürze der Rechnung vorzugsweise beabsichtigt wird, mit Vortheil eintreten können; sondern, was noch wichtiger ist, sie deutet auch auf die Möglichkeit hin, dafs man bei der Berechnung von zusammengesetzten Maschinen die allgemeinen Formeln beibehalten könne, ohne dafs dadurch der Bau der Ausdrücke bedeutend vergröfsert, oder der Sinn ihrer Bestandtheile durch Einführung willkür-

licher Abkürzungszeichen verhüllt würde. In manchen Lehrbüchern der Maschinenlehre findet man Formeln unter nicht völlig genauen Voraussetzungen (vgl. Eitelwein's Statik. B. 1. S. 295. Anmerk. und §. 238.) entwickelt, welche in Hinsicht auf Annäherung an die volle Wahrheit mit den abgekürzten (α.), (β.) und (γ.) auf gleicher Stufe stehen, und ein Element mehr als diese in sich aufnehmen. Das Unbefriedigende in der Annahme, welche sich dergleichen Lehrbücher gestatten, besteht aber darin, dafs sie die Resultate der thätigen Kräfte p, P, P', P'', ... für die Gröfse des die Reibung erzeugenden Druckes nehmen; aber dieser Druck, der seiner Natur nach nothwendigerweise senkrecht gegen die Ebene, in welcher sich die Zapfen und Zapfenlager berühren, gerichtet sein mufs, kann nur aus Kräften hervorgehen, die unter sich im Gleichgewichte stehen, welches nicht bei den Kräften P, P', P'' ...., aber wohl bei den Kräften P, P', P'', ... der Fall ist. Nimmt man blofs diese letztern zur Bestimmung des Druckes und der daraus hervorgehenden Reibung, so hat man dabei allerdings die Reibung selbst und den Kraftzuwachs p vernachläfsigt, aber man erhält doch die Näherungsformeln (α.) und (β.), welche der Natur der Sache angemessener sind, und der Wahrheit im Allgemeinen noch eben so nahe, oft noch näher liegen, als die unter jener Voraussetzung sich ergebenden Gleichungen. Ein solches Schwanken in der Bedeutung des Wortes Druck scheint auch Poisson in seinem *Traité de Mécanique* (T. I. p. 182.), dessen Darstellung übrigens ganz auf denselben Grundlagen, wie die hier gegebenen, ruht, zu der Äufserung verleitet zu haben: „dafs die Reibung stets dazu beitrage, den Druck, welchen die Achse auszuhalten hat, zu vermindern." Poisson zieht nämlich diesen Schlufs aus der oben erhaltenen Gleichung

$$(1+\mu^2)S'^2 = S^2 + 2pS\cos(\varphi-\eta) + p^2,$$

deren rechte Seite nichts anders ist, als das Quadrat der aus den Kräften S und p, oder, was dasselbe ist, aus den Kräften p, P, P', P'', ... hervorgehenden Totalkraft. Bezeichnet man daher diese Resultante mit R, so verwandelt sich jene Gleichung in diese:

$$S' = \frac{R}{\sqrt{(1+\mu^2)}},$$

welche allerdings zu erkennen giebt, dafs S' stets kleiner als R ist, aber zu der von Poisson daraus gezogenen Folgerung nicht berechtigt, weil R nicht der Druck auf die Achse ist. Der aus der Kraft R ohne Zutritt der

Reibung hervorgehende Druck auf die Achse ist vielmehr S, derselbe nämlich, welcher aus den Kräften P, P', P'' .... ohne p hervorgeht, weil die Kraft p ohne Zutritt der Reibung in der That blofs auf Bewegung und nicht auf Druck verwendet werden wird; und der Annahme, dafs jederzeit $S' < S$ sein werde, wird durch die Gleichung (*a.*) in Verbindung mit der (♀.) oder (♂.) geradezu widersprochen, weil der Werth von f nach Umständen bald gröfser und bald kleiner als 1 werden kann.

12) Ehe ich nun zur Behandlung der losen Rolle übergehe, mufs ich zuvor eines Umstandes gedenken, der bei der Bestimmung der Reibung zweier Körper an einander, wenn jeder an sich beweglich ist, eine specielle Berücksichtigung verdient, und Ursache eines von dem gewöhnlichen etwas abweichenden Verfahrens bei solchen Bestimmungen wird.

Aus den in der ersten Nummer angeführten Beobachtungen und Schlüssen hat sich nämlich blofs ergeben, dafs zwei mit der Kraft S gegen einander gedrückte Körper einem gegenseitigen Verschieben derselben in der Richtung der Berührungs-Ebene widerstehen, und dafs, im Falle der eine von beiden Körpern unbeweglich ist, die Reibung jedes Bestreben zu einem solchen Verschieben des beweglichen Körpers auf dem unbeweglichen aufzuheben im Stande ist, so lange dieses Bestreben eine bestimmte, dem Drucke S proportionale Gröfse μS nicht übersteigt. Denken wir uns nun zwei durch gleiche und entgegengesetzte Kräfte von der Gröfse S an einander gepreſste Körper, von denen aber keiner durch irgend Widerstände anderer Art in seiner Fähigkeit, sich zu bewegen, noch neue Beschränkungen erleidet, und bringen wir an diese Körper in der Richtung der Reibungs-Ebene zwei einander gleiche und entgegengesetzte Kräfte, jede von der Gröfse Y, an, so werden diese Kräfte ein Verschieben der beiden Körper an einander beabsichtigen und auch in der That bewirken, wenn sie den Widerstand, welchen die Reibung einem solchen Verschieben entgegensetzt, zu überwinden im Stande sind.

Zuvörderst ist nun nicht schwer einzusehen, dafs der gröfste Werth von Y, bei welchem eben noch ein Auseinandergehen der beiden Körper verhindert wird, μS ist, derselbe nämlich, welcher in dem einen Körper wahrgenommen wird, wenn der andere unbeweglich ist; denn die hier thätig wirksame, gleich grofse Gegenkraft in dem zweiten beweglichen Körper, wird dort durch eine der Action an Stärke gleich kommende Reaction in der festen Unterlage vertreten. Die Summe der

durch die Reibung in beiden Körpern aufgehobenen Gegenkräfte kann also jedesmal bis zu dem Werthe $2\mu S$ ansteigen, aber diesen Werth nicht übersteigen.

Dieselbe Bestimmung des gesammten Reibungswiderstandes scheint zum Andern auch dann noch beibehalten werden zu müssen, wenn die beiden Körper, statt wie eben durch gleiche, jetzt durch ungleiche, aber der Richtung nach noch immer entgegengesetzte Kräfte X und Y zu einer Bewegung in der Richtung der Reibungs-Ebene nach entgegengesetzten Seiten angetrieben werden *). So lange nämlich die Summe der beiden Kräfte X und Y den Werth $2\mu S$ nicht übersteigt, wird auch kein Verschieben der beiden Körper an einander eintreten, sondern es wird eine blofse Vertheilung der Kräfte X und Y über beide Körper, auf ähnliche Weise, als wenn beide nur Theile eines und desselben festen Körpers wären, geschehen, welche eine, beiden Körpern gemeinsame Bewegung von solcher Gröfse, wie sie der zwischen beiden Kräften X und Y statt findende Unterschied nach sich zieht, zur Folge hat.

Die hier versuchte Behandlung der losen Rolle unterscheidet sich von der, so viel ich weifs, bisher allgemein üblichen gerade darin, dafs sie, der eben geschehenen Betrachtung gemäfs, als Bedingung des Nichtverschiebens zweier an sich beweglichen Körper an einander fordert, dafs die Summe der in beiden nach entgegengesetzten Seiten thätigen Kräfte X und Y den Werth $2\mu S$ nicht übersteige, aber über die Gröfse der einzelnen Kräfte X und Y selbst zum Voraus nicht verfügt, sondern diese Entscheidung lediglich der Rechnung überläfst. Es ist übrigens leicht einzusehen, dafs die Bedingung des Nichtverschiebens in einer noch allgemeinern, zu unserm Zwecke jedoch unnöthigen Form gegeben werden kann.

Der Kürze wegen wollen wir obige allgemeinere Bedingung des Nichtverschiebens zweier beweglicher Körper an einander immer dadurch bezeichnen, dafs wir sagen: das Maximum der Reibung $2\mu S$ kann mit einem beliebigen Theile in dem einen Körper auftreten, sich in ihn werfen und mit dem übrigen Theile in den andern Körper.

---

*) Dieses Gesetz, so wahrscheinlich man es auch finden mag, stelle ich doch nur problematisch hin, weil es in der That eine besondere Bestätigung durch Versuche verlangt, da zu ihm die noch wenig bekannten Gesetze der Vertheilung von Kräften aus einem Körper in den andern mittelst der Reibung sich gesellen.

13) Aufgabe 3. Über eine lose Rolle, deren Wände in verticaler Richtung schweben, ist ein Seil gezogen, dessen eines Ende an einer Stelle unverrückbar fest gemacht worden ist, und an diese Stelle ist mittelst Zapfen vom Halbmesser ϱ und Zapfenlagern *) eine vertical abwärts wirkende Last Q geknüpft, beide Enden des Seils aber wirken vertical aufwärts; man sucht die Bedingungen des Gleichgewichts unter Mitwirkung der Reibung im Maximo.

Auflösung. Da bei der in dieser Aufgabe vorkommenden Anordnung zwei verschiedene Theile auftreten, wovon jeder an sich beweglich ist, und in seiner Bewegung durch den andern nur vermöge des Zusammenhanges zwischen Zapfen und Zapfenlager gehemmt wird, so kann nach den allgemeinsten Regeln der Statik in der hier zu behandelnden Verbindung nur dann das Gleichgewicht vorhanden sein, wenn jeder Theil für sich in Folge der in ihm thätigen Kräfte und des Widerstandes, welcher ihm aus der Art seiner Verknüpfung mit dem andern Theile erwächst, im Gleichgewichte sich befindet. Nennen wir nun S den im Falle des Gleichgewichts zwischen Zapfen und Zapfenlagern sich bildenden, senkrecht gegen ihre gemeinschaftliche Berührungs-Ebene gestellten, und deshalb, weil wir hier cylinderförmige Zapfen und Zapfenlager voraussetzen, durch die Umdrehungs-Achse laufenden, gegenseitigen Druck, und φ den Winkel, welchen die Richtung dieses Druckes in der Rolle mit der Verticallinie macht, so ist $2\mu S$ der gröfste Werth für die zwischen Zapfen und Zapfenlagern sich bildende Reibung. Wäre einer von den beiden Theilen der hier behandelten Vorrichtung fest, so wäre die Hälfte μS der ganzen Reibung als widerstehende Kraft unbedenklich in den andern Theil zu legen; da aber hier beide Theile beweglich sind, so läfst sich nicht im Voraus schon angeben, ob die Reibung als widerstehende Kraft blofs in dem einen, oder blofs in dem andern, oder theils in dem einen und theils in dem andern Theile thätig sein werde; vielmehr mufs die Beantwortung dieser Frage eben erst aus der Natur unserer Aufgabe selbst hergeholt werden. Wir wollen daher den in der Rolle sich bildenden Theil der Reibung mit x bezeichnen, so ist nach dem, was schon oben in Nr. 12. auseinander gesetzt worden ist, $2\mu S - x$

*) Es ist für die Rechnung ganz gleichgültig, ob die Zapfen an der Rolle fest sind und sich in den mit der Last vereinten Zapfenlagern drehen, oder ob die Zapfenlager an der Rolle fest sind und sich um die mit der Last vereinten Zapfen drehen.

derjenige Theil der Reibung, welcher in dem mit der Rolle verknüpften Theile der Vorrichtung, an welchem die Last befestigt ist, wirksam, und dessen Richtung der des Theiles x gerade entgegen gesetzt ist, vorausgesetzt, dafs wir fortwährend nur den Fall, wo die Reibung in ihrem Maximo auftritt, vor Augen behalten. Nennen wir nun noch r den Halbmesser der Rolle, P und P' die auf beiden Seiten des um die Rolle geschlungenen Seils in diesem Seile thätigen Kräfte, von denen P die gröfsere sein soll, so wirken offenbar in dem Theile der ganzen Vorrichtung, welcher die Rolle ausmacht, erstlich die Kräfte P und P' vertical aufwärts und in der Entfernung r von der Umdrehungs-Achse, zweitens der durch die Umdrehungs-Achse gerichtete Druck S unter dem Winkel φ gegen die lothrechte Richtung, und endlich drittens noch die aus der Reibung hervorgehende Kraft x in der Entfernung des Zapfenhalbmessers ϱ von der Umdrehungs-Achse und in einer Richtung, die senkrecht auf der des Druckes S steht, und einem beabsichtigten Verschieben der Zapfen und Zapfenlager an einander gerade entgegenläuft. Das Gleichgewicht dieses Theils der Vorrichtung wird mithin, den bekanntesten Sätzen der Statik gemäfs, durch nachstehende Gleichungen bedingt: *)

$$1.\quad r(P-P') = \varrho x,$$
$$2.\quad S\,.\cos\varphi = P+P'-x\sin\varphi,$$
$$3.\quad S\,.\sin\varphi = x\cos\varphi,$$

wobei der Angriffspunct sowohl als der Winkel φ auf der Seite von der Verticalen liegend gedacht worden ist, auf welcher die überwiegende Kraft P liegt. Diese Annahme entspricht der Wirklichkeit. Die entgegengesetzte Annahme würde eine Änderung in den darauf Bezug nehmenden Vorzeichen veranlassen, dann aber die Rechnung selbst das Irrige der Annahme wieder gut machen.

In dem andern Theile der Vorrichtung, an der Stelle wo der Druck zwischen den Zapfen und ihren Lagern sich bildet, wirkt erstlich die Last Q, zweitens der Druck S, und endlich drittens der Theil $2\mu S - x$ der Reibung, in Richtungen, welche beziehlich denen der Kräfte

*) Man wird ohne mein Erinnern sogleich gewahr werden, dafs das Gewicht der Rolle blofs der Einfachheit halber aufser Acht gelassen worden ist; eben so ist blofs der Kürze halber r Halbmesser der Rolle genannt worden, obgleich dieser Buchstabe in der Rechnung die Entfernung de Kräfte P und P' von der Umdrehungs-Achse, d. h. den um die halbe Seildicke vergröfserten Halbmesser der Rolle vorzustellen hat.

P und P', des Druckes S und der Reibung x im vorigen Theile entgegengesetzt sind. Das Gleichgewicht in diesem andern Theile der Vorrichtung wird mithin, wenn man sich alle Kräfte an der gedachten Stelle in gerade entgegengesetzter Richtung genommen vorstellt, wodurch in der Sache nichts geändert wird, den Elementen der Statik gemäfs, durch nachstehende Gleichungen bedingt:

$$4.\quad S\cos\Phi = Q - (\mu S - x)\sin\Phi,$$
$$5.\quad S\sin\Phi = (2\mu - x)\cos\Phi,$$

wobei noch dieselbe Lage des Angriffspunctes, wie vorhin, vorausgesetzt worden ist.

Aus der 3ten und 5ten Gleichung erhält man sogleich

$$x = \mu S,$$

und nun aus der 2ten und 4ten

$$P + P' = Q$$

und aus der dritten

$$\text{tang}\,\Phi = \mu;$$

ferner folgt nun aus der 2ten, mit Zuziehung der für x und $P+P'$ gefundenen Werthe,

$$S = \frac{Q}{\cos\varphi + \mu\sin\varphi},$$

oder, wenn man für μ den Werth $\text{tang}\,\Phi$ setzt und zusammenzieht,

$$S = Q\cos\Phi.$$

Dadurch verwandelt sich der vorhin für x gefundene Werth in folgenden:

$$x = \mu Q\cos\Phi,$$

und mittelst dieses Werthes erhält man aus der 1sten Gleichung:

$$P - P' = \mu\frac{\varrho}{r}Q\cos\Phi.$$

Aus den für $P+P'$ und $P-P'$ gefundenen Werthen fliefst nun:

$$P = \tfrac{1}{2}Q\left(1 + \mu\frac{\varrho}{r}\cos\Phi\right),\quad P' = \tfrac{1}{2}Q\left(1 - \mu\frac{\varrho}{r}\cos\Phi\right).$$

Da übrigens $\text{tang}\,\Phi = \mu$, so wird $\cos\Phi = \frac{1}{\sqrt{(1+\mu^2)}}$; setzt man daher den bekannten Werth $\frac{1}{\sqrt{(1+\mu^2)}} = f$, so gehen obige, für Φ, S, x, P und P' gefundenen Werthe über in:

$$\text{tang}\,\Phi = \mu,\quad S = fQ,\quad x = \mu f.Q,$$
$$P = \tfrac{1}{2}Q\left(1 + \mu f\frac{\varrho}{r}\right),\quad P' = \tfrac{1}{2}Q\left(1 - \mu f\frac{\varrho}{r}\right),$$

welche alle einzelnen Fragepuncte der vorgelegten Aufgabe beantworten

Die gesuchten Bestimmungsstücke hängen hier von der Zahl f auf ähnliche Weise ab; wie die in Aufgabe 2. gefundenen von der dortigen Zahl f, und eine ganz einfache Betrachtung giebt auch hier zu erkennen, dafs wenn μ den Werth $\frac{1}{10}$ nicht übersteigt, wie dies unter den gewöhnlichen Umständen stets der Fall ist, so kann man $f = 1$ setzen, ohne dafs daraus in den einzelnen Angaben ein Fehler hervorgehen könnte, der mehr als 1 Procent betrüge. Eine Unrichtigkeit von so geringer Gröfse ist aber kaum in irgend einem Falle der Anwendung in Anschlag zu bringen, weshalb fast ohne Ausnahme obige Formeln noch dadurch verkürzt werden können, dafs man die Zahl f aus ihnen ganz wegläfst.

14) Da beim Gleichgewichte ohne Reibung $P = P' = \frac{1}{2}Q$ ist, so drückt $\frac{1}{2}\mu\frac{\varrho}{r}fQ$ offenbar die durch die Reibung veranlafste Änderung in jeder der Kräfte P und P' aus, welche in der einen eine Vermehrung, in der andern dagegen eine Verminderung bewirkt. Eine weitere Zergliederung zeigt, wie dieses und alle übrigen Resultate unter sich vollkommen übereinstimmen. So ist in Folge unserer Behandlung nicht blofs der gegenseitige Druck, sondern auch die Reibung in beiden Theilen der Vorrichtung der Gröfse nach gleich und der Richtung nach entgegengesetzt; wenn man sich daher, was schon bei existirendem Gleichgewichte stets erlaubt ist, alle einzelnen Theile des Systems zu einem festen Ganzen verbunden vorstellt, so mufs dieses Ganze nothwendigerweise blofs durch die unter sich parallelen Kräfte P, P' und Q im Gleichgewichte erhalten werden, es mufs also sein $P + P' = Q$, wie in der That der Fall ist, und die Momente aus den Kräften P und P' in ihre Entfernungen vom Unterstützungspuncte müssen noch aufserdem einander gleich sein. Dies letztere läfst sich aber so zeigen. Weil nämlich r die Entfernung der Kräfte P und P' von der Umdrehungs-Achse bezeichnet, und der durch den Angriffspunct gezogene Radius mit der Verticallinie auf der Seite der überwiegenden Kraft P den Winkel Φ bildet, so ist $\varrho \sin\Phi$ die Entfernung des Angriffspunctes von der Verticallinie auf derselben Seite, und als Folge $r - \varrho\sin\Phi$ die Entfernung der Kraft P, so wie $r + \varrho\sin\Phi$ die Entfernung der Kraft P' von dem Angriffspuncte; die vorhin erwähnten Momente sind also:

$$P(r - \varrho\sin\Phi) \quad \text{und} \quad P'(r + \varrho\sin\Phi).$$

Aus $\text{tang}\Phi = \mu$ erhält man aber $\sin\Phi = \frac{\mu}{\sqrt{(1+\mu^2)}}$, oder $\sin\Phi = \mu f$.

Setzt man diesen Werth für $\sin\varphi$ in die eben erhaltenen Ausdrücke der beiden Momente, so werden diese:

$$rP\left(1-\mu\frac{\varrho}{r}f\right) \quad \text{und} \quad rP'\left(1+\mu\frac{\varrho}{r}f\right),$$

und es zeigt sich nun auf der Stelle, dafs diese Momente einander gleich sind, und dafs sonach alle Bedingungen des Gleichgewichts in der als ein festes Ganze betrachteten Vorrichtung erfüllt sind, wenn man nur noch für P und P' ihre vorhin gefundenen Werthe setzt.

Die hier erhaltenen Resultate weichen von den auf gewöhnlichem Wege erhaltenen nicht ab, weil die in ihnen vorkommenden Bedingungen eine gleiche Vertheilung der Reibung über beide Theile der Vorrichtung nach sich ziehen; um daher über die eigentliche, bei ungleicher Vertheilung sich erst recht hervorhebende Function der Reibung in der losen Rolle noch gröfseres Licht zu verbreiten, und zugleich um den Grund einer bei dem Gebrauche dieser Vorrichtung stets wahrzunehmenden Seitenbewegung klar nachzuweisen, will ich an die vorige Aufgabe noch folgende damit verwandte anreihen.

15) Aufgabe 4. Es bleibe alles noch ganz so wie in der vorigen Aufgabe, nur mit dem Unterschiede, dafs die beiden Enden des Seils jetzt nicht mehr vertical aufwärts, sondern, zwar noch unter sich parallel, aber in einer Richtung wirken sollen, die mit der Verticallinie einen gegebenen Winkel α bildet; man soll in diesem Falle die Bedingungen des Gleichgewichts mit Zuziehung der Reibung im Maximo angeben.

Auflösung. Stellt man bei dieser Auflösung dieselben Betrachtungen an, wie in der vorhergehenden, und behält man alle dortigen Bezeichnungen auch hier noch in demselben Sinne bei, so erhält man auf eine ganz ähnliche Weise, als Bedingungen des Gleichgewichts für den Theil der Vorrichtung welcher die eigentliche Rolle ausmacht, folgende Gleichungen:

$$1.\quad (P-P')r = \varrho x,$$
$$2.\quad S\cos\Phi = (P+P')\cos\alpha - x\sin\Phi,$$
$$3.\quad S\sin\Phi = (P+P')\sin\alpha + x\cos\Phi,$$

und für den andern Theil der Vorrichtung folgende:

$$4.\quad S\cos\Phi = Q - (2\mu S - x)\sin\Phi,$$
$$5.\quad S\sin\Phi = (2\mu S - x)\cos\Phi.$$

Um in den Gliedern, worin Theilkräfte der Reibung vorkommen, ein doppeltes Vorzeichen zu vermeiden, ist festgesetzt worden, dafs die Reibung stets unter dem Winkel $\Phi + 90°$ auftritt, welches darauf hinausläuft, alle Winkel nach der Seite hin zu zählen, nach welcher die Rolle von der Reibung zu einer Drehung angereizt wird. Diese Anordnung in der Art die Winkel zu beziehen, ist dieselbe, welche schon in Aufgabe 2. gebraucht worden ist, und läfst sich hier wie dort jedesmal aus den unmittelbaren Angaben der Aufgabe noch vor aller Rechnung leicht ins Werk setzen.

Aus der 2ten und 3ten dieser Gleichungen erhält man durch Elimination der Gröfse x:

$$S = (P + P') \cos(\alpha - \Phi),$$

und aus der 4ten und 5ten durch Elimination von $\mu S - x$:

$$\text{I.} \quad S = Q \cos \Phi,$$

woraus ferner folgt:

$$\text{II.} \quad P + P' = Q \frac{\cos \varphi}{\cos(\alpha - \varphi)};$$

sodann erhält man aus der 5ten Gleichung, mit Zuziehung des für S gefundenen Werthes,

$$\text{III.} \quad x = Q(2\mu \cos \Phi - \sin \Phi),$$

und aus der ersten Gleichung, mit Berücksichtigung des eben für x gefundenen Werthes:

$$\text{IV.} \quad P - P' = \frac{\varrho}{r} Q(2\mu \cos \Phi - \sin \Phi).$$

Durch Addition der 3ten und 5ten Gleichung erhält man

$$2S \sin \Phi = (P + P') \sin \alpha + 2\mu S \cos \Phi;$$

setzt man aber in diese Gleichung für S und $P + P'$ ihre eben erhaltenen Werthe, so ergiebt sich

$$2(\sin \Phi - \mu \cos \Phi) \cos(\alpha - \Phi) = \sin \alpha,$$

aus der der Winkel Φ in folgender Weise sich bestimmen läfst. Führt man nämlich einen Winkel ν von der Beschaffenheit ein, dafs $\tang \nu = \mu$, so verwandelt sich vorstehende Gleichung in folgende:

$$2 \sin(\Phi - \nu) \cos(\alpha - \Phi) = \sin \alpha . \cos \nu,$$

und diese geht, nach einer bekannten trigonometrischen Formel, über in:

$$\sin(\alpha - \nu) + \sin(2\Phi - \alpha - \nu) = \sin \alpha \cos \nu,$$

woraus sich nun, nachdem $\sin(\alpha - \nu)$ entwickelt worden ist, sofort ergiebt:

$$\text{V.} \quad \sin(2\Phi - \alpha - \nu) = \cos \alpha \sin \nu.$$

Hat man nun erst aus der letzten Gleichung (V.) den Winkel Φ gefunden, so dienen dann die Gleichungen (I.), (II.), (III.) und (IV.) zur Bestimmung aller noch übrigen unbekannten Stücke der Aufgabe. Die Gleichung (V.) geht, was auch die Natur der Sache verlangt, für $\alpha = 0$ in die entsprechende Gleichung der vorigen Aufgabe, nämlich in die Gleichung $\text{tang}\Phi = \mu$ über; denn für $\alpha = 0$ verwandelt sich die Gleichung (V.) in $\sin(2\Phi - \nu) = \sin\nu$, woraus erstlich $\Phi = \nu$ und dann auch $\text{tang}\Phi = \text{tang}\nu = \mu$ folgt. Nachdem man diesen Übergang erkannt hat, hält es nicht mehr schwer, einzusehen, dafs unter derselben Voraussetzung auch die Gleichungen (I.), (II.), (III.) und (IV.) in die analogen der vorigen Aufgabe übergehen.

16) Aus den hier erhaltenen Resultaten lassen sich einige nicht uninteressante Folgerungen ziehen, die wir nicht aufser Acht lassen wollen. Da nämlich der Werth x seiner Natur nach nicht über die Grenzen 0 und $2\mu S$ hinaus fallen kann, so folgt aus der Gleichung (III.) in Verbindung mit der (I.), dafs $2\mu - \text{tang}\Phi$ nicht über die Grenzen 0 und 2μ, oder $\text{tang}\Phi$ über die Grenzen 2μ und 0 hinaus fallen können. Da wo $\text{tang}\Phi = 2\mu$, ist $x = 0$, und wo $\text{tang}\Phi = 0$, da ist $x = 2\mu S$; im erstern Falle liegt also von der Reibung gar nichts in der Rolle, sondern alle in dem mit der Last vereinten Theile, im andern Falle hingegen liegt die ganze Reibung in der Rolle und nichts davon in jenem Theile der Vorrichtung. Um nun die Werthe zu finden, welche an jenen Grenzen dem Winkel α im Zustande des Gleichgewichts entsprechen, müssen wir die Gleichung (V.) nach α auflösen. Dadurch erhält man:

$$\text{tang}\alpha = \frac{2\,\text{tang}\,\varphi - 2\,\text{tang}\,\nu}{1 - \text{tang}\,\varphi\,(\text{tang}\,\varphi - 2\,\text{tang}\,\nu)},$$

oder, wenn man für $\text{tang}\nu$ ihren Werth μ setzt:

$$\text{tang}\alpha = \frac{2\,\text{tang}\,\varphi - 2\mu}{1 - \text{tang}\,\varphi\,(\text{tang}\,\varphi - 2\mu)}.$$

Mit Hülfe dieser Gleichung findet man nun, dafs an der Grenze, wo $\text{tang}\Phi = 2\mu$ ist, $\text{tang}\alpha = 2\mu$ werde, und dafs an der Grenze, wo $\text{tang}\Phi = 0$ ist, $\text{tang}\alpha = -2\mu$ sei. Es erhellet aus dieser Betrachtung, dafs an der losen Rolle die Last Q mit den Kräften P und P', bei gar verschiedener Lage der Enden des Seils gegen die Verticallinie, unter sich im Gleichgewichte sich befinden könne; jedesmal nämlich, so lange der Winkel α, welchen die Richtung des Seils diesseits oder jenseits der Verticallinie

mit dieser macht, nicht so grofs wird, dafs seine Tangente den Werth 2μ übersteigt. Der Unterschied in diesen verschiedenen Gleichgewichtszuständen ist blofs darin begründet, dafs die Reibung $2\mu S$ in jedem auf eine andere Weise sich über die Zapfen und Zapfenlager vertheilt, und an den Grenzen, wo $\text{tang}\alpha = \pm 2\mu$ wird, liegt die Reibung entweder ganz in den Zapfen, oder ganz in den Zapfenlagern. Eine genaue Berücksichtigung der Art und Weise, wie die Beziehung der Winkel in dieser Auflösung festgesetzt worden ist, giebt zu erkennen, dafs wenn man sich so vor die Ebene, worin die wirkenden Kräfte liegen, sich hingestellt denkt, dafs die überwiegende Kraft P der schwächer wirkenden P' zur Rechten liegt, und nun den Gleichgewichtszustand in's Auge fafst, wobei die beiden Enden des Seils zur Linken von der durch ihren obersten Punct gehenden Verticallinie abweichen, und mit dieser einen Winkel machen, dessen Tangente $= 2\mu$ ist, so ist auch $\text{tang}\Phi = 2\mu$, d. h. der Druck S erzeugt sich in einer mit den Enden des Seils parallelen Richtung, und die Reibung $2\mu S$ liegt dann ganz und gar in dem Theile der Vorrichtung, durch den die Last Q mit der Rolle zusammenhängt; fafst man dagegen den Gleichgewichtszustand in's Auge, wo die Enden des Seils zur Rechten von der durch ihren obersten Endpunct laufenden Verticallinie abweichen und mit dieser einen Winkel bilden, dessen Tangente $= 2\mu$ ist, so ist in diesem Falle $\text{tang}\Phi = 0$, d. h. der Druck S zwischen den Zapfen und ihren Lagern bildet sich in verticaler Richtung, und die dann horizontal wirkende Reibung $2\mu S$ hat jetzt ganz und gar ihren Sitz in der Rolle. Beziehen wir daher die jedesmalige Gleichgewichtslage der Vorrichtung auf die durch den Aufhängepunct der Enden des Seiles gehende Verticallinie und nennen Lage A jede nicht lothrechte, wobei das Ende des Seils, woran die gröfsere Kraft P wirket, nach aufsen gekehrt ist, Lage B dagegen diejenige, wobei dasselbe Ende des Seils nach innen gekehrt ist, so hat sich aus der bisherigen Untersuchung ergeben:

1. dafs mit der äufsersten Lage A ein verticaler Druck S und der Sitz der vollen Reibung $2\mu S$ in der Rolle, verknüpft sei;
2. dafs mit der äufsersten Lage B ein mit den Enden des Seils paralleler Druck S, und der Sitz der vollen Reibung $2\mu S$ in dem mit der Rolle verbundenen Theile, woran die Last wirkt, verknüpft sei;
3. endlich dafs, was bereits in der vorigen Aufgabe erwiesen worden

ist, bei einer Lage, welche zwischen den äufsersten Lagen A und B gerade das Mittel hält (d. h. wobei die Enden des Seils vertical herabhängen), der Druck S sich in einer Richtung erzeugt, die mit der Verticallinie einen Winkel bildet, dessen Tangente $= \mu$ ist, und dafs in diesem Falle die Reibung $2\mu S$ sich in gleichen Theilen auf die Zapfen und deren Lager vertheilt.

17) Aus Vorstehendem läfst sich nun leicht der Umfang angeben, innerhalb welches Veränderungen im Gleichgewichtszustande der losen Rolle eintreten können, und zugleich die Function nachweisen, welche dabei jedesmal die Reibung auf sich nimmt. Stellen wir uns nämlich die mit einer losen Rolle durch Zapfen und Zapfenlager verbundene Last frei schwebend und die ganze Vorrichtung in ihrem natürlichen Gleichgewichtszustande vor, wobei jedes Ende des Seils die halbe Last Q trägt, der Druck gegen Zapfen und Zapfenlager in verticaler Richtung geschieht, und die Reibung Null ist, weil sie durch keine Ursache zur Thätigkeit aufgefordert wird, und dafs z. B. dem unbefestigten Ende des Seils eine Überwucht von solcher Gröfse mitgetheilt werde, dafs zwar mit Zuziehung der Reibung dadurch noch kein Verschieben zwischen den Zapfen und ihren Lagern eintreten kann, aber doch die Reibung veranlafst wird, sich bis an ihr Maximum hinauf zu steigern; so wird die Reibung im ersten Augenblicke angewiesen, ihre ganze Thätigkeit blofs in die Rolle zu werfen, weil im ersten Augenblicke aller Trieb zur Bewegung blofs in der Rolle erweckt wird. Und weil überdies der Druck zwischen den Zapfen und ihren Lagern in verticaler Richtung geschieht, so wird die äufserste Lage A diejenige sein, welche unter solchen Umständen der ganzen Vorrichtung ihrer Natur nach zukommt. Auch wird in der That unter den obwaltenden Umständen die ganze Vorrichtung angetrieben werden, jene äufserste Lage A einzunehmen, und sie müfste sich auch wirklich in Folge der in horizontaler Richtung auftretenden und nur nach jener Seite hinstrebenden Reibung in Bewegung setzen, um die entsprechende Stellung einzunehmen, wenn sich einer solchen Bewegung nicht die mit der losen Rolle stets verknüpfte pendelartige Beschaffenheit der ganzen Vorrichtung entgegensetzte. Durch die pendelartige Natur der ganzen Vorrichtung aber wird die gedachte Bewegung blofs in ein Verrücken des Angriffspunctes und in eine damit verbundene Änderung in der Richtung des Druckes um-

gewandelt, so lange bis der in Aufgabe 3. abgehandelte Gleichgewichtszustand eingetreten ist; dann aber ist auch eine gleichförmige Vertheilung der Reibung, welche im ersten Augenblicke blofs auf die Rolle sich hinzuwerfen gezwungen war, über die Zapfen und Zapfenlager bereits geschehen. Es ist übrigens leicht einzusehen, dafs bei einem plötzlichen Eintritte der Überwucht, und noch mehr bei fortdauernder Veranlassung dazu, wie dies z. B. bei einem stetigen Heben der Last der Fall wäre, auch eine wirkliche Seitenbewegung beginnen, und im letztern Falle auch eine bleibende, der äufsersten Lage A mehr oder weniger sich annähernde Stellung der ganzen Vorrichtung eintreten müsse. Die Gröfse des Winkels α, unter welchem sich die ganze Vorrichtung bei einem ununterbrochenen, gleichförmigen Heben der Last einstellt, hängt, wie man sogleich gewahr wird, nicht blofs von der Gröfse des Reibungscoëfficienten, sondern auch von der Geschwindigkeit, womit die Bewegung geschieht, ab. Das Problem der losen Rolle ist nämlich im Allgemeinen, so lange der Winkel α noch unbestimmt bleibt, eine unbestimmte Aufgabe; diese Unbestimmtheit verschwindet jedoch, sobald das Problem nicht mehr zur Statik, sondern zur Mechanik gerechnet wird, weil dann die Art, wie sich die Reibung über beide Theile der Vorrichtung vertheilt, aus der Natur der die Bewegung bewirkenden Kräfte erkannt werden kann.

Für den Fall, wo die Last Q an der losen Rolle durch Menschen, ruckweise in die Höhe gezogen wird, ergeben sich noch aus obigen Betrachtungen folgende besondere Bemerkungen. Wenn nach geschehenem ersten Zuge durch die Menschen die ganze Vorrichtung in eine Lage A, die mehr oder weniger der äufsersten Lage A sich annähern kann, gekommen ist, und nun nach aufgehobener Anziehung des Seils die ganze Vorrichtung sich selber überlassen bleibt, so wird sie, gleich einem Pendel, wiewohl in verwickelterer Art, Schwingungen eingehen, und so lange sie sich selber überlassen bleibt, abwechselnd in Lagen A und in Lagen B kommen. Je nachdem nun der zweite Zug durch Menschen in einer oder in der andern von diesen Lagen geschieht, wird der Erfolg ein anderer sein. Geschieht nämlich der zweite Zug in dem Augenblicke, wo die Vorrichtung bei ihren Schwingungen ihre höchste Lage A erreicht hat, so wird während des Zuges der Gang der Schwingungen verzögert, und zugleich die gröfste Kraft zur Hervorbringung einer und derselben Hebge-

schwindigkeit erfordert werden. Geschieht aber der zweite Zug in dem Augenblicke, wo die Vorrichtung während ihrer Schwingungen die höchste Lage *B* erreicht hat, so ist an dieser Stelle zur Hervorbringung derselben Hebgeschwindigkeit der geringste Kraft-Aufwand erforderlich; zugleich wird aber auch der Gang der Schwingungen beschleunigt und ihr Umfang vergröfsert werden. Geschieht endlich der zweite Zug in dem Augenblicke, wo die Vorrichtung ihre natürliche Stellung eingenommen hat, in welcher nämlich die Seile vertical herabhängen, so ist zur Hervorbringung derselben Geschwindigkeit eine mittlere Kraft erforderlich, wie sie dem in Aufgabe 3. behandelten Gleichgewichtszustande entspricht, und der Gang sowohl als der Umfang der Schwingungen wird dabei entweder aufgehoben oder erhöhet, je nachdem die Vorrichtung aus Lagen *A* oder aus Lagen *B* in die bezeichnete Stellung zur Zeit des zweiten Zuges gekommen war.

Indem ich die Betrachtung der losen Rolle hier schon fallen lasse, geschieht es in der Hoffnung, dafs der blofse Versuch zu einer vollständigern Theorie der an dieser interessanten Vorrichtung sich zeigenden, mannigfaltigen Erscheinungen und zu einer gründlichern Bearbeitung des Gegenstandes Anlafs geben werde.

4.

Recherches sur la figure et le mouvement d'une bulle d'air, dans un liquide de densité constante; question proposée par l'académie Royale de Bruxelles pour le concours de 1828.

(Par Mr. *Theremin*, Capitaine du génie des voies de communications à Ircoutsk en Sibérie.)

1ère Partie. Recherches sur la figure de la bulle.

Pour déterminer la figure de la bulle, il faudrait pouvoir la considérer dans l'état de repos; or, cet état est impossible, si la bulle n'est pas capillaire, car, la densité de l'air étant fort petite comparativement à celle de presque tous les liquides connus, la force qui tendra à faire monter la bulle, sera toujours plus grande que la cohésion des molécules liquides, à moins que les dimensions de la bulle n'éxèdent pas le rayon de la sphère d'activité de la force de cohésion.

Pour pouvoir considérer la bulle dans l'état de repos, nous pouvons faire une hypothèse, qui est d'ailleurs permise: c'est d'imaginer que le liquide soit lui même en mouvement, et que ce mouvement soit égal et directement opposé à celui que la bulle aurait en montant dans le liquide librement en vertu de la différence de densité, et sans aucune vitesse initiale. Il est bien évident que cette hypothèse ne change absolument rien à la figure de la bulle, et nous permet seulement de la considérer dans l'état de repos, ce qui facilite l'abord de la question.

Cela posé, prenons pour plan de xy, le plan horizontal tangent à la partie inférieure de la bulle, et pour axe des ordonnées verticales, z, l'axe de révolution de la bulle (car il est évident que la surface de la bulle sera de révolution), nommons h la hauteur du liquide au dessus du plan des xy, en un instant quelconque t, alors, la pression correspondante à une ordonnée z, sera, pour l'unité de surface:

$$g.D.(h-z),$$

g étant la pesanteur, et D représentant la densité du liquide.

Si l'on nomme ∂A un élément de la surface de la bulle, ayant pour projection sur le plan horizontal le rectangle infiniment petit $\partial x.\partial y$, l'expression de la pression du liquide sur cet élément sera:

$$\partial x.\partial y.g.D.(h-z),$$

que nous représenterons, pour abréger, par p.

Supposons que la bulle à l'instant t, où nous la considérons, ait la figure qui lui convient pour l'état d'équilibre entre les pressions des élémens de sa surface, supposons dis-je pour un instant infiniment petit, que sa surface devienne solide, éxcepté en deux quelconques de ses élémens ∂A et $\partial A'$: il est bien évident que cette hypotèse ne change rien à la nature de la question, et que puisque la surface est celle qui convient à l'équilibre, cet équilibre devra continuer à subsister entre les pressions p et p' des deux élémens ∂A et $\partial A'$, pour lesquels la surface ne se serait pas solidifiée.

Pour exprimer l'équilibre entre les pressions p et p', le principe d'égalité de pression donnera:

$$1. \quad \frac{p}{p'} = \frac{\partial A}{\partial A'}.$$

Quoique le principe d'égalité de pression ne soit vrai, que pour le cas où le fluide intérieur seroit non pesant, nous pouvons cependant en faire usage ici, puisque par l'hypotèse du mouvement du liquide et du repos de la bulle, nous transmettons au liquide l'effet de la pesanteur de l'air de la bulle, et parconséquent nous pouvons pour un instant considérer la bulle comme non pesante.

Si les deux élémens ∂A et $\partial A'$ sont contigus, nous aurons:

$\partial A' = \partial A + \partial^2 A$, et de même la pression p' sera $p' = p + \partial p$,

valeurs qui étant mises dans l'équation (1.) donnent:

$$p\partial A + p\partial^2 A = p\partial A + \partial p.\partial A.$$

ou simplement, en supprimant $p\partial A$ de part et d'autre:

$$2. \quad p\partial^2 A = \partial p.\partial A.$$

Comme p et ∂A sont fonctions de z, x, y, il s'en suit que l'équation (2.) exprime une propriété de la surface de la bulle, et peut servir conséquemment à déterminer la nature de cette surface. Observons avant tout que la surface de la bulle est fermée, et de révolution par rapport à l'axe de z, nous aurons pour l'expression de cette surface une équation de la forme:

$$z = B \pm F(\sqrt{(x^2+y^2)}),$$

B étant une constante, et F exprimant une fonction quelconque de $\sqrt{(x^2+y^2)}$; or le signe supérieur appartient à l'ordonnée de le surface supérieure, et l'inférieur à la portion de surface, inférieure au plan horizontal $z = B$; il suit de ceci, que ∂z aura aussi le double signe $\pm$, et parconséquent l'accroissement ∂p de la pression devra avoir aussi le double signe, puisque $\partial p = -g.D.\partial x.\partial y.\partial z$, comme on peut facilement le déduire de l'expression de p, avec la seule différence qu'il faut prendre le signe $+$ pour la surface inférieure et le signe $-$ pour la surface supérieure, quand il s'agit de l'accroissement ∂z de l'ordonnée, et les signes en sens inverses pour l'accroissement ∂p de la pression; ainsi, l'équation (2.)

$$p.\partial^2 A = \partial p.\partial A$$

est celle de la surface supérieure, et l'équation:

$$3.\quad p.\partial^2 A = -\partial p.\partial A$$

celle de la surface inférieure de la bulle.

Examinons d'abord l'équation (3.); pour cela, faisant passer le second membre dans le premier, on aura évidemment l'expression de la différentielle du produit $p.\partial A$; or si

$\partial(p.\partial A) = 0$, on aura nécessairement $p.\partial A =$ constante.

Pour déterminer la constante, mettons au lieu de p, sa valeur $\partial x.\partial y.g.D(h-z)$ et au lieu de ∂A sa valeur connue $\partial x.\partial y\sqrt{(1+q^2+q'^2)}$, q et q' exprimant ici les coëfficiens différentiels partiels de z pris par rapport à x et à y, et on aura:

$$\partial x^2.\partial y^2.g.D(h-z)\sqrt{(1+q^2+q'^2)} = \text{constante.}$$

Or, il est évident que pour le plan horizontal nous aurons à la fois $Z = 0$, $q = 0$, $q' = 0$, d'où l'on tire:

$$\partial x^2.\partial y^2.g.Dh = \text{constante,}$$

valeur qui étant mise dans l'équation ci dessus la change, en simplifiant, en

$$(h-z)\sqrt{(1+q^2+q'^2)} = h,$$

que l'on peut mettre sous la forme:

$$4.\quad \frac{h-z}{h} = \frac{1}{\sqrt{(1+q^2+q'^2)}}.$$

Or on sait que $\frac{1}{\sqrt{(1+q^2+q'^2)}}$ est l'expression du cosinus de l'angle que le plan tangent fait avec le plan des x, y, ou bien de l'angle que la normale fait avec l'axe des z. Ainsi ce cosinus étant ici $\frac{h-z}{h}$, il est évident que l'équation (4.) représente une sphère de rayon h.

Pour intégrer l'équation (2.), c'est-à-dire celle de la surface supérieure, mettons pour p et ∂A leurs valeurs ci dessus, et pour $\partial^2 A$ la quantité:

$$\frac{q\,\partial q + q'\,\partial q'}{\sqrt{(1+q^2+q'^2)}}.\partial x.\partial y,$$

nous aurons, après les réductions:

$$\frac{(h-z).(q\,\partial q + q'\,\partial q')}{\sqrt{(1+q^2+q'^2)}} = -\partial z.\sqrt{(1+q^2+q'^2)};$$

or, si l'on multiplie chaque membre par $\frac{2}{(h-z)\sqrt{(1+q^2+q'^2)}}$, on aura en intégrant:

$$+\log(1+q^2+q'^2) = +\log(h-z)^2 + \text{constante.}$$

Mais en nommant a la hauteur de la bulle au dessus du plan des xy, on aura à la fois pour ce point culminant: $z=a$, $q=0$, $q'=0$, ainsi

$$\text{constante} = -\log(h-a)^2,$$

d'où, parconséquent:

$$\log(1+q^2+q'^2) = \log\left(\frac{h-z}{h-a}\right)^2,$$

et enfin, en passant des logarithmes aux nombres:

$$5.\quad 1+q^2+q'^2 = \left(\frac{h-z}{h-a}\right)^2$$

pour l'équation différentielle de la surface supérieure de la bulle.

Si l'on pose à la fois $y=0$ et $q'=\frac{\partial z}{\partial y}=0$, l'équation (5.) se réduira à celle de la génératrice plane sur le plan des xz; cette équation sera:

$$6.\quad 1+\frac{\partial z^2}{\partial x^2} = \left(\frac{h-z}{h-a}\right)^2,$$

qui nous conduit d'abord à une propriété très remarquable de la surface. Pour le démontrer prenons d'abord $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, nous aurons:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{(h-z)}{(h-a)^2};$$

or, nous savons que le rayon de courbure a pour expression: $\varrho = \frac{\left(1+\frac{\partial z^2}{\partial x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}$,

donc, en mettant les valeurs de $1+\frac{\partial z^2}{\partial x^2}$ et de $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ dans ϱ, on aura:

$$\varrho = -(h-z)^2.(h-a).$$

Mais si l'on observe que la pression P correspondante à la hauteur de liquide $h-z$ a pour expression $P=g.D(h-z)$, il viendra, en élimi-

nant $(h-z)$ entre P et ϱ,

$$7.\quad \varrho = -\frac{(h-a)}{g^2 D^2}.P^2,$$

ce qui prouve que le rayon de courbure de la partie supérieure de la bulle est proportionnel à la seconde puissance de la pression exercée par le fluide sur la bulle, au point correspondant. Ce résultat est d'autant plus remarquable, que si l'on eut voulu déterminer la surface de la bulle suivant une hypothèse, la seule hypothèse permise eut été de supposer le rayon de courbure proportionnel à une puissance quelconque de la pression.

En tirant ∂x de l'équation (6.) et intégrant, il vient:

$$\pm x = (h-a)\log\left[\frac{h-z}{h-a} + \sqrt{\left(\left(\frac{h-z}{h-a}\right)^2 - 1\right)}\right] + \text{Const.}$$

or, si $x=0$, on a $z=a$, donc $0=$ constante, et

$$8.\quad \pm x = (h-a)\log\left[\frac{h-z}{h-a} + \sqrt{\left(\left(\frac{h-z}{h-a}\right)^2 - 1\right)}\right]$$

est l'équation de la génératrice plane de la surface supérieure, et pour avoir l'équation de la surface elle même, il suffit de remplacer x par le radical $\sqrt{(x^2+y^2)}$. Quoique l'équation de la génératrice ne soit pas constructible, il est facile de voir que ce sera une courbe très peu convexe, puisque le rayon de courbure est très grand, et varie très peu d'un point à l'autre de la surface, à moins que h ne soit fort petit par rapport à a; on pourra même remplacer par approximation la surface supérieure par une calotte sphérique dont le rayon ϱ' serait moyen entre les rayons de courbure de tous les points de la surface; si l'on nomme $z=k$, la valeur de z pour le point où la génératrice plane de la surface supérieure vient rencontrer le cercle générateur de la calotte inférieure, la valeur de ϱ pour ce point sera:

$$\varrho = -(h-k)^2(h-a);$$

mais comme k et a sont le plus souvent très petits par rapport à h, il suit que cette valeur de ϱ ne différera pas sensiblement de celle de ϱ au point culminant, qui est $\varrho=-(h-a)^3$; donc le rayon ϱ', qui sera compris entre ces deux valeurs, aura pour expression: $\varrho'=-(h-a)^3+\delta$, δ étant toujours une quantité fort petite.

La bulle sera d'autant plus applattie que la hauteur h est plus grande, et sa forme sera donc à très peu près celle d'une lentille dont les surfaces ou calottes sphériques auraient pour rayon h et $(h-a)^3+\delta$ δ étant fort petit; on conçoit de ceci pourquoi les bulles, que l'on ne

peut guères observer que près de la surface du liquide, paraissent presque toujours sphériques, puisque les quantités h et $(h-a)^3$ deviennent d'autant plus petites, et parconséquent les deux faces de la lentille plus convexes.

La figure de la bulle, telle que nous venons de la déduire, ne peut jamais être observée dans la nature, à cause d'une foule de circonstances, dont les unes sont propres à altérer la figure de la bulle, et les autres propres à nous faire illusion sur la figure réelle; parmi les causes qui altèrent la figure calculée de la bulle, il faut mettre en premier lieu la viscosité du liquide, que nous n'avons pas introduit dans le calcul, et qui augmente beaucoup la convexité; en effet, la viscosité augmente la cohésion des molécules liquides, et parconséquent les molécules qui forment une espèce d'enveloppe autour de la bulle, s'attirant avec d'autant plus de force que la cohésion est plus grande, il s'en suit que cette enveloppe cède alors moins facilement à la pression du liquide environnant, et tend à devenir un minimum, qui serait une surface sphérique, si la pression était nulle; ainsi donc il s'établit un équilibre entre la force de la cohésion et la pression, et alors la bulle prend une figure moyenne entre la sphère et la lentille calculée, et se rapproche successivement de l'une ou de l'autre, selon que le rapport de la pression à la cohésion augmente ou diminue; c'est pourquoi les bulles capillaires sont toujours sphériques, et même on observe d'assez grandes bulles presque sphériques dans les liquides très visqueux, surtout près de la surface. Une autre cause, qui probablement influe aussi sur la figure de la bulle, est que nous avons supposé la vitesse initiale nulle, ce qui n'est pas le cas dans la nature, et ce qui ne peut être observé.

Parmi les causes qui produisent illusion sur la figure observée, il faut placer d'abord la difficulté d'observer, pendant le temps très court que la bulle passe dans le plan horizontal ou se trouve l'oeuil de l'observateur; 2° que partout ailleurs que dans ce plan la bulle n'est vue qu'en perspective; et enfin 3° qu'il n'est guères possible d'observer une bulle, que dans un vase de verre, parconséquent à une hauteur de liquide h assez petite, et outre les causes d'erreur déja citées s'ajoutent les illusions dues à la réfraction du liquide et à celles du verre.

2de **Partie.** Dans la première partie de mon mémoire j'ai déterminé la figure que devrait avoir la bulle d'air, dans l'hypothèse que la co-

GENERAL LIBRARY University of MICHIGAN

hésion des molécules fluides n'eut aucune influence; mais, l'expérience ayant démontré que la convexité de la bulle était dans la nature beaucoup plus forte que celle que nous avons trouvé par le calcul, introduisons la cohésion dans nos formules, et voyons quelle sera l'influence de cette nouvelle force sur la forme de la bulle d'air.

On doit considérer la cohésion comme une force constante c, qui unit entre elles les molécules liquides qui forment l'enveloppe de la bulle d'air, et parconséquent l'action de cette force est dirigée dans le plan tangent à la surface de la bulle; donc la force c pourra se décomposer en deux autres forces dont l'une sera verticale, et l'autre horizontale; or si nous nommons ∂s la distance de deux éléments infiniments voisins, de la surface, et dont ∂x, ∂y, ∂z sont les projections sur les axes, nous aurons:

$c\frac{\partial z}{\partial s}$ pour la composante verticale de c et

$c\frac{\sqrt{(\partial x^2+\partial y^2)}}{\partial s}$ pour la composante horizontale.

Or, observons que les composantes horizontales de la cohésion pour tous les élémens d'un même cercle, et parconséquent pour toute la surface, se font équilibre entr'elles, et indépendamment de la pression; donc nous n'aurons à considérer que l'effet de la seule composante verticale. Mais comme il est facile de voir que la composante $c\frac{\partial z}{\partial s}$ agit de bas en haut, tandis que la pression agit de haut en bas, il s'en suit que la quantité p dans l'équation

$$1.\quad p\partial^2 A - \partial p\,\partial A = 0,$$

deviendra:

$$2.\quad \left(\partial x.\partial y\, g.d.(h-z) - c\,\partial A.\frac{\partial z}{\partial s}\right).$$

Pour traiter plus facilement l'équation (1.) observons qu'en divisant par $(\partial a)^2$ et changeant les signes il vient:

$$\frac{\partial p.\partial A - p.\partial^2 A}{(\partial a)^2} = \partial\left(\frac{p}{\partial A}\right) = 0,$$

d'où il suit:

$$\frac{p}{\partial A} = \text{constante},$$

ou bien:

$$\frac{\partial x.\partial y.g.d.(h-z) - c\frac{\partial z}{\partial s}.\partial A}{\partial A} = \text{const.}$$

En mettant pour ∂A sa valeur

$$\partial A = \partial x . \partial y \sqrt{\left(1 + \frac{\partial z^2}{\partial x^2} + \frac{\partial z^2}{\partial y^2}\right)},$$

et en observant qu'on a à la fois $z = a$, $\sqrt{\left(1 + \frac{\partial z^2}{\partial x^2} + \frac{\partial z^2}{\partial y^2}\right)} = 1$, $\frac{\partial z}{\partial s} = 0$, il vient:

$$g d (h - a) = \text{constante.}$$

En mettant cette valeur dans l'équation et réduisant, on obtient:

$$3. \quad \frac{h - z}{\sqrt{\left(1 + \frac{\partial z^2}{\partial x^2} + \frac{\partial z^2}{\partial y^2}\right)}} - \frac{c}{g d} \cdot \frac{\partial z}{\sqrt{(\partial z^2 + \partial y^2 + \partial x^2)}} = h - a$$

pour l'équation différentielle de la surface supérieure de la bulle.

Pour passer de l'équation de la surface à celle de la génératrice plane, il faut faire $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, et $\partial y = 0$ dans l'équation (3.), et l'on trouve

$$4. \quad \partial x = \frac{(n^2 - m^2)\,\partial z}{-m(h - z) \pm n\sqrt{((h - z)^2 - (n^2 - m^2))}},$$

faisant pour abréger $(h - a) = n$ et $\frac{c}{g d} = m$.

Observons qu'en faisant dans cette équation $c = 0$ (d'où $m = 0$), on retrouve l'équation

$$5. \quad \partial x = \frac{n^2\,\partial z}{\pm n\sqrt{((h - z)^2 - n^2)}},$$

que nous avons déduit précédemment, en supposant nulle la cohésion.

Observons encore que l'équation (4.) a au dénominateur un radical affecté du double signe $\pm$; mais il ne faut prendre que le signe supérieur $+$ pour lequel l'équation se réduit à zéro, quand on fait $z = a$, car alors $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$. L'autre signe appartient à une autre branche de la courbe, que nous n'avons pas besoin d'examiner.

Sans intégrer l'équation (4.) il est facile de prouver que la convéxité de la surface augmente par l'introduction de la quantité c; pour cela comparons $\frac{\partial z}{\partial x}$, tiré des équations (4.) et (5.), en supposant h, a, et z égaux dans les deux équations.

De l'équation (4.) on tire:

$$6. \quad \pm \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(h - z)}{(h - a)^2 - m^2} + (h - a)\sqrt{\left(\frac{(h - z)^2}{(h - a)^2 - m^2} - 1\right)},$$

de l'équation (5.) on tire:

$$7. \quad \pm \frac{\partial z}{\partial x} = \sqrt{\left(\frac{(h - z)^2}{(h - a)^2} - 1\right)};$$

or il est facile de voir que l'on a à la fois:

$$h-a>+1,\quad \frac{h-z}{(h-a)^2-m^2}>0,\quad \text{et}\quad \frac{(h-'z)^2}{(h-a)^2-m^2}>\frac{(h-z)^2}{(h-a)^2},$$

donc, il suit que pour des valeurs égales de z, dans deux courbes pour lesquelles h et a sont les mêmes, on a:

$$\pm\frac{\partial z}{\partial x}\ (6.),\quad >\pm\frac{\partial z}{\partial x}\ (7.),$$

ce qui prouve, que dans le cas de la cohésion, la courbe génératrice de la surface supérieure de la bulle est plus convexe, que quand on suppose nulle la cohésion du liquide.

La cohésion c étant une force qui modifie l'action de la pression du fluide, nous pouvous la représenter par la pression d'une colonne fluide, dont nous nommerons h' la hauteur, et alors on aura $c=g.d.h'$, valeur qui donne à l'équation (4.) la forme suivante plus élégante:

$$8.\quad \frac{\partial x}{\partial z}=\frac{((h-a)^2-h'^2)}{-h'(h-z)+(h-a)\sqrt{[(h-z)^2-((h-a)^2-h'^2)]}}.$$

On voit que cette équation est homogène, et qu'il n'y entre que les quantités constantes h, h', a, qui sont linéaires; il faut seulement observer, que la quantité h se compose de deux parties, l'une que nous nommerons H, et qui sera la hauteur du liquide au dessus de la bulle, la seconde H', qui sera la hauteur du liquide qui représenterait la pression atmosphérique, car la bulle est aussi soumise à cette pression; donc l'équation (8.) deviendra:

$$\frac{\partial x}{\partial z}=\frac{(H+H'-a)^2-h'^2}{-h(H+H'-z)+(H+H'-a)\sqrt{[(H+H'-z)^2-((H+H'-a)^2-h'^2)]}}.$$

D'ailleurs il faut encore observer que la hauteur du liquide h' qui représente la cohésion, est une quantité fort grande, car on sait que la cohésion est dans les corps solides une quantité infiniment grande par rapport à la pesanteur, et dans les liquides, quelque faible qu'elle soit, elle sera toujours représentée par une hauteur h' très grande.

Nous ne nous arrêterons pas à discuter l'équation de la génératrice de la surface inférieure de la bulle; il nous suffit de dire qu'elle ne sera pas un cercle, mais que sa convexité sera aussi plus grande que celle du cercle trouvé dans la première partie de ces recherches, pour la génératrice de la surface inférieure. Il est donc demontré analytiquement, que l'effet de la cohésion des molécules liquides est d'augmenter la convexité de la bulle d'air.

5.

Barycentrische Lösung der Aufgabe des Herrn Th. Clausen in des IV. Bandes 4. Hefte, Seite 391. u. s. w.

(Vom Herrn Prof. *Möbius* zu Leipzig.)

Wenn von zwei Dreiecken das eine in, das andere um einen Kreis beschrieben ist, und das erstere zugleich in das letztere eingeschrieben sein soll, so sieht man augenblicklich, dafs man zu den Spitzen des erstern die Berührungspuncte des letztern mit dem Kreise zu nehmen hat. Eine sehr interessante, von Herrn Clausen a. a. O. vorgelegte und gelösete Aufgabe entsteht aber, wenn umgekehrt gefordert wird, dafs die Spitzen des um den Kreis beschriebenen Dreiecks in den (verlängerten) Seiten des in ihn beschriebenen liegen sollen. Im Gegenwärtigen will ich diese Aufgabe auf Kegelschnitte überhaupt ausdehnen, und zeigen, wie sie mit Hülfe der barycentrischen Rechnung sich lösen läfst.

Sei ABC (Taf. I. Fig. 5.) ein in, und $A'B'C'$ ein um einen Kegelschnitt beschriebenes Dreieck, und letzteres zugleich in ersteres beschrieben, so dafs A' in BC, B' in CA, C' in AB liegt. Weil der Kegelschnitt durch A, B, C gehen soll, so kann man seinen Ausdruck setzen:

$$\text{II.}\quad fpA + gqB + hrC, \quad \text{wo 1)}\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 0$$

die Gleichung ist, welche zwischen den Veränderlichen des Ausdrucks bestehen mufs. Und weil der Kegelschnitt die Seiten des Dreiecks $A'B'C'$ berühren soll, so mufs sein Ausdruck auch die Form haben:

$$\text{II.}\quad ixA' + kyB' + lzC', \quad \text{wo 2)}\ \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 0$$

die Gleichung zwischen den Veränderlichen des Ausdrucks ist *).

*) Setzt man nämlich I. und 1), weil es nur auf das gegenseitige Verhältnifs, nicht auf die absoluten Werthe von p, q, r ankommt:

$$\frac{1}{r} = u, \quad \frac{1}{q} = -1 \text{ und damit } \frac{1}{p} = 1 - u,$$

so reducirt sich I. auf den Ausdruck I. im Baryc. Calc. §. 249.

Eben so geht II. in die Form I. §. 258. über, wenn man $\sqrt{z} = v$, $\sqrt{y} = -1$ und damit $\sqrt{x} = 1 - v$ setzt.

Da ferner A' in BC u. s. w. liegen soll, so setze man:

$$\text{III.} \quad \begin{cases} iA' = agB + a'hC, \\ kB' = bhC + b'fA, \\ lC' = cfA + c'gB, \end{cases}$$

wo a, a', b, ... noch zu bestimmende Coefficienten sind. Substituirt man hieraus die Werthe von A', B', C' in II., und setzt der Kürze willen:

$$3) \quad b'y + cz = \xi, \quad c'z + ax = \eta, \quad a'x + by = \zeta,$$

so geht II. über in:

$$\text{IV.} \quad f\xi A + g\eta B + h\zeta C,$$

und die hierdurch ausgedrückte Curve mufs mit dem Kegelschnitte I. identisch sein. Für einen gemeinschaftlichen Punct beider auf einerlei Fundamentalpuncte bezogenen Curven I. und IV. verhält sich aber:

$$p:q:r = \xi:\eta:\zeta, \quad \text{also auch} \quad \frac{1}{p}:\frac{1}{q}:\frac{1}{r} = \frac{1}{\xi}:\frac{1}{\eta}:\frac{1}{\zeta}, \quad \text{folglich}$$

$$4) \quad \frac{1}{\xi} + \frac{1}{\eta} + \frac{1}{\zeta} = 0, \quad \text{oder} \quad \eta\zeta + \zeta\xi + \xi\eta = 0,$$

wegen 1. Wären nun die Curven nicht identisch, so müfsten sich aus 4. in Verbindung mit 2., nachdem man in 4. für ξ, η, ζ aus 3. ihre Werthe, durch x, y, z ausgedrückt, gesetzt hat, die Verhältnifswerthe von x, y, z für den oder die gemeinschaftlichen Puncte beider Curven finden lassen. Da aber die Curven alle Puncte mit einander gemein haben sollen, so mufs die Gleichung 4. bestehen, was auch den Veränderlichen x, y, z für Werthe beigelegt werden, wenn nur damit immer auch die Gleichung 2. erfüllt wird.

Nun giebt die Entwickelung von 4.:

$$\begin{aligned} 0 = {} & aa'x^2 + bc'yz + c'a'zx + abxy \\ & + bb'y^2 + bcyz + ca'zx + a'b'xy \\ & + cc'z^2 + b'c'yz + cazx + ab'xy, \end{aligned}$$

und wenn man die Bedingungsgleichung 2. rational darstellt:

$$0 = x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy.$$

Nach der bekannten Methode der Multiplicatoren addire man jetzt diese zwei Gleichungen, nachdem man vorher die letztere mit einem unbestimmten Coefficienten m multiplicirt hat, und setze hierauf die Coefficienten von x^2, y^2, z^2, yz, zx, xy, jeden für sich, $= 0$. Hiermit erhält man:

$$\begin{aligned} aa' + m &= 0, & bc + bc' + b'c' &= 2m, \\ bb' + m &= 0, & ca + ca' + c'a' &= 2m, \\ cc' + m &= 0, & ab + ab' + a'b' &= 2m, \end{aligned}$$

und wenn man die aus den drei erstern Gleichungen fliefsenden Werthe von a', b', c' in den drei letztern substituirt:

$$(m-bc)^2 = mb^2, \quad (m-ca)^2 = mc^2, \quad (m-ab)^2 = ma^2,$$

also, wenn man $m = n^2$ setzt:

$$n^2 - bc = \pm nb, \quad n^2 - ca = \pm nc, \quad n^2 - ab = \pm na,$$

wo entweder zugleich die drei obern oder zugleich die drei untern Zeichen genommen werden müssen. Beides ist wegen der bleibenden Unbestimmtheit von n gleichgültig. Wollte man aber z. B. in der ersten Gleichung das untere, und in den beiden andern die obern Zeichen nehmen, so würde man $a = \infty$, $b = -n$, $c = 0$, folglich $a' = 0$, $b' = n$, $c' = \infty$ erhalten, und dadurch nach III. zu dem unstatthaften Resultate gelangen, dafs A' und C' mit B zusammenfallen. Mit Annahme der obern Zeichen findet sich nun leicht:

$$a = b = c = -\tfrac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})n, \text{ und damit}$$

$$a' = b' = c' = -\frac{m}{a} = -\frac{n^2}{a} = -\tfrac{1}{2}(1 \mp \sqrt{5})n = -\nu a,$$

wenn man $\frac{a'}{a} = \frac{1 \mp \sqrt{5}}{1 \pm \sqrt{5}} = -\nu$, d. i. $\frac{\sqrt{5} \mp 1}{\sqrt{5} \pm 1} = \nu$ setzt.

Drückt man somit b, c, a', b', c' in III. insgesammt durch a aus, so kommt:

$$\text{V.} \quad \begin{cases} iA' = agB - \nu ahC, \\ kB' = ahC - \nu afA, \\ lC' = afA - \nu agB, \end{cases}$$

und hieraus weiter: $kB' + \nu lC' = ahC - \nu^2 agB$. Bezeichnet man daher die Durchschnitte von $B'C'$ mit BC, von $C'A'$ mit CA, von $A'B'$ mit AB resp. durch I, K, L, so ist:

VI. $I \equiv kB' + \nu lC'$, und eben so $K \equiv lC' + \nu iA'$, $L \equiv iA' + \nu kB'$.

Nach diesen Vorbereitungen sei zuerst der Kegelschnitt und das um ihn beschriebene Dreieck $A'B'C'$ gegeben, und werde das einzuschreibende ABC gesucht. Die damit zugleich gegebenen Berührungspuncte des Kegelschnitts $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ heifsen I', K', L', so hat man zufolge des Ausdrucks II. (Bar. Calc. §. 260.):

VII. $I' \equiv kB' + lC'$, $K' \equiv lC' + iA'$, $L' \equiv iA' + kB'$.

Hiernach verhält sich $B'I' : I'C' = l : k$, und auf gleiche Art, wegen VI.: folglich

$$B'I : IC' = \nu l : k,$$

$$B'I : IC' = \nu . B'I' : I'C' = (\sqrt{5} \mp 1)B'I' : (\sqrt{5} \pm 1)I'C',$$

und eben so

$$C'K : KA' = \nu . C'K', \quad K'A', \quad A'L : LB' = \nu . A'L' : L'B'.$$

Hiermit kann man die Puncte I, K, L finden, welche mit den gegenüberliegenden Spitzen A', B', C' verbunden, die Seiten des in den Kegelschnitt einzuschreibenden Dreiecks ABC bestimmen.

Wenn zweitens aus dem eingeschriebenen Dreieck ABC das umschriebene $A'B'C'$ gefunden werden soll, so lege man an den Kegelschnitt in A, B, C die Berührenden GH, HF, FG, so dafs FGH ein umschriebenes Dreieck ist; und ziehe die Geraden AF, BG, CH, welche BC, CA, AB resp. in F', G', H' schneiden. Vermöge des Ausdruckes I. ist alsdann:

$$\text{VIII.} \quad \begin{cases} F \equiv gB + hC - fA, \\ G \equiv hC + fA - gB, \\ H \equiv fA + gB - hC \end{cases}$$

(Bar. Calc. §. 268.), und daher $gB + hC \equiv$ dem Durchschnitte von BC mit $AF \equiv F'$, und eben so $hC + fA \equiv G'$, $fA + gB \equiv H'$. Es verhält sich daher:

$$BF' : F'C = h : g,$$

und wegen V.:

$$BA' : A'C = -\nu h : g, \quad \text{oder} \quad BA' : CA' = \nu h : g,$$

folglich

$$BA' : CA' = \nu . BF' : F'C = (\sqrt{5} \mp 1) BF' : (\sqrt{5} \pm 1) F'C,$$

und eben so:

$$CB' : AB' = \nu . CG' : G'A, \quad AC' : BC' = \nu . AH' : H'B.$$

Mittelst dieser Proportionen können also die in BC, CA, AB resp. liegenden Spitzen A', B', C' des umschriebenen Dreiecks gefunden werden.

Übrigens hat jede dieser beiden Aufgaben zwei Auflösungen, wegen des zweideutigen Werthes von ν, der durch die quadratische Gleichung: $\nu^2 - 3\nu + 1 = 0$ gegeben ist.

Zusätze. 1) Drückt man I', K', L' in VII. mit Hülfe der Gleichungen V. durch A, B, C aus, so kommt:

$$I' \equiv kB' + lC' \equiv (1-\nu) fA - \nu gB + hC,$$
$$K' \equiv lC' + iA' \equiv fA + (1-\nu) gB - \nu hC,$$
$$L' \equiv iA' + kB' \equiv -\nu fA + gB + (1-\nu) hC.$$

Man multiplicire den Ausdruck für K' mit ν, und ziehe ihn von dem Ausdrucke für L' ab. Dies giebt:

$$-2\nu fA + (1 - \nu + \nu^2) gB + (1 - \nu + \nu^2) hC,$$

welches daher der Ausdruck eines Punctes in der Linie $K'L'$ sein mufs, und welcher sich, wegen $\nu^2 = 3\nu - 1$, auf

$$-2\nu f A + 2\nu g B + 2\nu h C \equiv -f A + g B + h C \equiv F$$

(vergl. VIII.) reducirt. Es liegen daher K', L' mit F, und eben so L', I' mit G; I', K' mit H in gerader Linie, wodurch folgender merkwürdige Satz entsteht:

Wenn von zwei Dreiecken ABC und $A'B'C'$ das erste in, das zweite um einen Kegelschnitt beschrieben ist, und zugleich die Spitzen des zweiten in den Seiten des ersten liegen, so stehen in derselben Beziehung zu einander das eingeschriebene Dreieck $I'K'L'$, dessen Spitzen die Berührungspuncte des umschriebenen Dreiecks $A'B'C'$ sind, und das umschriebene Dreieck FGH, dessen Seiten die an den Kegelschnitt in den Spitzen des eingeschriebenen Dreiecks ABC gezogenen Berührenden sind, indem auch hier die Spitzen von FGH in den Seiten von $I'K'L'$ liegen.

2) Die drei Geraden, welche die Spitzen eines um einen Kegelschnitt beschriebenen Dreiecks mit den gegenüberliegenden Berührungspuncten verbinden, schneiden sich bekanntlich in einem Puncte. Heifse P dieser Punct für das umschriebene Dreieck $A'B'C'$, so ist $P \equiv iA' + kB' + lC'$ (Bar. Calc. §. 260.). Setzt man ferner $Q \equiv fA + gB + hC$, so kommt, wenn davon die Ausdrücke für F, G, H in VIII. subtrahirt werden: $2fA$, $2gB$, $2hC$; d. h. bei dem umschriebenen und den Kegelschnitt in A, B, C berührenden Dreiecke FGH schneiden sich FA, GB, HC gemeinschaftlich in Q.

Nun folgt durch Addition der Gleichungen V.:

$iA' + kB' + lC' = a(1-\nu)(fA + gB + hC)$, d. i. $P \equiv Q$; also:

Die sechs Linien $A'I'$, $B'K'$, $C'L'$, FA, GB, HC schneiden sich in einem Puncte.

6.

Beweis der Lehrsätze Band 2. Heft 3. Nr. 54. S. 287.

(Von Herrn *Felix Eberty* zu Berlin.)

„I. Fället man aus einem willkürlichen Puncte D (Taf. I. Fig. 7.) in der Ebene eines Dreiecks ABC, auf die Seiten des letzteren Lothe, Da, Db und Dc, nimmt in diesen Lothen drei beliebige Puncte a, b, c als Ecken eines andern Dreiecks abc an, und fället auf dessen Seiten aus den Ecken des gegebenen Dreiecks, in gehöriger Ordnung genommen, Lothe, Ad, Bd, Cd, so treffen diese einander allemal in irgend einem Puncte d," und ferner:

„II. Nimmt man ähnlicher Weise ein drittes Dreieck an, $a_1 b_1 c_1$, dessen Ecken in den nemlichen drei ersten Lothen liegen, so wird demselben auf gleiche Weise ein Punct d_1 entsprechen (I.), und alsdann liegen die drei Durchschnittspuncte der drei Paar entsprechenden Seiten des zweiten Dreiecks mit denen des dritten, das heifst die Durchschnittspuncte α, β und γ der Seitenpaare bc und $b_1 c_1$, ca und $c_1 a_1$, ab, und $a_1 b_1$ allemal in Einer Geraden, $\alpha\beta\gamma$," und

„III. Diese Gerade ist allemal zu derjenigen Geraden dd_1, welche durch die beiden genannten Puncte d und d_1 geht, senkrecht."

An diese Lehrsätze schliefst sich noch folgender an:

IV. Nimmt man in jeder von dreien sich in Einem Puncte schneidenden Geraden (Fig. 8.) zwei beliebige Puncte an, und bezeichnet die in jeder derselben dem Durchschnittspuncte zunächst liegenden mit a, b und c, die andern drei mit a_1, b_1 und c_1, so liegen die Durchschnittspuncte der Verbindungslinien ab, bc und ac, mit den Verbindungslinien $a_1 b_1$, $b_1 c_1$ und $a_1 c_1$, d. h. die Puncte α, β und γ allemal in einer Geraden.

Beweis von I. Man beschreibe aus den Puncten A, B und C (Fig. 7.) drei Kreise, deren zwei immer die auf ihrer Axe senkrecht stehenden Geraden Da, Db und Dc zu Linien der gleichen Potenzen haben, welches auf folgende Art möglich ist. Man beschreibe um c mit einem beliebigen Radius cx einen Kreis, lege sodann von A aus an den-

selben eine Tangente Aa, und beschreibe mit Ax um A einen Kreis, desgleichen mit By (einer von B aus an den Kreis um c gezogenen Tangente) um B, sodann mit az (einer Tangente an den Kreis um B) einen Kreis um a, und zuletzt mit Ct (einer Tangente an den Kreis um a) einen Kreis um C, so sind die drei nun um A, B und C beschriebenen Kreise von der verlangten Art. Zu denen um A und B nämlich ist Dc, zu denen um B und C, Da, und also zu denen um A und C, Db die Linie der gleichen Potenzen. (S. die Abhandlungen des Herrn Steiner in diesem Journal, Band 2.) Also kann man auch aus b mit bm einen Kreis beschreiben, welcher die um A und C rechtwinklig schneidet (wie es schon vorher bei den Kreisen um c und a, in Bezug auf die um B und A, und die um C und B der Fall war). Der Kreis um C also wird, wie man sahe, von dem um a sowohl, als von dem um b rechtwinklig geschnitten, folglich liegt C in der Linie der gleichen Potenzen der Kreise um a und b, und zwar stellt demnach das von c auf ab gefällte Perpendikel (s. jene Abhandlungen) diese Linie der gleichen Potenzen dar. Auf dieselbe Weise folgt, dafs auch das von A auf cb gefällte Perpendikel zu den Kreisen um c und b, und das von B aus auf ac gefällte, für die Kreise um a und b, Linien der gleichen Potenzen sind. Es sind also die drei Lothe Ad, Bd und Cd Linien der gleichen Potenzen zu je zweien von den drei Kreisen a, b und c; sie scheiden sich demnach (s. jene Abhandlungen) alle drei in Einem Puncte; was zu beweisen war.

Beweis von II. und III. d_1 also ist der Punct, welcher im Dreieck $a_1b_1c_1$ dem Puncte d im Dreieck abc entspricht. Die Seiten ab und a_1b_1 schneiden sich in α, bc und b_1c_1 in γ und ac und a_1c_1 in β. Es ist zu beweisen, dafs die Puncte α, β und γ in einer geraden Linie liegen, welche mit der durch d und d_1 gezogenen einen rechten Winkel bildet. Man lege um d einen Kreis, welcher die um a, b und c rechtwinklig durchschneidet (welches angeht, weil in d die Linien der gleichen Potenzen für jene Kreise (um a, b und c) sich treffen), eben so aus d_1 einen Kreis, welcher die um a_1, b_1 und c_1 rechtwinklig durchschneidet (welches aus ganz ähnlichem Grunde möglich ist). ab ist die Linie der gleichen Potenzen für die Kreise um C und d (denn beide werden von denen um a und b rechtwinklig geschnitten); aus demselben Grunde ist auch a_1b_1 die Linie der gleichen Potenzen für die Kreise um C und um d_1. Jeder Punct in

der Linie ab hat also für die Kreise um C und d, jeder Punct in der Linie $a_1 b_1$ für die Kreise um C und d_1 gleiche Potenzen; folglich hat ihr Durchschnittspunct (α) auch für die Kreise um d und um d_1 gleiche Potenzen; es liegt also α in der Linie der gleichen Potenzen für die Kreise um d und um d_1. Dasselbe ist auf dieselbe Weise von γ und β zu beweisen. Es liegt also α sowohl als β und γ in der Linie der gleichen Potenzen für die Kreise um d und um d_1, alle drei also liegen in einer einzigen geraden Linie, und zwar (s. jene Abhandlungen) in einer geraden Linie, welche auf der durch d und d_1 gezogenen senkrecht steht; denn dd_1 ist die Axe der beiden um diese Puncte beschriebenen Kreise.

Beweis von IV. Mit wechselnder Gröfse der Kreise um A, B und C, welche ursprünglich ganz beliebig angenommen sind, wechseln auch die Gröfsen der Winkel, unter welchen die drei Geraden aD, bD cD einander schneiden, und zwar bei allmäligem Wachsen oder Abnehmen jener Kreise, allmälig wachsend oder abnehmend. Da demnach diese Winkel jede mögliche Gröfse haben können, so folgt unmittelbar, dafs die in den drei geraden Linien Da, Db und Dc beliebig angenommenen 6 Puncte, a, b, c und a_1, b_1, c_1, auch in jeden andern drei sich in einem Puncte unter beliebigen Winkeln schneidenden Linien angenommen werden können, so dafs die drei Puncte α, β und γ immer in Einer Geraden liegen; was zu beweisen war.

Auch die Umkehrung aller dieser Sätze läfst sich darthun.

7.

Aufgaben und Lehrsätze,

erstere aufzulösen, letztere zu beweisen;
nebst anderen einzelnen Bemerkungen.

---

1. Bemerkungen über die Definitionen der Ebene, in Beziehung auf die Äufserung über diesen Gegenstand im 4ten Bande dieses Journals S. 396. Nr. 2.

Wenn man die Ebene wie folgt definirt:

„Sie ist diejenige Fläche, in welcher alle geraden Linien liegen, die mit einer und derselben geraden Linie, in einem und demselben Puncte, zu beiden Seiten gleiche Winkel machen."

so läfst sich, wie es scheint, allerdings beweisen, dafs auch jede andere gerade Linie durch zwei Puncte in der Ebene, die nicht durch die feste Gerade geht, ganz in der Ebene liegt, ohne vorher, wie am angeführten Orte angenommen wird, den Beweis des Satzes, dafs Dreiecke mit den nemlichen Seiten congruent sind, unabhängig von der Definition der Ebene, nöthig zu haben, und zwar wie folgt.

Wenn die in der Fläche des Papiers liegenden geraden Linien GC, KC, DC, FC u. s. w. (Taf. I. Fig. 9.) sämmtlich mit einer und derselben durch C gehenden geraden Linie C_1CC_2 (C_1 stelle man sich über, und C_2 unter der Fläche des Papiers vor) zu beiden Seiten gleiche, also rechte Winkel machen, so ist die Fläche in welcher alle jene geraden Linien liegen, der Definition zufolge, eine Ebene. Wenn nun A und B zwei beliebige Puncte in dieser Ebene sind, so kommt es darauf an, zu beweisen, dafs eine gerade Linie durch A und B ganz in der Ebene liegt. Man nehme DC in der Geraden AC, gleich der längeren von den beiden Linien AC und BC, also gleich BC, so wird zuerst bewiesen werden, dafs eine gerade Linie durch D und B ganz in der Ebene liegt. Man mache in den Geraden ECB und DCF, $EC = FC = DC = BC$. Man mache ferner den Winkel GCD gleich dem Winkel GCE, so wird auch, wenn GCH gerade ist, $BCH = FCH$ sein; denn die drei Winkel GCD, DCB und BCH sind zusammen zwei Rechte, und die drei Winkel ECG, FCE und

HCF ebenfalls, also ist $GCD + DCB + BCH = ECG + FCE + HCF$. Aber die Winkel *GCD* und *GCE* sind gleich, nach der Voraussetzung, und die Winkel *ECF* und *DCB* sind gleich, als Scheitelwinkel: also ist auch $BCH = FCH$. Nun drehe man die Ebene um die Gerade *GH*, bis CC_1 in CC_2 fällt, so wird nothwendig *DC* in *EC*, *BC* in *FC*, *D* in *E* und *B* in *F* fallen; denn die Winkel, welche *DC* und *BC* mit CC_1 machen, sind denen gleich, welche *EC* und *FC* mit CC_2 machen, und die Winkel *DCG* und *BCH* sind den Winkeln *ECG* und *FCH* gleich. Gesetzt nun, die gerade Linie durch *D* und *B* läge nicht ganz in der Ebene, sondern z. B. über ihr, so wird sie, nach *EF* gelangt, unter die Ebene fallen. Jetzt drehe man auch die Ebene, aus ihrer ursprünglichen Lage, um C_1CC_2, bis *DC* in *FC* fällt. Alsdann wird nothwendig *BC* in *EC* fallen, weil die Winkel *FCE* und *DCB* gleich sind. Die gerade Linie durch *DB*, nach *FE* gelangt, wird aber nun über der Ebene liegen. Einmal also würde eine gerade Linie durch *E* und *F* unter und das anderemal über der Ebene liegen können, das heifst, es würden zwei verschiedene gerade Linien durch *E* und *F* Statt finden. Da dieses nicht möglich, vielmehr der Definition der geraden Linie entgegen ist, so kann eine gerade Linie durch *D* und *B* nicht über, und eben so auch nicht unter der Ebene, überhaupt also nicht aufser der Ebene liegen, sondern mufs ganz in die Ebene fallen.

Nachdem dieses gezeigt worden, nehme man auf mehreren geraden Linien durch *C*, auf der *B* entgegengesetzten Seite von *DC*, z. B. $KC = MC = LC$ etc. $= BC$, so läfst sich von allen den geraden Linien *BK*, *BM*, *BL* etc., eben wie von *BD*, beweisen, dafs sie ganz in der Ebene liegen, das heifst, dafs sie alle die gerade Linie *DC* schneiden. Es folgt also, dafs alle gerade Linien durch *B*, die die Grade *DC* zwischen *D* und *C* schneiden, ganz in der Ebene liegen. Unter diesen Linien ist auch nothwendig die Grade durch *A* und *B*, folglich liegt auch diese ganz in der Ebene; was zu beweisen war.

Es folgt hier zugleich, dafs alle durch einen beliebigen Punct *B* einer durch C_1CC_2 bestimmten Ebene und durch beliebige Puncte der Ebene gehende gerade Linien ganz in der Ebene liegen, und es ist nun ferner zu zeigen, dafs eine gerade Linie durch *B*, die auf zwei beliebigen ebenfalls durch *B* gehenden geraden Linien in der Ebene, z. B. auf *DB* und *CB*, senkrecht steht, auch mit allen anderen in der Ebene durch

B gehenden geraden Linien rechte Winkel macht, und dann, dafs jene Linie B_1BB_2 (B_1 liegt über, B_2 unter der Ebene) mit C_1CC_2 parallel ist, welches auf die gewöhnliche Weise geschehen kann, da man jetzt, nachdem die Eigenschaft der Ebene, dafs alle durch zwei ihrer Puncte gehende gerade Linien ganz in ihr liegen, bewiesen worden, die nöthigen Sätze von den Dreiecken zu Hülfe nehmen kann.

Unter solchen Umständen scheint die obige Definition der Ebene allen Erfordernissen zu genügen. Sie müfste nothwendig der Planimetrie vorhergehen; denn man kann nicht mit Grund eher Figuren in der Ebene abhandeln, ehe man nicht den Begriff der Ebene festgestellt und diejenigen ihrer Eigenschaften, die bei ebenen Figuren vorausgesetzt werden, erkannt und nachgewiesen hat, wie z. B. aus der der Äufserung am angeführten Orte vorhergehenden Bemerkung No. 1. zu sehen.

2. Lehrsatz, zu beweisen.

(Vom Herrn Professor *Unger* zu Erfurt.)

Wenn v und z ganze Zahlen bezeichnen, so geben die Ausdrücke $A = 2(v^2-1)(z^2+1)$, $B = 2(v^2+1)(z^2-1)$ und $C = (v+z)(vz-1)$ ganze rationale Zahlen für die drei Seiten eines nur in besonderen Fällen rechtwinkligen Dreiecks, von welchen die Fläche F und die Radien R und r der um- und eingeschriebenen Kreise ebenfalls ganze rationale Zahlen sind. Es ist nemlich

$$F = 4(v^2-1)(z^2-1)(v+z)(vz-1), \quad R = (v^2+1)(z^2+1) \text{ und}$$
$$r = 2(v-1)(z-1)(v+z).$$

3. Aufgabe. Wenn sich eine Ebene um eine gerade Linie in ihr dreht, so beschreibt eine andere gerade Linie in der bewegten Ebene, wenn sie mit der festen Axe einen unveränderlichen Winkel macht, eine Kegelfläche, und ein fester Punct in der bewegten Linie eine Kreislinie. Ist der unveränderliche Winkel ein rechter, so geht die Kegelfläche in einen ebenen Kreis über.

Nun nehme man an, der Winkel, welchen die Linie in der bewegten Ebene mit der Axe macht, sei nicht unveränderlich, sondern z. B. immer dem Winkel, durch welchen sich die Ebene gedreht hat oder einem constanten Theile desselben gleich. Es fragt sich, welche Fläche alsdann die Linie in der bewegten Ebene, und welche Curve ein fester Punct der Linie beschreiben werde.

4. Aufgabe. Zwei gegebene Flächen schneiden einander. Man soll die Flächen finden, in welchen alle Normalen auf die eine und die andere gegebene Fläche, die durch ihren Durchschnitt gehen, liegen; desgleichen die Bedingungen, unter welchen die geometrischen Orte der Normalen, wenn sie sich auf die Durchschnitte zweier parallelen gegebenen Flächen mit einer dritten gegebenen Fläche beziehen, parallele Flächen sind.

5. Aufgabe. Welche Form mufs ein schwerer Körper von gegebener Oberfläche und gegebenem Inhalt und mit ebener, kreisförmiger Grundfläche haben, wenn, seine Grundfläche auf eine wagerechte Ebene gestellt, das Moment seiner Stabilität ein Maximum sein soll?

8.

Kurze Darstellung der Haupt-Eigenschaften eines Systems von Linsengläsern.

(Vom Herrn Prof. *A. F. Möbius* zu Leipzig.)

Unter den Haupt-Eigenschaften eines Systems von Linsengläsern werden hier diejenigen verstanden, welche einem solchen Systeme, abgesehen von den Abweichungen wegen der Kugelgestalt und der Farbenzerstreuung, zukommen. Schon früher hatte ich mit diesem interessanten Gegenstande mich zu beschäftigen angefangen, als ich eine Abhandlung darüber von Gabrio Piola in den „Mailänder Ephemeriden für 1822: *Sulla Teorica dei Cannocchiali,*" kennen lernte, wozu der Verfasser, wie er im Eingange bemerkt, durch das Studium zweier Abhandlungen ähnlichen Inhalts von Lagrange in den „Berliner Memoiren für 1778 und 1803" veranlafst worden war, und wovon sich sein Aufsatz hauptsächlich dadurch unterscheidet, dafs er die durch Lagrange's Calcul erhaltenen Gleichungen als lineare Gleichungen mit endlichen Differenzen behandelt und dadurch zu einer nicht geringen Anzahl neuer Relationen geführt wird. Durch Lesung dieser Abhandlung von Piola, mit den von Lagrange angewendeten Methoden und mit den von Piola fortgesetzten Untersuchungen bekannt gemacht, gelang es mir nun leicht, den von mir früher gefundenen Resultaten eine allgemeinere und einfachere Form zu geben, unter der ich sie im vorliegenden Aufsatze mitzutheilen mir erlaube. Es werden darin zuerst aus der bekannten Formel für eine einfache Linse die allgemeinen, für ein beliebiges System von Gläsern geltenden Gleichungen durch Bildung eines Kettenbruchs und durch Benutzung der bekannten, den Kettenbrüchen zukommenden Eigenschaften hergeleitet; eine Herleitung, welche neu sein und durch ihre Einfachheit sich vielleicht empfehlen dürfte. Mit Hülfe der erhaltenen Relationen werden sodann mehrere, mir neu scheinende Vergleichungen zwischen einfachen Linsen und daraus zusammengesetzten Systemen angestellt, wonach die Erscheinungen bei letztern sich ganz nach den bei erstern Statt findenden Gesetzen richten. Den Fernröhren, als einer

merkwürdigen, speciellen Art von Linsensystemen, ist zum Schlusse ein besonderer Abschnitt gewidmet.

Figuren beizufügen, habe ich nicht für nöthig erachtet, obgleich sehr oft Buchstaben zur Bezeichnung einzelner Puncte angewendet worden sind. In dieser Hinsicht erinnere ich nur noch, dafs durchgehends beim Ausdruck einer Linie, durch die zwei an ihre Endpuncte gesetzte Buchstaben, die Aufeinanderfolge dieser Buchstaben mit berücksichtigt werden mufs, so dafs, wenn A, B, C, ... beliebig in einer Geraden gelegene Puncte sind, man stets $AB+BA=0$, $AB+BC=AB-CB=AC$, u. s. w. hat.

---

§. 1. Man denke sich ein System von n Linsengläsern, deren Axen in eine und dieselbe Gerade fallen. Das Glas, auf welches das Licht zuerst trifft, heifse das erste; das unmittelbar folgende, das zweite; u. s. w., und nach dieser Ordnung seien P_1, P_2, P_3, ... P_n die in der gemeinschaftlichen Axe liegenden Mittelpuncte der Gläser.

Sei ferner A der Vereinigungspunct der auf das erste Glas fallenden Strahlen, die, nachdem A vor oder hinter dem Glase liegt, von A wirklich ausgehen, oder so das Glas treffen, dafs sie ohne den Dazwischentritt desselben sich in A vereinigen würden. Nach ihrer Brechung durch das erste Glas sei A_1 ihr Vereinigungspunct, so dafs sie entweder nach A_1 zu wirklich convergiren, oder so divergiren, als ob sie von einem vor dem Glase gelegenen Puncte A_1 herkämen. Auf gleiche Art seien A_2, A_3, ... A_n die Vereinigungspuncte der Strahlen nach ihrer Brechung durch das zweite, dritte, ... $n$te Glas. Übrigens wollen wir für den Anfang den Punct A und damit auch alle übrigen A_1, ... A_n in der Axe selbst liegend annehmen.

Die hierbei zu lösende Aufgabe ist nun folgende:

Das System der Gläser, d. h. ihre gegenseitigen Abstände und ihre Brennweiten sind gegeben. Es soll für einen beliebig in der Axe angenommenen Ort des Vereinigungspunctes A der auf das erste Glas fallenden Strahlen, der Ort der Vereinigung A_n nach ihrer Brechung durch das letzte Glas gefunden werden.

§. 2. Man setze die Abstände der Gläser von einander:

$$P_1P_2 = h_1, \quad P_2P_3 = h_2, \quad \ldots\ldots \quad P_{n-1}P_n = h_{n-1};$$

die reciproken Werthe ihrer Brennweiten, positiv bei erhabenen Gläsern,

negativ bei hohlen:

$$g_1, g_2, g_3, \ldots . g_n.$$

Endlich sei:

$$AP_1 = a_1, \quad A_1P_2 = a_2, \quad \ldots . A_{n-1}P_n = a_n,$$
$$P_1A_1 = b_1, \quad P_2A_2 = b_2, \quad \ldots . P_nA_n = b_n,$$

welche Linien positiv oder negativ zu nehmen sind, je nachdem in ihren Ausdrücken die Aufeinanderfolge der zwei ihre Endpuncte bezeichnenden Buchstaben (wie P_2 auf A_1 folgend, in dem Ausdrucke $A_1P_2 = a_2$), mit der Richtung des Lichts übereinstimmt, oder ihr entgegengesetzt ist. Hiernach sind $h_1, h_2, \ldots . h_{n-1}$ insgesammt positiv.

Um nun, wie es die Aufgabe fordert, aus den gegebenen $h_1, h_2, \ldots .$ und $g_1, g_2, \ldots .$ für ein beliebiges a_1 das zugehörige b_n zu finden, hat man die Gleichungen aufzulösen:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} &= g_1 & b_1 + a_2 &= h_1\\
\frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2} &= g_2 & b_2 + a_3 &= h_2\\
\frac{1}{a_3} + \frac{1}{b_3} &= g_3 & &\vdots\\
&\vdots & &\vdots\\
&\vdots & b_{n-1} + a_n &= h_{n-1}\\
\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} &= g_n
\end{aligned}$$

von denen die Gleichungen zur rechten von selbst einleuchten, die linker Hand stehenden aber aus den Elementen der Dioptrik bekannt sind. Mittelst eines beliebig gegebenen a_1 kann man daraus nach und nach $b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots . b_{n-1}, a_n$ und damit endlich b_n selbst berechnen. Da aber diese ziemlich weitläufige Rechnung für jeden anders gewählten Werth von a_1 wiederholt werden müfste, und gleichwohl, im Allgemeinen wenigstens, die Werthe von $b_1, a_2, b_2, \ldots . a_n$ nicht weiter zu wissen verlangt werden, so wollen wir durch Elimination dieser Gröfsen eine Gleichung zwischen a_1 und b_n unmittelbar abzuleiten suchen.

§. 3. Aus den obigen Gleichungen folgt:

$$b_1 = \frac{1}{g_1 - \frac{1}{a_1}},$$

$$b_2 = \frac{1}{g_2 - \frac{1}{a_2}} = \frac{1}{g_2 - \frac{1}{h_1 - b_1}} = \frac{1}{g_2 - \frac{1}{h_1 - \frac{1}{g_1 - \frac{1}{a_1}}}}$$

$$b_3 = \frac{1}{g_3 - \frac{1}{h_2 - b_2}} = \frac{1}{g_3 - \frac{1}{h_2 - \frac{1}{g_2 - \frac{1}{h_1 - \frac{1}{g_1 - \frac{1}{a_1}}}}}}$$

u. s. w. Aus der Natur der Kettenbrüche erhellet aber leicht, dafs, wenn man aus den Elementen $a, b, c, d, \ldots$ die Zusammensetzungen bildet:

$$[a, b] = ab - 1,$$
$$[a, b, c] = [a, b]c - a,$$
$$[a, b, c, d] = [a, b, c]d - [a, b],$$
$$[a, b, c, d, e] = [a, b, c, d]e - [a, b, c], \text{ u. s. w.}$$

und eben so $[b, c] = bc - 1$, $[b, c, d] = [b, c]d - b$, u. s. w. setzt, der Kettenbruch $\cfrac{1}{a - \cfrac{1}{b - \cfrac{1}{c - \text{etc.} - \cfrac{1}{k}}}} = \frac{[b, c, \ldots k]}{[a, b, c, \ldots k]}$ ist.

Auch besitzen diese Ausdrücke die nicht schwer zu erweisenden Eigenschaften, dafs

$$[a, b, \ldots i]\,[b, \ldots i, k] - [a, b, \ldots i, k]\,[b, \ldots i] = 1,$$

und dafs

$$[a, b, \ldots i, k] = [k, i, \ldots b, a],$$

so dafs die Elemente, ohne den Werth des Ausdruckes zu verändern, auch in umgekehrter Folge genommen werden können *).

Hiernach ist nun:

$$b_1 = \frac{a_1}{[g_1, a_1]}, \quad b_2 = \frac{[h_1, g_1, a_1]}{[g_2, h_1, g_1, a_1]},$$
$$b_3 = \frac{[h_2, g_2, h_1, g_1, a_1]}{[g_3, h_2, g_2, h_1, g_1, a_1]},$$

und überhaupt:

$$b_n = \frac{[h_{n-1}, g_{n-1}, h_{n-2}, \ldots h_1, g_1, a_1]}{[g_n, h_{n-1}, g_{n-1}, \ldots h_1, g_1, a_1]}$$
$$= \frac{[h_{n-1}, \ldots h_1, g_1]\,a_1 - [h_{n-1}, \ldots h_1]}{[g_n, h_{n-1}, \ldots h_1, g_1]\,a_1 - [g_n, h_{n-1}, \ldots h_1]}$$
$$= \frac{[g_1, \ldots h_{n-1}]\,a_1 - [h_1, \ldots h_{n-1}]}{[g_1, \ldots g_n]\,a_1 - [h_1, \ldots g_n]}.$$

*) Vergl. Euler *Specimen algorithmi singularis* in *Nov. Comment. Petrop. Tom. IX.*

Setzt man daher, um die Lagrangesche Bezeichnungs-Art beizubehalten:

$$[g_1, \ldots . h_{i-1}] = H_i, \quad -[h_1, \ldots . h_{i-1}] = L_i,$$
$$[g_1, \ldots . g_{i-1}] = M_i, \quad -[h_1, \ldots . g_{i-1}] = N_i,$$

so wird:

$$b_n = \frac{H_n a_1 + L_n}{M_{n+1} a_1 + N_{n+1}},$$

wonach man, wenn einmal die vier, blofs von der Structur des Linsensystems abhängigen Gröfsen $H_n, \ldots . N_{n+1}$ berechnet sind, für jedes gegebene a_1 das zugehörige b_n leicht finden kann.

§. 4. Die Berechnung der vier Gröfsen $H_n, \ldots . N_{n+1}$ läfst sich auf verschiedene Arten anstellen, von denen folgende zwei die vorzüglichsten sein möchten. Man hat:

$$H_{i+1} = [g_1, \ldots . h_{i-1}, g_i, h_i] = [g_1, \ldots . h_{i-1}, g_i] h_i - [g_1, \ldots . h_{i-1}],$$

d. i. $H_{i+1} = h_i M_{i+1} - H_i,$

und eben so ergiebt sich:

$$L_{i+1} = h_i N_{i+1} - L_i,$$
$$M_{i+1} = g_i H_i - M_i,$$
$$N_{i+1} = g_i L_i - N_i.$$

Hiernach ist bei einem System von 2 Gläsern:

$$H_2 = [g_1, h_1] = g_1 h_1 - 1, \quad L_2 = -[h_1] = -h_1,$$
$$M_3 = g_2 H_2 - M_2, \quad \text{wo } M_2 = [g_1] = g_1,$$
$$N_3 = -[h_1, g_2] = 1 - h_1 g_2;$$

bei einem System von 3 Gläsern:

$$H_3 = h_2 M_3 - H_2, \quad L_3 = h_2 N_3 - L_2,$$
$$M_4 = g_3 H_3 - M_3, \quad N_4 = g_3 L_3 - N_3;$$

u. s. w. Noch bemerke man, dafs nach diesen Formeln rückwärts:

$$H_1 = h_1 M_2 - H_2 = 1, \quad M_1 = g_1 H_1 - M_2 = 0,$$
$$N_2 = g_2 L_2 - N_3 = -1, \quad L_1 = h_1 N_2 - L_2 = 0,$$
$$N_1 = g_1 L_1 - N_2 = 1 \text{ sich findet.}$$

§. 5. Eine andere Methode, die Werthe von $H, \ldots . N$ zu berechnen, und welche Piola in der Eingangs erwähnten Abhandlung, wiewohl auf andere Weise, als es jetzt geschehen soll, entwickelt, besteht in Folgendem. Es ist:

$$H_{i+1} = [h_i, g_i, h_{i-1}, \ldots . g_2, h_1, g_1]$$
$$= \frac{[h_i, g_i, \ldots . g_1]}{[g_i, \ldots . g_1]} \cdot \frac{[g_i, h_{i-1}, \ldots . g_1]}{[h_{i-1}, \ldots . g_1]} \ldots . \frac{[g_2, h_1, g_1]}{[h_1, g_1]} \cdot \frac{[h_1, g_1]}{g_1} \cdot g_1$$
$$= (h_i, g_i, \ldots . g_1)(g_i, h_{i-1}, \ldots . g_1) \ldots . (g_2, h_1, g_1)(h_1, g_1) g_1,$$

wenn man den Bruch $\frac{[a, b, c, \ldots . k]}{[b, c, \ldots . k]} = (a, b, c, \ldots . k)$ setzt. Nach §. 3. ist aber dieser Bruch dem Kettenbruche $a - \cfrac{1}{b - \cfrac{1}{c - \text{etc.}}}$ gleich; folglich: $(a, b, c, \ldots . k) = a - \frac{1}{(b, c, \ldots . k)}$; und hiernach lassen sich die Factoren, aus welchen wir H_i zusammengesetzt dargestellt haben, ein jeder aus dem nächstvorhergehenden sehr leicht berechnen, nämlich:

$$(h_1, g_1) = h_1 - \frac{1}{g_1}, \quad (g_2, h_1, g_1) = g_2 - \frac{1}{(h_1, g_1)}, \text{ u. s. w.}$$

Setzt man daher:

$$h_1 - \frac{1}{g_1} = \alpha, \quad g_2 - \frac{1}{\alpha} = \beta, \quad h_2 - \frac{1}{\beta} = \gamma, \quad g_3 - \frac{1}{\gamma} = \delta, \text{ u. s. w.,}$$

so wird $H_2 = \alpha g_1$, $H_3 = \gamma\beta\alpha g_1$, u. s. w.

Mit Weglassung des ersten Factors von H_{i+1} erhält man M_{i+1}, und daher ist $M_2 = g_1$, $M_3 = \beta\alpha g_1$, $M_4 = \delta\gamma\beta\alpha g_1$, u. s. w.

Auf ähnliche Art ergiebt sich $-N_3 = \mu h_1$, $-N_4 = \pi\nu\mu h_1$, u. s. w.,

$$-L_2 = h_1, \quad -L_3 = \nu\mu h_1, \quad -L_4 = \varrho\pi\nu\mu h_1, \text{ u. s. w.}$$

wenn $g_2 - \frac{1}{h_1} = \mu$, $h_2 - \frac{1}{\mu} = \nu$, $g_3 - \frac{1}{\nu} = \pi$, u. s. w. gesetzt wird.

§. 6. Statt, wie bisher, den Vereinigungspunct der Strahlen vor der Brechung durch das erste Glas, in die Axe selbst fallen zu lassen, wollen wir ihn jetzt aufserhalb der Axe annehmen und ihn mit C bezeichnen. Mit ihm werden auch alle übrigen Vereinigungspuncte, welche der Reihe nach C_1, C_2, ... C_n heifsen, aufserhalb der Axe sein, und zwar so, dafs C und C_1 mit P_1; C_1 und C_2 mit P_2, u. s. w. in einer Geraden liegen (nach dem aus der Dioptrik bekannten Satze, dafs Object, Bild und Mittelpunct der Linse immer in einer Geraden enthalten sind). Nehmen wir ferner an, dafs C mit A gleich weit von der ersten Linse entfernt ist, dafs also AC auf der Axe perpendicular steht, so werden auch A_1C_1, A_2C_2 u. s. w. perpendicular auf der Axe sein. Heifsen diese Perpendikel AC, A_1C_1, ... A_nC_n resp. c, c_1, c_2, ... c_n. Sie sind insgesammt in einer durch die Axe gehenden Ebene enthalten, und positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem sie in dieser Ebene auf der einen oder andern Seite der Axe liegen.

Zur vollständigen Lösung der Aufgabe, wie aus dem durch a_1 und c bestimmten Orte von C der durch b_n und c_n bestimmte Ort von C_n (oder, was dasselbe ist, aus dem Ort und der Gröfse des Objects AC der

Ort und die Gröfse des durch alle Gläser gemachten Bildes $A_n C_n$) gefunden werden kann, hierzu ist nur noch übrig, die Abhängigkeit des c_n von a_1 und c zu zeigen, indem wir die Relation zwischen a_1 und b_n schon kennen gelernt haben.

§. 7. Weil AC, $A_1 C_1$ mit einander parallel sind, und AA_1, CC_1 sich in P_1 schneiden, so verhält sich $AC : A_1 C_1 = AP_1 : A_1 P_1 = AP_1 : -P_1 A_1$, d. i. $c : c_1 = a_1 : -b_1$, und eben so $c_1 : c_2 = a_2 : -b_2$, u. s. w., und man bekommt durch Zusammensetzung aller dieser n Verhältnisse:

$$\frac{c}{c_n} = (-1)^n \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{b_1 b_2 \ldots b_n}.$$

Es ist aber allgemein

$$b_i = \frac{H_i a_1 + L_i}{M_{i+1} a_1 + N_{i+1}} \quad (\S.\ 3.),$$

folglich

$$a_{i+1} = h_i - b_i = \frac{(h_i M_{i+1} - H_i) a_1 + h_i N_{i+1} - L_i}{M_{i+1} a_1 + N_{i+1}} = \frac{H_{i+1} a_1 + L_{i+1}}{M_{i+1} a_1 + N_{i+1}} \quad (\S.\ 4.)$$

und eben so

$$a_i = \frac{H_i a_1 + L_i}{M_i a_1 + N_i};$$

folglich

$$\frac{a_i}{b_i} = \frac{M_{i+1} a_1 + N_{i+1}}{M_i a_1 + N_i},$$

und eben so

$$\frac{a_{i-1}}{b_{i-1}} = \frac{M_i a_1 + N_i}{M_{i-1} a_1 + N_{i-1}},$$

u. s. w., folglich

$$\frac{a_i}{b_i} \cdot \frac{a_{i-1}}{b_{i-1}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_1}{b_1} = \frac{M_{i+1} a_1 + N_{i+1}}{M_1 a_1 + N_1} = M_{i+1} a_1 + N_{i+1},$$

weil $M_1 = 0$ und $N_1 = 1$ (§. 4.). Hiernach wird:

$$c_n = \frac{(-1)^n c}{M_{n+1} a_1 + N_{n+1}},$$

wodurch man, wenn schon wegen b_n der Nenner dieses Ausdruckes berechnet worden, den Werth von c_n sogleich erhält, und welcher, je nachdem er positiv oder negativ ist, ein aufrechtes oder verkehrtes Bild zu erkennen giebt.

§. 8. Wiewohl die Bestimmung des Ortes und der Gröfse des Bildes aus dem Orte und der Gröfse des Objects bei einem aus mehreren Gläsern bestehenden Systeme ungleich zusammengesetzter als bei einem einfachen Glase ist, so lassen sich doch zwischen den Erscheinungen bei Einem Glase und denen bei der Verbindung mehrerer, einige sehr merkwürdige Analogieen aufstellen, wodurch man die bei einem solchen Systeme statt habenden Gesetze sehr leicht übersehen kann.

Sei P der Mittelpunct eines Linsenglases, und in der Axe desselben A der Ort des Objects, B der Ort des Bildes; sei ferner $AP = a$, $PB = b$, die Brennweite des Glases $= f$, so ist

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}, \text{ oder } (a+b)f = ab, \text{ oder } (a-f)(b-f) = f^2,$$

und $a:b =$ dem Verhältnifs zwischen den Durchmessern von Object und Bild. — Man setze nun

$$a = \alpha + f, \quad b = \beta + f,$$

so kommt nach Elimination von a und b:

$$\alpha\beta = f^2 \text{ und } a:b = \alpha:f = f:\beta = \sqrt{\alpha}:\sqrt{\beta}.$$

Man bestimme demnach in der Axe zwei Puncte F und G so, dafs $FP = PG = f$, dafs also F und G die beiden Brennpuncte sind, und zwar F auf der das Licht empfangenden oder vordern Seite der Linse, und G auf der hintern Seite liegt, oder umgekehrt, je nachdem f positiv oder negativ, d. i. die Linse erhaben oder hohl ist. Alsdann ist

$$AF = AP - FP = a - f = \alpha \text{ und } GB = PB - PG = b - f = \beta,$$

mithin $AF.GB = f^2$ und $AP:PB = AF:FP = PG:GB = \sqrt{(AF)}:\sqrt{(GB)}$. Nennt man daher (weil für $AF = 0$, $GB = \infty$ und für $GB = 0$, $AF = \infty$ wird), den Ort F, wo das Object sich befinden mufs, wenn das Bild unendlich entfernt seyn soll, den ersten Brennpunct, und den Ort G des Bildes, wenn das Object unendlich entfernt ist, den zweiten Brennpunct, so kann man die gefundenen Formeln in folgendem Satze aussprechen.

Die mittlere Proportionallinie zwischen dem Abstande des Objects vom ersten und dem Abstande des Bildes vom zweiten Brennpuncte ist der Brennweite gleich. Dabei liegt, weil AF und GB zugleich positiv oder zugleich negativ sein müssen, das Bild rechts vom zweiten Brennpuncte, wenn das Object links vom ersten absteht, und umgekehrt. Auch verhalten sich die Durchmesser von Object und Bild wie die Quadratwurzeln aus diesen Abständen.

§. 9. Dieser Satz läfst sich nun Wort für Wort auch auf jedes aus mehrern Gläsern bestehende System anwenden. Um dieses zu zeigen, wollen wir für's Erste die in §. 3. erhaltene Relation zwischen a_1 und b_n auf die Form $\alpha\beta = f^2$ zu bringen suchen. Sei zu dem Ende

$$a_1 = p + \alpha, \quad b_n = q + \beta,$$

wo α und β, eben so wie a_1 und b_n, mit dem Orte des Objects und Bildes veränderlich, p und q von der Structur des Systems abhängige und daher constante Gröfsen seyn sollen. Substituirt man diese Werthe für a_1 und b_n in der gedachten Relation:

$$M_{n+1} a_1 b_n - H_n a_1 + N_{n+1} b_n = L_n,$$

so kommt:

$$M_{n+1}\alpha\beta + (M_{n+1}q - H_n)\alpha + (M_{n+1}p + N_{n+1})\beta = L_n - M_{n+1}pq + H_n p - N_{n+1}q.$$

Man bestimme demnach p und q so, dafs

$$M_{n+1}p + N_{n+1} = 0 \text{ und } M_{n+1}q - H_n = 0,$$

so zieht sich unsere Gleichung zusammen in:

$$M_{n+1}\alpha\beta = L_n + H_n p,$$

und wird nach Elimination von p:

$$M_{n+1}^2 \alpha\beta = L_n M_{n+1} - H_n N_{n+1}$$

$$= -[h_1, \ldots h_{n-1}]\,[g_1, h_1, \ldots h_{n-1}, g_n] + [g_1, h_1, \ldots h_{n-1}]\,[h_1, \ldots, h_{n-1}, g_n]$$

$= 1$ (§. 3.), oder $\alpha\beta = f^2$,

wenn $\frac{1}{M_{n+1}} = f$ gesetzt wird. Bezeichnen daher, wie in §. 1., P_1 und P_n die Mittelpuncte des ersten und letzten Glases, und macht man in der Axe

$$FP_1 = p = -\frac{N_{n+1}}{M_{n+1}}, \quad P_n G = q = \frac{H_n}{M_{n+1}},$$

so wird $AF = AP_1 - FP_1 = a_1 - p = \alpha$, $GA_n = P_n A_n - P_n G = b_n - q = \beta$, folglich $AF.GA_n = f^2$. Nennt man also wiederum F und G, als diejenigen zwei Puncte, in deren erstem das Object, im zweiten das Bild sich befindet, wenn das andere von beiden unendlich entfernt ist, den ersten und zweiten Brennpunct, so ist auch bei jedem System von Gläsern die mittlere Proportionallinie zwischen den Abständen des Objects und Bildes vom ersten und zweiten Brennpunct von constanter Länge $= f$, die man, analog dem Vorigen, die Brennweite des Systems nennen kann, und deren reciproker Werth $= g = [g_1, h_1, \ldots h_{n-1}, g_n]$ ist.

Was ferner das Verhältnifs zwischen den Durchmessern des Objects und des Bildes anlangt, so ist dieses (§. 7.):

$$= (-1)^n c : c_n = M_{n+1} a_1 + N_{n+1} : 1$$
$$= M_{n+1}(\alpha + p) + N_{n+1} : 1$$
$$= M_{n+1}\alpha : 1, \text{ wegen } M_{n+1}p + N_{n+1} = 0,$$
$$= \alpha : f = f : \beta = \sqrt{\alpha} : \sqrt{\beta}$$

$= \sqrt{(AF)} : \sqrt{(GA_n)}$, eben so wie im vorigen §. bei der einfachen Linse.

Man kann sich nach diesen Formeln leicht eine übersichtliche Vorstellung verschaffen von dem Gange des Bildes und der Veränderung seiner Gröfse, während das Object längs der Axe hin bewegt wird. Heifsen X und Y zwei unendlich entfernte Puncte der Axe, X nach der Seite zu liegend, von welcher das Licht herkommt, Y nach der Seite zu, nach welcher es hingeht. Ist nun das Object A in X, so befindet sich das Bild B (statt A_n) in G und ist unendlich klein. Wird hierauf A von X nach F bewegt, so geht B mit immer wachsender Geschwindigkeit und wachsendem Durchmesser von G nach Y, wo es unendlich grofs wird. Es macht darauf B einen Sprung durch das Unendliche von Y nach X, verkehrt dabei seine Lage und geht mit abnehmender Geschwindigkeit und abnehmendem Durchmesser von X nach G zurück, während A von F nach Y fortgeführt wird.

Allerdings ist der bei weitem gröfste Theil des letztern Weges von A, wo A hinter dem ersten Glase sich befindet (auch wohl ein Theil des erstern Weges von A, wenn F hinter dem ersten Glase liegt), nicht unmittelbar möglich, weil die von A herkommenden Strahlen in der Richtung von X nach Y zunächst das erste Glas treffen sollen. Man sieht aber von selbst, dafs man, um dieser scheinbaren Unmöglichkeit zu begegnen, nur die Strahlen des vor das erste Glas gestellten Objects, mittelst anderer Gläser oder auch Spiegel, convergirend auffallen lassen darf, welche Strahlen erst hinter dem ersten Glase zu einem die Stelle des Objects nunmehr vertretenden Bilde sich vereinigen würden. Übrigens bemerke man noch das aus dem Vorigen leicht abzunehmende allgemeine Gesetz, dafs die Bewegung von Object und Bild längs der Axe immer nach einerlei Richtung geschieht.

§. 10. Aufser den zwei Brennpuncten F, G giebt es bei jedem Linsen-System noch vier andere merkwürdige Puncte, die ich mit Q, Q', R, R' bezeichnen will, und welche paarweise von den beiden Brennpuncten um die Brennweite des Systems abstehen, so dafs

$$Q'F = FQ = RG = GR' = f.$$

Da hiernach $QF.GR = Q'F.GR' = f^2$, so sind (§. 9.) R, R' die Örter des Bildes, wenn das Object sich resp. in Q, Q' befindet. Auch ist dann beide Male das Bild mit dem Object von gleicher Gröfse, nur das eine Mal aufrecht, das andere Mal verkehrt. Man hat nämlich, wenn das Object in Q ist:

$$c : c_n = (-1)^n (\alpha = QF) : f = (-1)^n : -1,$$

und wenn das Object in Q' ist:

$$c : c_n = (-1)^n Q'F : f = (-1)^n : 1.$$

Befindet sich also das Object in Q, (Q'), so ist das Bild aufrecht oder verkehrt, je nachdem die Zahl der Gläser ungerade oder gerade (gerade oder ungerade) ist.

Will man zwei beliebige zusammengehörige Örter von Object A und Bild B durch ihre Abstände von diesen Puncten bestimmen, so hat man:

$$f^2 = AF.GB = (AQ+QF)(GR+RB) = (AQ-f)(RB-f),$$

woraus

$$\frac{1}{AQ} + \frac{1}{RB} = \frac{1}{f}$$

folgt; und eben so erhält man in Bezug auf Q' und R':

$$\frac{1}{Q'A} + \frac{1}{BR'} = \frac{1}{f}.$$

Noch fliefst aus der ersten dieser zwei Gleichungen:

$$\frac{AQ}{RB} = \frac{AQ-f}{f} = \frac{AF}{f},$$

und aus der zweiten:

$$\frac{Q'A}{BR'} = -\frac{AF}{f};$$

folglich

$$\frac{AQ}{RB} = -\frac{Q'A}{BR'} = \frac{\alpha}{f} = \frac{(-1)^n c}{c_n}, \quad \text{und} \quad \frac{QA}{AQ'} = -\frac{RB}{BR'}.$$

Die Linien QQ' und RR' werden daher, erstere durch das Object, letztere durch das Bild, nach Verhältnissen getheilt, die einander gleiche und entgegengesetzte Exponenten haben, so dafs, je nachdem das Object innerhalb oder aufserhalb QQ' liegt, das Bild aufserhalb oder innerhalb RR' fällt. Nächstdem verhalten sich die Durchmesser von Object und Bild wie ihre resp. Abstände von Q und R, oder von Q' und R'.

Hat man es nur mit einem Glase zu thun, so fallen, weil hier $FG = 2f$ ist, die Puncte Q und R mit dem Mittelpuncte P des Glases zusammen. Schreibt man demnach in dem Vorigen, P für Q sowohl als für R, so erhält man die aus den Elementen der Dioptrik schon bekannten Formeln:

$$\frac{1}{AP} + \frac{1}{PB}\left(= \frac{1}{Q'A} + \frac{1}{BR'}\right) = \frac{1}{f}, \quad -\frac{c}{c_1} = \frac{AP}{PB} = -\frac{Q'A}{BR'},$$

wo $Q'P = PR' = 2f$. Man sieht daher, wie auch diese nur für Ein Glas

geltenden Formeln auf jedes beliebige System von Gläsern ausgedehnt werden können.

Von Fernröhren.

§. 11. Unter einem Fernrohr soll hier überhaupt ein System von Gläsern verstanden werden, bei welchem parallel auf das erste Glas fallende Strahlen von dem letzten Glase auch parallel wieder ausgehen, oder, was dasselbe ist, wo für ein unendlich entferntes Object auch das Bild unendlich entfernt liegt, wo also beide Brennpuncte des Systems unendlich entfernt sind, mithin die Brennweite $=f$ unendlich grofs, also $M_{n+1}=0$ ist. Und in der That geht die allgemeine Gleichung zwischen a_1 und b_n (§. 4.), für $M_{n+1}=0$, über in:

$$b_n = \frac{H_n a_1 + L_n}{N_{n+1}},$$

wo für $a_1=\infty$ auch $b_n=\infty$ wird. Die Gleichung

$$M_{n+1} = 0$$

ist daher die nothwendige und hinreichende Bedingung, bei welcher ein System von Gläsern als Fernrohr dienen kann.

§. 12. Die Gleichung zwischen den Elementen a_1 und b_n, wodurch die Örter des Objects und seines Bildes bestimmt werden, ist demnach bei dem Fernrohr vom ersten Grade oder linear, während sie bei jedem andern System von Gläsern vom zweiten Grade, oder, um mich bestimmter auszudrücken, hyperbolisch war, indem die Gleichung zwischen diesen Elementen (a_1 und b_n §. 3., oder α und β §. 9., oder AQ und RB §. 10.), als Abscisse und Ordinate betrachtet, einer Hyperbel angehörte.

Stellt man sich daher das Object längs der Axe sich bewegend vor, so ist bei dem Fernrohr die Geschwindigkeit des Bildes der des Objects proportional. Sind nämlich A und B, A' und B' zwei Paare zusammengehöriger Örter von Object und Bild, so hat man:

$$N_{n+1}.P_nB = H_n.AP_1 + L_n,$$
$$N_{n+1}.P_nB' = H_n.A'P_1 + L_n,$$

folglich, nach Abzug der untern Gleichung von der obern:

$N_{n+1}.B'B = H_n.AA'$, und $AA' : BB' = -N_{n+1} : H_n = N_{n+1}^2 : 1 = 1 : H_n^2$,

indem die Gleichung $L_nM_{n+1} - H_nN_{n+1} = 1$ (§. 9.), für das Fernrohr in $-H_nN_{n+1}=1$ übergeht. Zugleich sieht man daraus, dafs, eben so wie bei einem Linsensystem überhaupt (§. 9.), auch beim Fernrohr die Bewegung von Object und Bild immer nach einerlei Richtung geschieht.

Dasselbe Verhältnifs findet auch zwischen den Abständen des Objects und Bildes vom Fernrohr Statt, wenn das eine, und folglich auch das andere, unendlich entfernt ist. Denn je mehr diese Abstände zunehmen, um so näher wird:

$$N_{n+1} : H_n = AP_1 : P_nB = AD : DB = AD : -BD$$

und daher

$$AD : BD = N_{n+1}^2 : 1 = 1 : H_n^2,$$

wo D irgend einen Punct des Fernrohrs selbst, oder in dessen Nähe, bezeichnet.

§. 13. Die Gleichung zwischen den Durchmessern des Objects und des Bildes (§. 7.) wird für das Fernrohr:

$$N_{n+1} c_n = (-1)^n c,$$

woraus wir schliefsen, dafs, welches auch der Abstand des Objects vom Fernrohr sein mag, sein Bild doch immer dieselbe Gröfse behält.

Liegen Object und Bild unendlich entfernt, so ist das Verhältnifs ihrer scheinbaren Durchmesser:

$$= \frac{c}{AD} : \frac{c_n}{BD} = \frac{c}{c_n} \cdot \frac{BD}{AD} = \frac{N_{n+1}}{(-1)^n} \cdot \frac{1}{N_{n+1}^2} = 1 : (-1)^n N_{n+1}.$$

Ist also N_{n+1} absolut gröfser als 1, so wird das Fernrohr weit entlegene Gegenstände nicht nur deutlich, sondern auch, wie es sein practischer Zweck erfordert, vergröfsert zeigen, und diese Vergröfserung durch die Zahl N_{n+1} gegeben sein. Dabei ist das Bild aufrecht oder verkehrt, je nachdem bei einer geraden (ungeraden) Anzahl von Gläsern die Zahl N_{n+1} positiv oder negativ (negativ oder positiv) gefunden wird.

Versteht man unter der Vergröfserung im weitern Sinne, den Exponenten des Verhältnisses zwischen den scheinbaren Durchmessern von Bild und Object, wenn beide unendlich entfernt sind, so läfst sich das Bisherige in folgendem Satze zusammenfassen.

Die Geschwindigkeit des Objects, dividirt durch die Geschwindigkeit des Bildes, ist, wenn beide Geschwindigkeiten auf die Axe des Fernrohrs bezogen werden, dem Quadrate der Vergröfserung gleich. Werden sie aber nach einer auf der Axe normalen Richtung geschätzt, so ist dieser Quotient der Vergröfserung selbst gleich. Oder:

Der Durchmesser des Objects, dividirt durch den Durchmesser des Bildes, giebt, wenn beide Durchmesser parallel

mit der Axe sind, das Quadrat der Vergröfserung; die Vergröfserung selbst aber, wenn die auf der Axe normalen Durchmesser genommen werden.

Es bedarf wohl keiner Erinnerung, dafs im Vorigen unter den Durchmessern blofs die auf der Axe normalen, als die allein gut wahrnehmbaren gemeint sind. Wiewohl also von diesen Durchmessern der des Bildes immer N_{n+1} mal kleiner ist, als der des Objects, auch wenn das Object sehr weit entfernt liegt, so erscheint doch in diesem Falle der erstere Durchmesser N_{n+1} mal gröfser als der letztere, weil dann das Bild N^2_{n+1} mal näher ist als das Object.

Der Satz, dafs der Durchmesser des Objects, dividirt durch den Durchmesser des Bildes, die Vergröfserung giebt, liegt übrigens dem von Adams erfundenen Auzometer zum Grunde, wo zum Object das Objectivglas selbst, oder vielmehr dessen Einfassung, dient *).

§. 14. Es ist im Obigen gezeigt worden, wie die Haupt-Eigenschaften eines beliebigen Systems von Gläsern ganz analog denen sind, welche schon jedes einfache erhabene oder hohle Glas besitzt; wie die Bestimmung von Ort und Gröfse des Bildes aus dem Ort und der Gröfse des Bildes mittelst der Brennweite und der Brennpuncte, nach einerlei Formeln bei einfachen Linsen und bei ganzen Systemen geschehen kann. Auf gleiche Art wird nun auch der jetzt betrachtete specielle Fall, wo die Brennweite des Systems unendlich grofs ist, sein Analogon unter den einfachen Gläsern haben, — ein Glas mit einer ebenfalls unendlich grofsen Brennweite, d. h. ein Glas, dessen zwei Seiten einander parallel sind. Was daher ein solches Glas unter den einfachen Linsen ist, dieselbe Stelle nimmt das Fernrohr unter Systemen von Linsen ein. So wie bei einem Fernrohr das Bild für jeden Ort des Objects einerlei Gröfse hat, und sich gleichförmig bewegt, wenn das Object um gleiche Räume fortgerückt wird, so finden sich dieselben Eigenschaften auch bei dem

---

*) In Gehler's „Physik. Wörterbuche," Artic. Auzometer, findet sich bei Erklärung des Princips, worauf dieses Instrument beruht, eine kleine Unrichtigkeit, die auch in die neue Bearbeitung dieses Wörterbuchs übergegangen ist, und welche darin besteht, dafs bei dem astronomischen Fernrohr mit zwei Gläsern, als auf welches daselbst bei Erläuterung des Princips allein Rücksicht genommen wird, das Bild der Objectivfassung auf das Ocular selbst fallen soll, da es doch, wie dort später ebenfalls bemerkt wird, dahin fällt, wo sonst das Auge hin gehalten werden mufs. Anm. d. Verf.

Glase mit parallelen Seiten vor, indem hier Bild und Object immer zusammenfallen, und wobei folglich die Vergröfserungszahl $=1$ ist.

Es werde hier noch bemerkt, dafs blofs aus Hohlgläsern ein Fernrohr zu construiren unmöglich ist. Sind nämlich $g_1, g_2, g_3, \ldots$ insgesammt negativ ($h_1, h_2, h_3, \ldots$ sind ihrer Natur nach immer positiv), so findet sich aus den Formeln sowohl in §. 4. als in §. 5., M_2 negativ, M_3 positiv, M_4 negativ, M_5 positiv, und so fort abwechselnd, also $(-1)^n M_{n+1}$ immer positiv, und niemals $=0$.

§. 15. Der Vollständigkeit wegen ist es noch übrig, zu zeigen, wie bei einem Fernrohr die für ein angenommenes Gesichtsfeld erforderlichen Öffnungen der Gläser und der vortheilhafteste Ort des Auges bestimmt werden können. Zu diesem Ende wollen wir für's Erste bei einem System von Gläsern überhaupt den Weg eines, vor seiner Brechung durch das erste Glas die Axe in A treffenden Strahles näher untersuchen. Es begegne dieser Strahl dem 1sten, 2ten, ... $n$ten Glase resp. in $S_1, S_2, \ldots S_n$.

Weil alle vom Puncte A der Axe ausgehende Strahlen, nach ihrer Brechung durch das erste Glas, den Punct A_1 der Axe zum Vereinigungspunct haben, so mufs auch S_1S_2 durch A_1 gehen, indem S_1S_2 der Weg unseres von A kommenden Strahles unmittelbar nach seinem Durchgange durch das erste Glas ist. Aus ähnlichem Grunde müssen S_2 und S_3 mit A_2, u. s. w. in einer Geraden liegen, und der Strahl wird, nach seiner Brechung durch das letzte Glas, der Axe in A_n begegnen. Wenn also die mit einander parallelen Linien $P_1S_1, P_2S_2, P_3S_3, \ldots$ positiv oder negativ genommen werden, je nachdem die Puncte S_1, S_2, S_3, auf der einen oder andern Seite der Axe liegen, so mufs sich verhalten $P_1S_1 : P_2S_2 = A_1P_1 : A_1P_2 = -P_1A_1 : A_1P_2$, also wenn wir noch $P_1S_1 = s_1$, $P_2S_2 = s_2$, u. s. w. setzen:

$$s_1 : s_2 = -b_1 : a_2,$$

und eben so

$$s_2 : s_3 = -b_2 : a_3,$$

u. s. w. bis

$$s_{n-1} : s_n = -b_{n-1} : a_n.$$

Werden diese $n-1$ Proportionen in einander multiplicirt, so kommt:

$$s_1 : s_n = (-1)^{n-1} b_1 b_2 \ldots b_{n-1} : a_2 a_3 \ldots a_n \text{ und}$$

$$b_n s_1 : a_1 s_n = (-1)^{n-1} b_1 \ldots b_n : a_1 \ldots a_n$$

$$= (-1)^{n-1} : M_{n+1} a_1 + N_{n+1} \text{ (§. 7.)},$$

und wenn man darin noch für b_n seinen Werth aus §. 3. substituirt:

$$(-1)^{n-1} a_1 s_n = (H_n a_1 + L_n) s_1,$$

woraus man, wenn a_1 und s_1 gegeben sind, die Werthe von s_2, s_3, ... s_n unabhängig von einander finden kann, indem man nur n nach und nach $= 2, 3, \ldots$ zu setzen hat.

Seien endlich noch t, t_1, t_2, ... t_{n-1}, t_n die Winkel, welche die Theile des Strahls: AS_1, S_1S_2, S_2S_3, ... $S_{n-1}S_n$, S_nA_n mit der Axe machen, und jeder der Winkel, t_1 z. B., positiv oder negativ, je nachdem die Linie S_1S_2 in ihrer geradlinigen Verlängerung über S_2 hinaus nach der Seite zu von der Axe divergirt, wo die positiven oder negativen s liegen. Alsdann ist wegen der Kleinheit dieser Winkel:

$$t = \frac{P_1 S_1}{AP_1} = \frac{s_1}{a_1}, \quad t_1 = \frac{P_1 S_1}{A_1 P_1} = \frac{P_2 S_2}{A_1 P_2} = -\frac{s_1}{b_1} = \frac{s_2}{a_2},$$

$$t_2 = -\frac{s_2}{b_2} = \frac{s_3}{a_3}, \text{ u. s. w. } t_{n-1} = -\frac{s_{n-1}}{b_{n-1}} = \frac{s_n}{a_n}, \quad t_n = -\frac{s_n}{b_n};$$

und man erhält, wenn man die hieraus folgenden Werthe für a_1 und b_n in die obigen Gleichungen substituirt:

$$(-1)^n t_n = M_{n+1} s_1 + N_{n+1} t,$$
$$(-1)^{n-1} s_n = H_n s_1 + L_n t.$$

Die erste dieser zwei Formeln wird für das Fernrohr: $(-)^n t_n = N_{n+1} t$, und giebt damit zu erkennen, dafs Parallelstrahlen, welche vor dem Eintritt in das erste Glas die Axe unter einem Winkel $= t$ schneiden, nach der letzten Brechung wieder parallel ausfahren und mit der Axe einen Winkel $= N_{n+1} t$ machen, dafs also N_{n+1} die Vergröfserungszahl ist, wie schon in §. 13. auf andere Weise gezeigt wurde.

Die zweite Formel lehrt, dafs (wenn ein Strahl, welcher vor dem Eintritt in das erste Glas die Axe unter einem Winkel $= t$ schneidet und dieses Glas in einer Entfernung von der Axe, $= s_1$, trifft, auch den übrigen Gläsern begegnen können soll), die Halbmesser des zweiten, dritten, u. s. w. nicht kleiner sein dürfen als:

$$H_2 s_1 + L_2 t, \quad H_3 s_1 + L_3 t, \text{ u. s. w.}$$

Würde aber der Strahl erst nach seinem Eintritte in das erste Glas, ohne von diesem gebrochen zu werden, die Axe unter dem Winkel t schneiden, so sind die kleinstmöglichen Halbmesser:

$$-H_2 s_1 + L_2 t, \quad -H_3 s_1 + L_3 t, \text{ u. s. w.}$$

Für einen mit der Axe parallel einfallenden und das erste Glas in dem Abstande $= s_1$ von der Axe treffenden Strahl werden diese Halb-

messer: $H_2 s_1$, $H_3 s_1$, $H_4 s_1$ u. s. w.; und für einen Strahl, welcher durch den Mittelpunct des ersten Glases selbst geht und mit der Axe einen Winkel $= t$ macht: $L_2 t$, $L_3 t$, $L_4 t$, u. s w.

§. 16. Wenden wir diese für jedes System von Gläsern geltende Bestimmungen auf das Fernrohr an. Da hier alle von einem und demselben Puncte des Objects ausgehenden Strahlen als parallel mit einander anzusehen sind, und daher die Axe unter gleichem Winkel, welcher $= t$ sei, schneiden, so darf unter der Voraussetzung, dafs alle auf das erste Glas, dessen Halbmesser $= s_1$, fallende Strahlen auch das zweite treffen sollen, der Halbmesser des zweiten nicht kleiner sein als die absolut gröfsere der beiden Gröfsen: $H_2 s_1 + L_2 t$, $-H_2 s_1 + L_2 t$, und so fort bei den folgenden Gläsern. Da aber unter allen den das erste Gas treffenden Strahlen sich diejenigen am vollkommensten in einem Puncte des Bildes vereinigen, welche nahe um den Mittelpunct des Glases einfallen, so ist man zufrieden, wenn nur die Axe des auf das erste Glas stofsenden Strahlencylinders, oder der Hauptstrahl, die folgenden Gläser ungehindert durchgehen kann. Soll also ein von der Axe des Rohrs um den Winkel t abliegender Punct durch dasselbe noch gut gesehen werden können, d. h. soll t der scheinbare Halbmesser des Gesichtsfeldes sein, so müssen die Halbmesser des 2ten, 3ten, u. s. w. Glases, unabhängig vom Halbmesser des 1sten, die Werthe $L_2 t$, $L_3 t$, ... $L_n t$ haben.

§. 17. Alle Hauptstrahlen haben als Strahlen, welche von einem und demselben Puncte, nämlich dem Mittelpuncte des ersten Glases, herkommen, nach ihrer Brechung durch das letzte Glas einen Vereinigungspunct, dessen Abstand vom letzten Glase, $= b_n$, gefunden wird, wenn man in der Gleichung zwischen a_1 und b_n (§. 3.), $a_1 = 0$ setzt. Dies giebt:

$$b_n = \frac{L_n}{N_{n+1}}.$$

Findet sich hieraus b_n positiv, so liegt dieser Vereinigungspunct, oder das Bild des ersten Glases, hinter dem letzten Glase, und das Auge wird, dahin gebracht, seine vortheilhafteste Stellung haben, indem es nur hier alle Hauptstrahlen zugleich empfangen kann, und in gröfserer sowohl als geringerer Entfernung vom letzten Glase, einen durch die Einfassungen der Gläser verminderten Gesichtskreis hat. Erhält man b_n negativ, so liegt der Vereinigungspunct der Hauptstrahlen vor dem letzten Glase, und es bleibt nichts übrig, als das Auge demselben möglichst nahe zu

bringen, wo es allerdings nur noch Hauptstrahlen von den Objecten empfangen kann, deren Winkel-Abstand von der Axe, = dem Halbmesser der Pupille, dividirt durch b_n, ist.

Ist das Fernrohr blofs aus erhabenen Gläsern zusammengesetzt, sind also, eben so wie $h_1, h_2, \ldots$, auch $g_1, g_2, \ldots$ insgesammt positiv, so liegt der Vereinigungspunct aller Hauptstrahlen stets hinter dem letzten Glase, oder es ist für $a_1 = 0$, b_n immer positiv. Dies läfst sich auf folgende Weise darthun.

Mit Anwendung der in §. 5. gebrauchten Bezeichnung $(a, b, c, \ldots)$ für den Kettenbruch $a - \frac{1}{b - \text{etc.}}$, und vorausgesetzt, dafs $a, b, c, d, \ldots$ insgesammt positive Gröfsen sind, hat man:

$$a > a - \frac{1}{b} = (a, b), \text{ und eben so } b > (b, c),$$

folglich

$$(a, b) = a - \frac{1}{b} > a - \frac{1}{(b, c)} = (a, b, c), \text{ und eben so } (b, c) > (b, c, d),$$

folglich

$$(a, b, c) = a - \frac{1}{(b, c)} > a - \frac{1}{(b, c, d)} = (a, b, c, d), \text{ u. s. w.,}$$

also

$$a > (a, b) > (a, b, c) > (a, b, c, d) > \ldots.$$

Nun ist beim Fernrohr $M_{n+1} = [g_n, h_{n-1}, \ldots h_1, g_1] = 0$, also auch

$$\frac{[g_n, h_{n-1}, \ldots h_1, g_1]}{[h_{n-1}, \ldots h_1, g_1]} = (g_n, h_{n-1}, \ldots h_1, g_1) = 0.$$

Zugleich ist aber, weil alle die Gröfsen $g_1, h_1, g_2, \ldots$ positiv sind, dem oben Erwiesenen zufolge: $(g_n, \ldots h_1) > (g_n, \ldots h_1, g_1)$; mithin $(g_n, h_{n-1}, \ldots h_1)$ positiv, d. i. $\frac{[g_n, h_{n-1}, \ldots h_1]}{[h_{n-1}, \ldots h_1]} = \frac{N_{n+1}}{L_n} = \frac{1}{b_n}$ eine positive Gröfse.

§. 18. Es bietet sich uns hier noch eine merkwürdige Form der Bedingungsgleichung dar, unter welcher ein System von Gläsern ein Fernrohr abgiebt. Soll nämlich aus den Gläsern, von deren Brennweiten die Reciproken $= g_1, g_2, \ldots g_n$ sind, ein Fernrohr construirt werden, so müssen sie in solchen Abständen $= h_1, h_2, \ldots h_{n-1}$ von einander gestellt werden, dafs $(g_n, \ldots h_1, g_1) = 0$, oder, was wegen $[g_n, \ldots g_1] = [g_1, \ldots g_n]$ auf dasselbe hinauskommt, dafs $[g_1, h_1, \ldots g_n] = 0$; dafs also

$$0 = g_n - \cfrac{1}{h_{n-1} - \cfrac{1}{g_{n-2} - \text{etc.} - \cfrac{1}{h_1 - \cfrac{1}{g_1}}}} \quad \text{oder} \quad 0 = g_1 - \cfrac{1}{h_1 - \cfrac{1}{g_2 - \text{etc.} - \cfrac{1}{h_{n-1} - \cfrac{1}{g_n}}}}$$

zwei mit einander identische Gleichungen, von denen die erstere auch unmittelbar aus den Kettenbrüchen in §. 3. folgt, wenn man darin a_1 sowohl als b_n, $= \infty$ setzt.

Auch die Vergröfserungszahl eines Fernrohrs läfst sich leicht in Kettenbruchform darstellen. Es ist nämlich, wegen $-H_n N_{n+1} = 1$, das Quadrat der Vergröfserung

$$= N_{n+1}^2 = -\frac{N_{n+1}}{H_n} = -\frac{N_{n+1}}{L_n} : \frac{H_n}{L_n}$$

$$= \frac{[g_n, h_{n-1}, \ldots . h_1]}{[h_{n-1}, \ldots . h_1]} : \frac{[g_1, h_1, \ldots . h_{n-1}]}{[h_1, \ldots . h_{n-1}]} = (g_n, \ldots . h_1) : (g_1, \ldots . h_{n-1}).$$

Die Vergröfserung ist daher die mittlere Proportionalzahl zwischen den zwei Kettenbrüchen:

$$g_n - \cfrac{1}{h_{n-1} - \text{etc.} - \cfrac{1}{g_2 - \cfrac{1}{h_1}}} \quad \text{und} \quad \cfrac{1}{g_1 - \cfrac{1}{h_1 - \text{etc.} - \cfrac{1}{g_{n-1} - \cfrac{1}{h_{n-1}}}}}$$

deren ersterer zugleich den reciproken Werth der Entfernung des Auges vom letzten Glase giebt.

§. 19. Die Identität der zwei Bedingungsgleichungen für das Fernrohr: $(g_n, \ldots . g_1) = 0$ und $(g_1, \ldots . g_n) = 0$, von denen die eine aus der andern durch Umkehrung der Aufeinanderfolge der Elemente hervorgeht, hängt damit zusammen, dafs jedes zu einem Fernrohr geordnete System von Gläsern auf doppelte Art als Fernrohr wirken kann, nachdem man das Licht von der einen oder von der andern Seite her durchgehen läfst; so wie bei einem System von Gläsern überhaupt der Ort und die Gröfse des Objects mit Ort und Gröfse des Bildes sich gegenseitig vertauscht, wenn die Richtung der Strahlen in die entgegengesetzte verwandelt wird. Der Grund dieser Erscheinung liegt in dem bekannten Satze, dafs der gebrochene Weg eines Strahles aus einem durchsichtigen Mittel in ein anderes zugleich als Weg einem Strahle aus dem letztern Mittel in das erstere dienen kann. Auch stimmen damit, wie gehörig, die im Obigen

entwickelten Formeln überein. So mufs die Gleichung in §. 3. zwischen a_1 und b_n dieselbe bleiben, wenn man darin $g_1, h_1, \ldots . g_n$ mit $g_n, \ldots . h_1$, g_1 und a_1 mit b_n gegenseitig vertauscht. In der That geht durch diese Vertauschung $H_n = [g_1, \ldots . h_{n-1}]$ in $[g_n, \ldots . h_1] = -N_{n+1}$ über, und umgekehrt; L_n und M_{n+1} bleiben ungeändert, und die Gleichung wird damit:

$$a_1 = \frac{-N_{n+1} b_n + L_n}{M_{n+1} b_n - H_n},$$

die, wie man leicht sieht, mit der dortigen identisch ist.

Auf gleiche Art mufs die Relation in §. 7. zwischen c_n, c, a_1 zu einer gleichbedeutenden führen, wenn man diese Gröfsen in c, c_n, b_n und $g_1, \ldots . g_n$ in $g_n, \ldots . g_1$ verwandelt. Man erhält damit:

$$(M_{n+1} b_n - H_n) c = (-1)^n c_n,$$

und durch Verbindung dieser Gleichung mit der dortigen:

$$(M_{n+1} a_1 + N_{n+1})(M_{n+1} b_n - H_n) = 1,$$

welches eine neue Form der Gleichung zwischen a_1 und b_n in §. 3. ist, und wovon sich die eine in die andere, mit Hülfe der Gleichung $LM - HN = 1$, verwandelt.

Dafs bei Umkehrung des Systems die beiden Brennpuncte desselben (§. 9.) ihre relative Lage gegen die Gläser behalten, nur ihre Namen verwechseln, so dafs der vorherige erste nun zum zweiten, und umgekehrt, wird: dies folgt leicht aus der dortigen Definition dieser Puncte, so wie auch aus den daselbst für ihre Abstände vom ersten und letzten Glase gegebenen Werthen.

Endlich leuchtet ein, dafs, da durch Umkehrung eines Systems H_n in $-N_{n+1}$, und umgekehrt, übergeht, und da beim Fernrohr $-H_n N_{n+1} = 1$, und $(-1)^n N_{n+1}$ die Vergröfserungszahl ist (§. 12. 13.), dafs durch Umkehrung eines Fernrohrs die Vergröfserung desselben in eine eben so vielmalige Verkleinerung, und umgekehrt, verwandelt wird, dafs aber beide Male die Bilder sich in derselben (aufrechten oder verkehrten) Stellung zeigen müssen. Auch folgt der erste Theil dieses Satzes unmittelbar aus der Betrachtung der durch zwei Kettenbrüche ausgedrückten Vergröfserung, von denen ein jeder durch Verwechselung von $g_1, \ldots . g_n$ mit $g_n, \ldots . g_1$, in den reciproken Werth des andern verwandelt wird.

9.

Mémoire sur le mouvement d'un corps rigide, soutenu par un plan fixe.

(Par Mr. *A. A. Cournot*, Dr. ês sciences à Paris.)

Mr. Poisson a donné, dans son „Traité de Mécanique (liv. III. chap. VI.)," les équations du mouvement d'un corps solide sur un plan fixe, en se bornant (comme l'exigeait la nature de cet ouvrage) à considérer deux cas principaux: savoir, celui où le corps roule sur le plan, en le touchant par un point variable de sa surface supposée continue, et celui où le contact avec le plan a lieu par une pointe, c'est-à-dire par un point où il y a discontinuité dans sa surface. Ce savant géomètre a montré comment l'on pouvait déduire des intégrales des aires et des forces vives les solutions approximatives que le problème comporte dans certains cas encore plus restreints, comme lorsqu'il s'agit d'un ellipsoïde, dérangé tant soit peu de sa position d'équilibre, et qui oscille autour d'un de ses axes principaux.

En suivant une marche analogue, il est aisé d'obtenir les équations differentielles du mouvement dans toutes les autres hypothèses. Si le corps ne s'appuie pas sur plus de trois points, ou sur plus de deux en ligne droite, on a le nombre d'équations suffisant pour déterminer séparément toutes les inconnues du problème: savoir, les six élémens du double mouvement de translation et de rotation, et les pressions souffertes par le plan. Si, au contraire, le nombre des points d'appui excède ceux qu'on vient de dire, les équations fournies par le principe de d'Alembert suffisent bien pour detérminer les six élémens du mouvement, mais non pour assigner les valeurs individuelles des pressions: fait absolument semblable à ce qu'on observe dans toutes les questions analogues de mécanique. Enfin si le corps est en contact avec le plan par des élémens linéaires ou superficiels, la pression en chaque élément devient (selon les principes ordinaires de mécanique) une fonction différentielle, inconnue, des coordonnées de l'élément; mais les intégrales définies qui en dépen-

dent, et qui entrent dans les équations du mouvement, ont toujours une valeur determinée.

Tout cela n'a besoin en quelque sorte que d'être indiqué, et l'on sait que la difficulté consiste dans l'intégration complète des équations du mouvement, qu'on n'effectue en général que par des méthodes d'approximation laborieuses, auxquelles l'importance seule des applications peut donner de l'intérêt. Mais il est un autre point de vue, sous lequel le problème offre matière a un assez grand nombre de remarques, qui ne nous semblent point indignes de fixer un moment l'attention, et qui font le sujet principal de ce mémoire.

En effet, il est naturel de supposer que le corps, soit qu'il y ait continuité dans sa surface et qu'il roule sur le plan fixe, soit qu'il y ait au contraire discontinuité et qu'il glisse sur un angle ou une arête de cette surface, peut toujours se détacher du plan. Nous prendrons ce plan pour celui des x, y, et nous compterons les z positives du côté où le corps se trouve placé. Les forces auxiliaires qu'on applique à celui-ci pour tenir compte de la résistance du plan seront représentées par des ordonnées parallèles aux z: elles mesureront les pressions ou percussions que le plan supporte, selon que le corps est soumis à des forces continues, telles que la pesanteur, ou à des forces instantanées, telles que celles développées par le choc. Ceci posé, il est clair qu'au moyen de ce que le corps peut se détacher du plan, les pressions ou percussions sont assujéties à conserver des valeurs positives, et qu'aussitôt que cette condition cessera d'être satisfaite pour quelques-uns des points de contact, le plan cessera de gêner en ces points le mouvement du corps*). Il faut donc joindre aux équations du mouvement les conditions d'inégalité exprimant que les pressions ou percussions, en chaque point de contact, doivent rester positives; mais afin d'étudier plus simplement les conséquences de ce principe, il convient d'examiner d'abord l'hypothèse, où le corps, en contact avec le plan, est tiré du repos par des forces instantanées. De cette manière on n'a à considérer que des relations algébriques de l'ordre

*) Nous avons indiqué, dans le „Bulletin des sciences mathématiques, tome VIII. page 165.," comment le principe des vitesses virtuelles s'étend aux cas tels que celui-ci, où les liaisons du système sont exprimées par des inégalités; ce qui comprend la démonstration d'un théorème posé par Carnot d'une manière assez confuse, et auquel on avait fait peu d'attention.

le plus simple, et l'on ne saurait être arrêté dans l'application des formules par des difficultés d'intégration.

On trouve ainsi, comme premier résultat, que lorsqu'on a le nombre d'équations suffisant pour déterminer individuellement toutes les percussions, et que quelques-unes, ou même toutes, se présentent affectées du signe négatif, ce n'est point en général une raison suffisante pour affirmer que les points correspondans n'exerceront aucune percussion et se détacheront du plan dans le premier instant du mouvement; mais qu'il faut essayer au besoin plusieurs hypothèses, en faisant successivement abstraction de la résistance d'un ou de plusieurs points, jusqu'à ce que les valeurs de toutes les percussions conservées dans le calcul se présentent affectées du signe positif.

Si l'on n'a pas le nombre d'équations nécessaire pour déterminer individuellement les percussions en chaque point, ou si le contact a lieu entre des portions de lignes ou d'aires planes, il est utile de recourir à une considération indirecte, d'où l'on déduit l'expression très-simple des conditions qui doivent être satisfaites, pour que la percussion puisse être censée positive, relativement à tous les points ou à tous les élémens du contact.

Chacun des points par lesquels le corps touche le plan fixe, à l'instant où il subit l'application des forces instantanées, donne naissance à une double condition: car il faut ou que la percussion en ce point soit positive, et dans ce cas que la vitesse du point, décomposée perpendiculairement au plan (ce que nous appellerons, pour abréger, la vitesse normale) soit nulle; ou que la percussion à son tour soit nulle, et que la vitesse normale soit positive. On regardera peut être les développemens de cette double condition comme une application intéressante du calcul des inégalités: calcul beaucoup moins cultivé que celui des équations, en général plus embarrassé dans sa marche, mais qui jouit aussi d'avantages qui lui sont propres. Il arrive en effet que par suite de l'indétermination attachée aux conditions d'inégalité, celles-ci comportent souvent des simplifications remarquables. Le calcul des inégalités est, comme celui des équations, intimement lié à l'emploi des considérations géométriques; avec la différence que, si le calcul des équations s'applique avantageusement à la géométrie, c'est la géométrie qui s'applique au calcul des inégalités, et qui semble indispensable pour en interpréter commodément les résultats.

Qu'on imagine un corps polyédrique, soumis à l'action d'une force instantanée, et reposant sur le plan par une de ses faces dont les angles et les côtés sont en nombre n. La force aura pour effet, ou de détacher entièrement le corps du plan fixe, sans faire éprouver à ce dernier aucune percussion; ou de contraindre le corps à glisser sur sa base, en faisant essuyer au plan une percussion répartie sur toute l'étendue de cette base; ou de soulever le corps, en le forçant à glisser sur l'une des arêtes, ou sur l'un des angles de la base, qui seul éprouvera une percussion. De là un nombre $2n+2$ d'hypothèses sur le mouvement du corps, à chacune desquelles se rapporte un système différent d'équations et d'inégalités, qui devront être simultanément satisfaites, pour que cette hypothèse puisse effectivement avoir lieu. D'un autre côté, il est évident à priori qu'entre toutes ces hypothèses il doit toujours y en avoir une, et une seule, qui satisfasse ainsi à toutes les conditions voulues; sans quoi le corps soumis à des forces qui ne s'équilibrent pas ne pourrait prendre aucun mouvement, ou bien il pourrait prendre plusieurs mouvemens différens, sans qu'il y eût aucune raison de supposer qu'un de ces mouvemens se produise plutôt que l'autre, ce qui répugne. Mais si cette double conséquence, que nous vérifierons d'ailleurs sur plusieurs exemples, est évidente à priori et par la nature de la question, on ne voit pas comment on pourrait en donner à posteriori, et à l'inspection de la forme des équations et des inégalités, une démonstration générale; ni comment on pourrait, dans un grand nombre de cas, dispenser du tâtonnement qui consiste à essayer successivement plusieurs hypothèses.

Lorsque le corps repose sur une base, dont l'arête est formée par une courbe continue, et qu'il se soulève en s'appuyant sur un point de l'arête, il faut d'abord déterminer ce point: question élémentaire et d'une application usuelle, dont pourtant je ne sache pas qu'on ait donné la solution. Au premier coup d'oeil les équations ordinaires du mouvement semblent insuffisantes; mais d'autres considérations lèvent l'indétermination apparente des coordonnées du point de percussion.

Pour offrir une application simple de ces principes, nous examinons successivement le cas d'un parallélipipède droit à base rectangulaire, et celui d'un cylindre droit à base circulaire; sur qui il ne faut pas perdre de vue que les mêmes formules s'étendent, sauf les valeurs numériques des momens d'inertie, à une infinité d'autres solides.

En suivant l'analyse que nous venons d'indiquer sommairement, on parvient a ranger sous deux catégories les points de contact qui existent entre le corps et le plan fixe, à l'instant où agit la force instantanée: 1° ceux dont la vitesse normale est éteinte par la percussion; 2° ceux qui n'exercent point de percussion et qui se détachent du plan instantanément, avec une vitesse finie. Mais si l'on considère l'élément du temps qui suit immédiatement l'instant de la percussion, les premiers de ces points se distinguent derechef en deux catégories nouvelles: 1° ceux dont la vitesse normale infiniment petite, acquise pendant le premier élément du temps, se trouve éteinte au moyen de la pression qu'ils exercent contre le plan; 2° ceux qui, au contraire, se détachent du plan à la fin de cet élément avec une vitesse infiniment petite. Cette distinction repose sur des calculs analogues dans leur forme à ceux qui servent pour la détermination des percussions, et n'exige pareillement aucune intégration. Elle a lieu lors même que le corps n'est soumis à aucune force continue; et il est d'autant plus nécessaire d'y avoir égard, que, pour l'observation, il n'importe qu'un point se détache du plan instantanément ou au bout d'un temps infiniment petit.

Maintenant il est clair que, si l'on savait intégrer les équations du mouvement, on aurait les valeurs des pressions en fonction du temps; on saurait pour quel instant du mouvement ces valeurs deviennent négatives ou cessent de satisfaire aux diverses conditions voulues; et l'on pourrait appliquer à chaque instant du mouvement les raisonnemens et les calculs que nous venons d'indiquer, relativement à l'instant qui suit immédiatement celui de l'application des forces instantanées.

Une conséquence singulière à laquelle on est conduit par cette analyse, c'est que, quand un corps symétrique relativement à l'un de ses axes principaux, et terminé par une base perpendiculaire à cet axe (tel qu'un prisme ou un cylindre droit et homogène), est posé par sa base sur un plan incliné et soumis à l'action de la pesanteur, ce corps ne pourra que glisser sur le plan, sans pivoter autour d'un des angles ou d'une des arêtes de sa base, quelle que soit l'inclinaison du plan à l'horizon, et lors même que la verticale, menée par le centre de gravité, tomberait en dehors de la base. Cette circonstance tient à ce que la direction de la pesanteur passe rigoureusement par le centre de gravité; car d'ailleurs, pour peu que la résultante des forces dévie de ce cen-

tre, le glissement ne peut avoir lieu qu'autant que la résultante rencontre le plan dans l'intérieur de la base. Il en est donc de ce résultat de mécanique rationnelle comme des équilibres instables, qui ne peuvent se réaliser physiquement. Aussi observe-t-on toujours que, lorsque l'inclinaison du plan dépasse certaines limites, et en général lorsque la verticale, menée par le centre de gravité, tombe en dehors de la base, le corps chavire; ce qu'il faut attribuer au frottement exercé sur le plan, force dont la direction ne passe point par le centre de gravité, et dont nous n'avons pas tenu compte dans nos formules.

Il resterait donc à faire voir comment ces formules devraient être modifiées d'après la considération du frottement: question qui diffère essentiellement d'avec celles qui précèdent, par la nécessité d'admettre des données empiriques sur la nature du frottement, et dans les développemens de laquelle nous ne pourrions entrer ici sans dépasser les bornes que nous devons nous prescrire.

1. Considérons en premier lieu un corps qui se meut en s'appuyant sur le plan fixe par une pointe, c'est-à-dire par un point où il y a solution de continuité dans sa surface, tel que serait le sommet d'un cône, ou l'un des angles solides d'un polyèdre. Pour fixer les idées, nous supposerons que la pesanteur est la force continue qui sollicite le corps, et nous tiendrons comte de la résistance du plan fixe par l'application d'une force inconnue R, perpendiculaire à ce plan; nous rapporterons les points de l'espace à trois axes des x, y, z; le plan fixe étant pris pour celui des x, y, et son intersection avec le plan vertical qui lui est perpendiculaire étant prise pour axe de y. Les points du corps seront rapportées aux trois axes principaux des x', y', z', menés par le centre de gravité, dont nous désignerons les coordonnées en x, y, z, par α, β, γ. M sera la masse du corps, et A, B, C seront ses momens d'inertie relatifs aux axes principaux des x', y', z'. Nous représenterons par g le coëfficient de la gravité, et par ε le complément de l'angle que forme le plan fixe avec la verticale. a, b, c seront les cosinus des angles variables formés par l'axe des z avec ceux des x', y', z'; et ξ, η, ζ, les coordonnées de la pointe, selon ces trois derniers axes. Enfin, si l'on conçoit que l'on prenne, sur la direction de l'axe instantané de rotation, une droite numériquement égale à la vitesse angulaire, p, q, r désigneront les projections variables de cette droite sur les axes des x', y', z'. Leurs signes

dépendront du sens de la rotation, suivant les mêmes conventions qui fixent le sens dans lequel est porté l'axe d'un couple, ou le moment linéaire d'une force, d'après la direction de cette force: et à ce sujet nous renverrons le lecteur aux Exercices de Mathématiques de M. Cauchy.

Cette notation convenue, il résulte facilement des principes généraux de dynamique, que le double mouvement de translation et de rotation du corps sera déterminé par les six équations suivantes:

$$(a.)\quad M\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}=0,\quad M\frac{\partial^2\beta}{\partial t^2}=Mg\sin\varepsilon,\quad M\frac{\partial^2\gamma}{\partial t^2}=-Mg\cos\varepsilon+R;$$

$$(b.)\quad \begin{cases} A\partial p+(C-B)qr\,\partial t = R(\eta c-\zeta b)\partial t,\\ B\partial q+(A-C)pr\,\partial t = R(\zeta a-\xi c)\partial t,\\ C\partial r+(B-A)pq\,\partial t = R(\xi b-\eta a)\partial t. \end{cases}$$

Les variables a, b, c sont liées aux quantités p, q, r par les équations

$$(c.)\quad \partial a=(rb-qc)\partial t,\quad \partial b=(pc-ra)\partial t,\quad \partial c=(qa-pb)\partial t;$$

et si l'on désigne par θ l'angle du plan fixe avec celui des x', y', par φ et ψ, les angles que leur intersection forme respectivement avec les axes des x' et des x, les six variables a, b, c, p, q, r se trouveront dépendre des trois quantités angulaires θ, φ, ψ, en vertu des relations suivantes:

$$(d.)\quad a=-\sin\theta\sin\varphi,\quad b=-\sin\theta\cos\varphi,\quad c=\cos\theta;$$

$$(e.)\quad \begin{cases} p\,\partial t = \sin\theta\sin\varphi\,\partial\psi-\cos\varphi\,\partial\theta,\\ q\,\partial t = \sin\theta\cos\varphi\,\partial\psi+\sin\varphi\,\partial\theta,\\ r\,\partial t = \partial\varphi-\cos\theta\,\partial\psi. \end{cases}$$

Nous renvoyons, pour la démonstration de toutes ces formules, à la Mécanique de M. Poisson, livre III.

Les six équations $(a.)$ et $(b.)$ ne renferment donc implicitement que sept inconnues α, β, γ, θ, φ, ψ, R, qu'il s'agit d'exprimer, au moyen de deux intégrations, en fonction du temps t. Il suffit par conséquent, pour avoir le nombre suffisant d'équations, d'en obtenir une septième entre ces inconnues. Or, la condition que la pointe doit rester sur le plan fixe, ou que sa coordonnée z doit être nulle, s'exprime par l'équation

$$(f.)\quad \gamma+a\xi+b\eta+c\zeta=0,$$

d'où

$$(f'.)\quad \frac{\partial\gamma}{\partial t}+\xi\frac{\partial a}{\partial t}+\eta\frac{\partial b}{\partial t}+\zeta\frac{\partial c}{\partial t}=0.$$

Les deux premières équations $(a.)$ s'intègrent immédiatement: la troisième, jointe aux équations $(b.)$ et $(f'.)$, suffit, sauf les difficultés de l'intégration, pour déterminer les cinq inconnues qui restent.

2. En multipliant les équations (*b.*) respectivement par a, b, c, les ajoutant, et ayant égard aux relations (*c.*), on trouve:

$$A\partial ap + B\partial bq + C\partial cr = 0;$$

et par conséquent on obtient l'intégrale première

$$(g.) \quad Aap + Bbq + Ccr = k,$$

dans laquelle k désigne une constante arbitraire. Si l'on multiplie de nouveau ces mêmes équations respectivement par p, q, r, et qu'on les ajoute, en ayant toujours égard aux relations (*c.*), il vient:

$$Ap\partial p + Bq\partial q + Cr\partial r = R(\xi\partial a + \eta\partial b + \zeta\partial c) = -R\partial\gamma,$$

en vertu de (*f'.*). Substituant la valeur de R, tirée de la troisième équation (*a.*), intégrant et désignant par h^2 une nouvelle constante arbitraire, on obtient en définitive:

$$(h.) \quad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + M\frac{\partial\gamma^2}{\partial t^2} + 2Mg\cos\varepsilon.\gamma = h^2.$$

Il n'est pas difficile d'apercevoir que les deux intégrales (*g.*) et (*h.*) résultent plus généralement, la première du principe des aires, la seconde de celui des forces vives. En effet, puisque le corps n'éprouve aucun obstacle parallèlement au plan fixe, et que la force qui le sollicite passe par le centre de gravité, la projection des aires sur ce plan doit rester constante. D'un autre côté, la liaison, qui assujétit le corps, étant exprimée par l'équation (*f.*), indépendante du temps, le principe des forces vives doit trouver son application. Or on démontre aisément que lorsqu'on rapporte au centre de gravité le double mouvement de translation et de rotation d'un système, la force vive totale est la somme des forces vives relatives aux deux mouvemens, considérés comme indépendans; et cela posé, les formules connues nous apprennent que $Ap^2 + Bq^2 + Cr^2$ est la force vive due au mouvement de rotation, tandis que $M\frac{\partial\gamma^2}{\partial t^2}$ est celle qui provient du mouvement de translation.

En général, les intégrales fournies par les principes de la conservation du centre de gravité, des aires et des forces vives, sont les seules qu'on obtienne sous forme finie. Le problème qui nous occupe ne sera donc rigoureusement résoluble que lorsque certaines relations entre θ, φ, ψ, réduiront ces variables à deux, par exemple θ et ψ. Alors en éliminant entre (*g.*) et (*h.*), on aura des expressions de la forme $\partial t = F(\theta)\partial\theta$, $\partial t = F'(\psi)\partial\psi$, d'où l'on tirera par les quadratures les valeurs de θ et ψ, par suite celles de γ et de R en fonction de t et de nouvelles constantes arbitraires.

3. Une analyse exactement semblable s'appliquerait au cas où le corps s'appuierait par deux points sur le plan fixe. On aurait une inconnue de plus, analogue à R, mais aussi une équation de plus, analogue à $(f.)$, laquelle établirait une dépendance entre θ, φ, ψ; de sorte que le problème serait susceptible d'une solution complète par les quadratures. Mais au lieu de nous y arrêter, il convient de considérer le cas où le corps s'appuie sur le plan par une arête rectiligne, telle que celles qui terminent les faces des polyèdres. En désignant alors par ∂s un élément de cette arête, dont les coordonnées sont ξ, η, ζ, et par R la pression qu'il supporte, la troisième équation $(a.)$ et celles $(b.)$ seront remplacées par les suivantes, où le signe d'intégration se rapporte à toute la longueur de l'arête:

$$(i.)\quad \begin{cases} M\dfrac{\partial^2\gamma}{\partial t^2} = -Mg\cos\varepsilon + \int R\,\partial s; \\ A\partial p + (C-B)qr\partial t = \partial t\int R(\eta c - \zeta b)\partial s, \\ B\partial q + (A-C)pr\partial t = \partial t\int R(\zeta a - \xi c)\partial s, \\ C\partial r + (B-A)pq\partial t = \partial t\int R(\xi b - \eta a)\partial s. \end{cases}$$

Comme la droite qui forme arête est donnée de position, on aura pour ses équations:

$$\eta = m\xi + n, \quad \zeta = m'\xi + n';$$

au moyen de quoi substituant dans les équations précédentes, et faisant sortir les lettres a, b, c, m, n, m', n' de dessous le signe d'intégration, on n'aura plus que deux intégrales inconnues $\int R\,\partial s$ et $\int R\xi\,\partial s$. D'une autre part, ces mêmes valeurs, substituées dans l'équation $(f.)$, devront la vérifier, indépendamment de ξ. On obtiendra ainsi deux équations auxiliaires, qui, jointes aux quatre équations $(i.)$, suffiront pour déterminer γ, θ, φ, ψ et les deux intégrales inconnues. Néanmoins la fonction R restera indéterminée, comme cela doit être, lorsqu'on n'a égard qu'aux principes généralement reçus en mécanique.

Admettons, par exemple, que l'arête soit parallèle à l'axe principal des x', ainsi que cela aurait lieu pour un prisme droit et homogène, s'appuyant sur une des arêtes perpendiculaires à ses bases. Dans ce cas m et m' sont nuls, ce qui donne $\gamma + bn + cn' = 0$, et $a = 0$, ou $\sin\theta\sin\varphi = 0$, d'où il est aisé de conclure que c'est l'angle φ qui reste constamment nul. L'équation $(g.)$ devient

$$\partial\psi(B\sin^2\theta + C\cos^2\theta) = k\,\partial t;$$

quant à celle des forces vives, pour la mettre sous sa forme la plus simple, il convient de faire:

$$n = \varrho\cos\omega, \quad n' = \varrho\sin\omega,$$

ϱ étant égal à $\sqrt{(n^2+n'^2)}$, et ω désignant l'angle que le plan mené par l'arête et par le centre de gravité, fait avec celui des x', y'. Alors cette équation devient:

$$A\frac{\partial\theta^2}{\partial t^2} + \frac{\partial\psi^2}{\partial t^2}(B\sin^2\theta + C\cos^2\theta) + M\varrho^2\cos^2(\theta-\omega).\frac{\partial\theta^2}{\partial t^2} + 2Mg\cos\varepsilon.\varrho\sin(\theta-\omega) = h^2.$$

Lorsque $B=C$, on a $\frac{\partial\psi}{\partial t}=$ const. Le terme en $\frac{\partial\psi^2}{\partial t^2}$ disparaît de l'équation précédente, comme compris dans la constante h^2; mais elle ne peut toujours s'intégrer qu'approximativement par les quadratures.

4. Si le corps glisse sur le plan fixe, en s'appuyant sur une face plane, on pourra encore employer les équations (*i.*), pourvu que ∂s représente un élément d'aire plane, et que les termes où il entre comme facteur soient affectés d'un double signe d'intégration. D'ailleurs le plan qui comprend cette face aura pour équation

$$\zeta = m\xi + m'\eta + m''.$$

Substituant cette valeur de ζ dans les équations (*i.*), elles ne contiendront plus que trois intégrales inconnues

$$\iint R\partial s, \quad \iint R\xi\partial s, \quad \iint R\eta\partial s.$$

D'un autre côté si l'on fait la même substitution dans l'équation (*f.*) qui devra alors être satisfaite, indépendamment de ξ et de η, on obtiendra trois équations auxiliaires, qui complèteront le nombre nécessaire pour la détermination des éléments du mouvement, et des intégrales inconnues: seulement la fonction R restera, comme précédemment, indéterminée.

En effectuant le calcul, on trouve:

$$\gamma + cm'' = 0, \quad a + mc = 0, \quad b + m'c = 0,$$

d'où

$$-\frac{a}{c} = -\tang\theta\sin\varphi = m, \quad -\frac{c}{b} = -\tang\theta\cos\varphi = m';$$

$$\tang\varphi = \frac{m}{m'}, \quad = \text{const.}$$

en sorte que les deux angles θ, φ sont l'un et l'autre constants. L'équation des aires se réduit donc à $\frac{\partial\psi}{\partial t}=$ const., et il en résulte encore que les quantités γ, p, q, r, a, b, c, comme aussi les trois intégrales inconnues, ont de valeurs constantes pendant toute la durée du mouvement.

5. Considérons maintenant un corps terminé par une surface continue, et qui roule en s'appuyant toujours sur le plan par un point de cette surface. Il est clair que les équations (*a.*), (*b.*), (*f.*) s'appliqueront à l'hypothèse actuelle, sauf que les coordonnées ξ, η, ζ, au lieu d'être constantes, comme dans le cas du numéro 1., seront variables et inconnues. Mais aussi on aura trois nouvelles équations pour déterminer ces coordonnées, savoir: l'équation même de la surface, et les deux qui expriment que le plan tangent à cette surface, au point (ξ, η, ζ) se confond avec celui des x, y. Les équations des aires et des forces vives subsisteraient, comme lorsque les coordonnés ξ, η, ζ sont invariables. Cela est évident pour la première, qui s'obtient indépendamment de ces coordonnées; d'ailleurs on aurait, en différentiant l'équation (*f.*):

$$\partial\gamma + \xi\partial a + \eta\partial b + \zeta\partial c = -(a\partial\xi + b\partial\eta + c\partial\zeta).$$

Mais a, b, c étant les cosinus des angles que forment les axes des x', y', z' avec la normale à la surface, au point (ξ, η, ζ), le second membre de cette équation s'évanouit, ce qui la rend identique avec (*f'.*): au moyen de quoi l'on arrive comme précedemment à l'équation des forces vives.

Si le corps est terminé par une surface cylindrique ou conique, il roulera en s'appuyant sur le plan le long d'une génératrice de cette surface. Prenons pour exemple un cylindre droit et homogène, à base elliptique, dont les génératrices soient parallèles à l'axe de x', et dont les directrices aient pour équation:

$$\varpi^2 z'^2 + \sigma^2 y'^2 = \varpi^2\sigma^2.$$

Le calcul sera le même que dans le cas traité à la fin du numéro 3., si ce n'est que les quantités ϱ et ω cesseront d'être constantes. Le cylindre étant tangent au plan fixe, on aura:

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\partial z'}{\partial y'}, = -\frac{\sigma^2 y'}{\varpi^2 z'},$$

$$\varrho\cos\omega = y' = \frac{\varpi^2\sin\theta}{\sqrt{(\varpi^2\sin^2\theta + \sigma^2\cos^2\theta)}}, \quad \varrho\sin\omega = z' = -\frac{\sigma^2\cos\theta}{\sqrt{(\varpi^2\sin^2\theta + \sigma^2\cos^2\theta)}},$$

et il ne restera plus qu'à substituer ces valeurs daus l'équation des forces vives. Lorsque le cylindre est circulaire, auquel cas $B = C$, $\varpi = \sigma$, $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ et $\frac{\partial\theta}{\partial t}$ se réduisent à des constantes; les quantités b, c, q, r, s'expriment par des sinus et cosinus du temps: tandis que d'après le calcul, les intégrales $\int R\partial s$, $\int R\xi\partial s$ conservent des valeurs constantes. Observons

que les limites de ces intégrales ne seront plus constantes en général, comme dans le cas du numéro 3., et qu'on déterminerait au besoin ces limites à l'aide des équations des courbes qui terminent la portion de surface roulant sur le plan; mais ce calcul est étranger à la détermination du mouvement.

6. Si le corps roulait sur une arête curviligne, telle que celle qui termine la base d'un cylindre, il faudrait encore employer les formules (*a.*), (*b.*), (*f.*); les coordonnées ξ, η, ζ du point de contact seraient variables et inconnues, mais on aurait trois équations pour les déterminer, savoir: les deux qui définissent, relativement aux axes principaux, la courbe qui forme arête; et celle

$$(k.) \quad a\delta\xi + b\delta\eta + c\delta\zeta = 0,$$

exprimant que la tangente à cette courbe, au point (ξ, η, ζ), est comprise dans le plan fixe, et dans laquelle il faudrait substituer les valeurs de $\frac{\delta\xi}{\delta\zeta}$, $\frac{\delta\eta}{\delta\zeta}$, tirées des équations de la courbe. Nous employons ici la caractéristique δ, voulant réserver celle ∂ pour indiquer les différentiations par rapport à t.

En réunissant les cas divers qu'on vient d'analyser, et quelques autres qui se résolvent par les mêmes principes, on pourrait, sauf les difficultés inhérentes à l'intégration, suivre dans toutes ses circonstances le mouvement d'un corps de forme quelconque sur un plan fixe. C'est ainsi qu'un cône pourrait se mouvoir snccessivement, en s'appuyant sur son sommet, puis en roulant sur sa surface convexe, ensuite sur l'arête curviligne qui la termine, et enfin en glissant sur le plan de sa base. Dans le passage d'un de ces états à l'autre, il y aurait en général solution de continuité, percussion soufferte par le plan, déperdition de force vive; et les valeurs des élémens du mouvement, à la fin du premier état, serviraient à déterminer les constantes arbitraires, dans les formules relatives à l'état subséquent.

7. Les constantes arbitraires qui entrent dans les équations du mouvement, après les deux integrations, sont de deux sortes: les unes dépendent de la position initiale du corps, et l'on peut toujours placer l'origine et les axes des x, y, z, de manière à les rendre nulles. Les autres dépendent des valeurs initiales des six quantités

$$(l.) \quad \frac{\partial\alpha}{\partial t}, \ \frac{\partial\beta}{\partial t}, \ \frac{\partial\gamma}{\partial t}, \ p, \ q, \ r,$$

qui peuvent être données immédiatement; et alors leur substitution dans les intégrales premières, telles que celles des aires et des forces vives, fournira immédiatement aussi les valeurs des constantes arbitraires: mais si l'on assigne seulement, en grandeurs et directions, les forces instantanées qui sollicitent le corps à l'origine et le tirent de l'état de repos, il faudra d'abord en déduire les valeurs initiales des quantités $(l.)$.

Considérons un corps qui repose sur le plan fixe par un point (ξ, η, ζ), est qui est tiré de l'état de repos par l'application d'un système des forces instantanées, dont la résultante a pour projection suivant les axes des x, y, z, les forces X, Y, Z. Désignons par L', M', N' les momens du système estimés relativement aux axes des x', y', z', et par P la percussion que le plan éprouve au point (ξ, η, ζ). D'après une application facile du principe de d'Alembert, on aura, pour déterminer les valeurs initiales des quantités $(l.)$, les six équations suivantes:

$$(a'.)\quad M\frac{\partial\alpha}{\partial t}=X,\quad M\frac{\partial\beta}{\partial t}=Y,\quad M\frac{\partial\gamma}{\partial t}=Z+P;$$

$$(b'.)\quad \begin{cases} Ap = L' + P(\eta c - \zeta b), \\ Bq = M' + P(\zeta a - \xi c), \\ Cr = N' + P(\xi b - \eta a). \end{cases}$$

Il y faut joindre, en vertu des équations $(f'.)$ et $(c.)$, cette équation auxiliaire, que nous mettons à dessein sous trois formes différentes:

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t}+\xi(rb-qc)+\eta(pc-ra)+\zeta(qa-pb)=0,$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t}+p(\eta c-\zeta b)+q(\zeta a-\xi c)+r(\xi b-\eta a)=0,$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t}+a(q\zeta-r\eta)+b(r\xi-p\zeta)+c(p\eta-q\xi)=0.$$

Sous cette dernière forme, elle exprime plus explicitement que la vitesse du point (ξ, η, ζ), estimée perpendiculairement au plan fixe (ce que nous sommes convenus d'appeler plus brièvement la vitesse normale), est nulle; et d'après la remarque du numéro 5., elle subsiste également, soit qu'il y ait en ce point continuité ou discontinuité dans la surface.

Il est essentiel d'observer que, si le corps est tiré de l'état du repos par l'action de forces continues, les valeurs initiales de p, q, r seront nulles; et alors les équations $(a.)$, $(b.)$, deviendront les mêmes que $(a'.)$, $(b'.)$, si ce n'est que P sera remplacé par R, les quantités $(l.)$ par

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2},\ \frac{\partial^2\beta}{\partial t^2},\ \frac{\partial\gamma^2}{\partial t^2},\ \frac{\partial p}{\partial t},\ \frac{\partial q}{\partial t},\ \frac{\partial r}{\partial t}$$

et que les lettres X, Y, Z, au lieu de désigner des forces instantanées, désigneront des forces continues. D'ailleurs l'équation (m.) donnant par la différentiation:

$$(m'.)\quad \begin{cases} \frac{\partial^2\gamma}{\partial t^2} + \frac{\partial p}{\partial t}(\eta c - \zeta b) + \frac{\partial q}{\partial t}(\zeta a - \xi c) + \frac{\partial r}{\partial t}(\xi b - \eta a) \\ = -\left\{p\frac{\partial.(\eta c - \zeta b)}{\partial t} + q\frac{\partial.(\zeta a - \xi c)}{\partial t} + r\frac{\partial.(\xi b - \eta a)}{\partial t}\right\}, \end{cases}$$

le second membre de (m'.) s'évanouira à cause de $0 = p = q = r$, et alors elle deviendra la même que (m.), lorsqu'on fait dans celle-ci les substitutions qu'on vient de dire. D'où il faut conclure, qu'en discutant l'hypothèse où le corps est tiré du repos par des forces instantanées, nous nous trouverons avoir traité celle où il sort du même état par l'action de forces continues.

8. Faisons, pour simplifier:

$$\eta c - \zeta b = \lambda,\quad \zeta a - \xi c = \mu,\quad \xi b - \eta a = \nu$$

l'élimination entre (a'.), (b'.) et la seconde équation (m.), donne:

$$P = \frac{\frac{Z}{M} + \frac{L'\lambda}{A} + \frac{N'\mu}{B} + \frac{N'\nu}{C}}{\frac{1}{M} + \frac{\lambda^2}{A} + \frac{\mu^2}{B} + \frac{\nu^2}{C}},$$

expression dont le dénominateur est essentiellement positif. Si P est négatif, ce sera la preuve que le plan n'éprouve aucune percussion au point (ξ, η, ζ), et que ce point, considéré comme appartenant au corps, doit se détacher du plan, ou que sa vitesse normale est positive. Alors pour déterminer les élémens du mouvement, il faudra faire $P = 0$ dans (a'.), (b'.); et les valeurs de ces élémens devront satisfaire à l'inégalité

$$(n.)\quad \frac{\partial\gamma}{\partial t} + p\lambda + q\mu + r\nu > 0,$$

dont le premier membre exprime la vitesse normale du point (ξ, η, ζ). Or, au moyen de ce qu'on a fait $P = 0$, ce premier membre se réduit à

$$\frac{Z}{M} + \frac{L'\lambda}{A} + \frac{M'\mu}{B} + \frac{N'\nu}{C};$$

l'inégalité est donc satisfaite par cela seul, que dans le précédent calcul on a eu $P < 0$.

9. S'il y a deux points de contact entre le corps et le plan, les équations (a'.), (b'.) deviennent, en accentuant les lettres relatives au second point:

$$M\frac{\partial\gamma}{\partial t} = Z + P + P';$$

$$Ap = L' + P\lambda + P'\lambda', \quad Bq = M' + P\mu + P'\mu', \quad Cr = N' + P\nu + P'\nu',$$

et de plus on a les deux équations de condition:

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t} + p\lambda + q\mu + r\nu = 0, \quad \frac{\partial\gamma}{\partial t} + p\lambda' + q\mu' + r\nu' = 0.$$

Faisant pour abréger:

$$S = \frac{1}{M} + \frac{\lambda^2}{A} + \frac{\mu^2}{B} + \frac{\nu^2}{C}, \quad T = \frac{1}{M} + \frac{\lambda\lambda'}{A} + \frac{\mu\mu'}{B} + \frac{\nu\nu'}{C},$$

$$U = \frac{Z}{M} + \frac{L'\lambda}{A} + \frac{M'\mu}{B} + \frac{N'\nu}{C}, \text{ etc.}$$

on trouve:

$$P = \frac{U'T - S'U}{SS' - T^2}, \quad P' = \frac{UT - SU'}{SS' - T^2}.$$

Le dénominateur de P et P' peut se mettre sous la forme:

$$\frac{1}{M}\left\{\frac{(\lambda-\lambda')^2}{A} + \frac{(\mu-\mu')^2}{B} + \frac{(\nu-\nu')^2}{C}\right\} + \frac{(\lambda\mu'-\lambda'\mu)^2}{AB} + \frac{(\lambda\nu'-\lambda'\nu)^2}{AC} + \frac{(\mu\nu'-\mu'\nu)^2}{BC},$$

et par conséquent il est essentiellement positif, en sorte que les signes de P et P' dépendront uniquement de ceux de leurs numérateurs. Si P, par exemple, est négatif, il faudra recommencer le calcul en supposant P nul, et alors on aura $p' = -\frac{U'}{S'}$. De plus, l'inégalité (*n.*) devra être satisfaite: mais son premier membre se réduit dans ce cas à $P'T + U > 0$, ou $S'U - U'T > 0$, en substituant la valeur précédente de P', et observant que S' est essentiellement positif. Cette inégalité est donc vérifiée, par cela même que l'on a eu précédemment $P < 0$.

Si les deux valeurs de P et P' étaient négatives, et que de plus T fût positif, l'inégalité (*n.*) et son analogue, relative à (ξ', η', ζ'), se réduisant, lorsqu'on fait abstraction de la résistance des deux points, à $U > 0$, $U' > 0$, seraient encore satisfaites d'elles-mêmes, et le corps se détacherait entièrement du plan. En effet, de $U'T - S'U < 0$, $UT - SU' < 0$, on tire, en divisant la première inégalité par S' et la seconde par T, qui sont des nombres positifs:

$$U > \frac{U'T}{S'}, \quad U < \frac{SU'}{T},$$

partant $U'(SS' - T^2) > 0$, ou $U' > 0$, à cause que $SS' - T^2$ est essentiellement positif. De la même manière on trouverait $U > 0$.

Mais si T est négatif, on pourrait seulement démontrer que l'une des quantités U, U' est positive; par conséquent, de ce qu'on aurait trouvé dans ce cas P et $P' < 0$, il ne s'en suivrait pas que les deux points n'éprouvent aucune percussion: il faudrait en outre que U et U' fussent

simultanément positifs. On arriverait à des résultats analogues en supposant trois points de contact.

10. Dans le cas où leur nombre se réduit toujours à deux, on trouve, en retranchant de la première équation (*m.*), son analogue, relative à (ξ', η', ζ'):

(*o.*) $(\xi-\xi')(rb-qc)+(\eta-\eta')(pc-ra)+(\zeta-\zeta')(qa-pb)=0$;

équation qui peut s'interpréter géométriquement. Pour cela, menons par l'axe instantané de rotation un plan perpendiculaire au plan fixe des x, y, et soit

$$lx'++my'+nz'=0,$$

l'équation de ce plan. En vertu de ce qu'il comprend l'axe instantané, on aura $lp+mq+nr=0$; et au moyen de ce qu'il est perpendiculaire au plan x, y, $la+mb+nc=0$. Son équation deviendra donc

(*p.*) $(rb-qc)x'+(pc-ra)y'+(qa-pb)z'=0$;

et si l'on mène une perpendiculaire à ce plan, elle fera, avec les axes des x', y', z', des angles dont les cosinus seront respectivement proportionnels à $rb-qc$, $pc-ra$, $qa-pb$. D'un autre côté, l'intersection du plan (*p.*) avec celui des x, y, contient la projection de l'axe instantané sur ce dernier plan, et cette projection est perpendiculaire à la droite menée dans le plan fixe perpendiculairement au plan (*p.*), laquelle, en vertu de (*o.*), est elle-même perpendiculaire à la droite qui joint les deux points de contact. Cette équation (*o.*) exprime donc que la projection de l'axe instantané sur le plan fixe est parallèle à la droite joignant les deux points de contact. D'ailleurs, si l'on porte sur l'axe instantané une longueur numériquement égale à la vitesse angulaire, la valeur de sa projection sur le plan fixe sera $\sqrt{((rb-qc)^2+(pc-ra)^2+(qa-pb)^2)}$: car on a pour sa projection, perpendiculairement au même plan, $pa+qb+rc$, et

$$(rb-qc)^2+(pc-ra)^2+(qa-pb)^2+(pa+qb+rc)^2=p^2+q^2+r^2.$$

Si le point (ξ', η', ζ') venait à se détacher du plan, on aurait:

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t}+\xi(pb-qc)+\eta'(pc-ra)+\zeta'(qa-pb)>0;$$

et l'équation (*o.*) se trouverait remplacée par l'inégalité

$$(\xi-\xi')(rb-qc)+(\eta-\eta')(pc-ra)+(\zeta-\zeta')(qa-pb)<0,$$

laquelle exprime géométriquement que la perpendiculaire à la projection de l'axe instantané sur le plan fixe forme un angle obtus avec la droite menée du point (ξ, η, ζ) au point (ξ', η', ζ').

11. Si ces deux points sont les extrémités d'une arête, par laquelle le corps s'appuie sur le plan fixe, il est aisé de déduire de ce qui précède les équations qui devront donner les valeurs des quantités (*l.*), et des intégrales

$$\int P\partial s,\ \int P\xi\partial s,\ \int P\eta\partial s.$$

Pour que la percussion s'exerce le long de cette arête, il faudra que la fonction inconnue P puisse être censée positive dans toute l'étendue des intégrations. Or l'on s'assure si cette condition est ou non satisfaite, à l'aide des considérations suivantes.

Les coordonnées x, y de l'arête, rapportées aux axes fixes dans l'espace, sont, au premier instant du mouvement, des fonctions linéaires et connues de ses coordonnées ξ, η, ζ, rapportées aux axes principaux. On pourra donc exprimer $\int Px\partial s$, $\int Py\partial s$, en fonction de $\int P\xi\partial s$, etc. Alors si l'on fait

$$\frac{\int Px\partial s}{\int P\partial s} = x_1,\quad \frac{\int Py\partial s}{\int P\partial s} = y_1,$$

il faudra, pour que la fonction P puisse être censée constamment positive, 1° que $\int P\partial s$ ait elle-même une valeur positive; 2° que le point, dont les coordonnées en x, y, sont x_1, y_1, tombe sur l'arête rectiligne entre ses deux points extrêmes (ξ, η, ζ), (ξ', η', ζ'). Telles sont en effet les conditions démontrées en statique, pour qu'un corps qui s'appuie le long d'un plan fixe par une arête rectiligne ne soit pas soulevé, et la démonstration ne reposant que sur la nécessité de regarder la fonction P comme constamment positive, subsiste, quelle que soit la signification attribuée à P.

12. Lorsqu'il existe, à l'origine du mouvement, trois points de contact entre le corps et le plan fixe, on a trois équations semblables à la première (*m.*), qui donnent, en les combinant deux à deux par voie de soustraction, trois autres équations semblables à (*o.*); et de celles-ci on déduit, pourvu que les trois points ne soient pas en ligne droite:

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t} = 0,\quad rb - qc = 0,\quad pc - ra = 0,\quad qa - pb = 0,$$

équations dont la dernière est contenue dans les deux précédentes, et qui expriment: 1° que la distance du centre de gravité au plan fixe reste constante; 2° que l'axe instantané est perpendiculaire à ce plan. Dès-lors on voit que, s'il existait plus de trois points de contact, on n'aurait pas le nombre suffisant d'équations pour déterminer individuellement les percussions souffertes par ces points, ni pour s'assurer directement que

leurs valeurs sont positives. Mais en suivant le raisonnement des numéros précédens, il est clair qu'on pourrait toujours calculer les valeurs des termes sommatoires $\Sigma.P$, $\Sigma.P\xi$, etc., par suite celles de $\Sigma.Px$ et $\Sigma.Py$; et qu'en faisant alors $\Sigma.Px = x_1\Sigma P$, $\Sigma.Py = y_1\Sigma P$, il faudrait, pour que le corps pût se mouvoir en glissant sur le plan fixe, et exerçant ainsi une percussion sur tous les points de contact: 1° que ΣP fût positif; 2° que le point dont les coordonnées en x, y sont x_1, y_1, tombât dans l'intérieur du polygone convexe, qui se forme en joignant deux à deux les points de contact, de manière à n'en laisser aucun à l'extérieur du polygone. Si le corps s'appuyait sur une portion d'aire plane, on arriverait aux mêmes conclusions, en remplaçant P par $P\partial s$, et Σ par un double signe d'intégration.

13. Lorsque les conditions nécessaires pour le glissement du corps sur le plan fixe ne sont pas satisfaites, il se présente trois cas: ou le corps se soulève en s'appuyant sur l'un des sommets du polygone convexe, dont il vient d'être question, comme sur une pointe; ou il s'appuie en se soulevant, sur les deux extrémités d'un des côtés du même polygone; ou enfin il se détache entièrement du plan et ne lui fait éprouver aucune percussion.

Dans la première hypothèse, soit (ξ, η, ζ) ou F (Tab. II. Fig. 1.) le sommet qui éprouve une percussion et (ξ', η', ζ'), (ξ'', η'', ζ''), ou F', F'', les deux sommets dont l'un suit, et l'autre précède F immédiatement sur le contour du polygone. Non seulement il faudra que la valeur de P, calculée comme dans le numéro 9., soit positive; mais d'après l'observation qui termine le numéro 10., les deux inégalités

$$(q.)\quad \begin{cases} (\xi-\xi')(rb-qc)+(\eta-\eta')(pc-ra)+(\zeta-\zeta')(qa-pb)<0, \\ (\xi-\xi'')(rb-qc)+(\eta-\eta'')(pc-ra)+(\zeta-\zeta'')(qa-pb)<0, \end{cases}$$

devront être satisfaites; et le système de ces inégalités exprime que la perpendiculaire abaissée de F sur la projection de l'axe instantané sur le plan fixe, doit tomber dans l'angle $M'FM''$, supplément de $F'FF''$, et formé par les droites $N'M'$, $N''M''$, respectivement perpendiculaires à FF', FF''. Pour un autre point quelconque F''', situé sur le contour ou dans l'intérieur du polygone, on devrait avoir pareillement:

$$(q'.)\quad (\xi-\xi''')(rb-qc)+(\eta-\eta''')(pc-ra)+(\zeta-\zeta''')(qa-pb)<0;$$

et si l'on mène $N'''M'''$ perpendiculaire à FF''', que l'on combine $(q'.)$ avec chacune des inégalités $(q.)$, il résultera de leur système que la per-

pendiculaire abaissée de F sur la projection de l'axe instantané, doit tomber dans l'intérieur de l'angle $M'''FM''$, ou de $M'FN'''$. Or, le polygone étant convexe, et par suite FF''' tombant toujours dans l'angle $F'FF''$, il est clair que quand les inégalités $(q.)$ sont satisfaites, $(q'.)$ l'est a fortiori; qu'ainsi il suffit d'avoir égard aux inégalités $(q.)$ et à celle $P>0$.

Quand la projection du centre de gravité sur le plan fixe tombe dans l'intérieur de l'angle $F'FF''$, on peut prendre cette projection pour le point F''', et alors on a $\xi'''=-a\gamma$, $\eta'''=-b\gamma$, $\zeta'''=-c\gamma$: d'ailleurs comme la fonction $a(rb-qc)+b(pc-ra)+c(qa-pb)$ est identiquement nulle, $(q'.)$ se réduit dans ce cas à

$$\xi(rb-qc)+\eta(pc-ra)+\zeta(qa-pb)<0,$$

ou, en vertu de l'équation $(m.)$, à

$$(q''.)\quad \frac{\partial\gamma}{\partial t}>0.$$

Dans la seconde hypothèse sur le mouvement du corps, FF' étant le côté du polygone sur lequel il s'appuie en se soulevant, soit que la percussion ne s'exerce qu'aux deux points extrêmes F, F', ou qu'elle soit répartie sur toute la longueur de l'arête FF', on aura à appliquer les formules des numéros 9., 10. et 11. En outre, dans l'un et l'autre cas, il faudra que l'inégalité $(q'.)$ soit vérifiée pour un point quelconque F''', situé sur le contour ou dans l'intérieur du polygone. Or, si l'on abaisse de F une perpendiculaire sur la projection de l'axe instantané en x, y, cette droite, d'après ce qui a déjà été dit, sera en même-temps perpendiculaire à FF': l'inégalité $(q'.)$ exprime qu'elle devra faire un angle obtus avec FF'''; et dès-lors il est visible que cette condition étant satisfaite pour le point F''', le sera pour tous ceux qui sont situés, par rapport à FF', du même côté que F'''. Elle sera donc simultanément satisfaite pour tous les points situés sur le contour ou dans l'intérieur du polygone, puisque, par hypothèse, ce polygone est convexe. Profitant de cette remarque, on peut d'après ce qui précède, simplifier l'expression de la condition $(q'.)$, et la réduire à $(q''.)$, dans le cas où la projection du centre de gravité en x, y, tombe, par rapport à FF', du même côté que les autres sommets du polygone.

Enfin, dans la dernière hypothèse où le corps ne fait éprouver aucune percussion au point fixe, et se meut comme s'il était libre, la vitesse normale de chacun des points de contact doit être positive; ce qui

entraîne de nouvelles conditions: $U>0$, $U'>0$, $U''>0$, etc. U et ses analogues conservant la signification qui leur a été attribuée au numéro 9. Lorsque le corps repose sur une portion de ligne ou d'aire plane, le nombre des points de contact étant infini, la vérification de l'inégalité $U>0$ ne peut se faire pour chacun d'eux; mais d'abord il est visible que, si elle est satisfaite pour tous les sommets du polygone convexe dont nous venons de parler, elle le sera pour tous les autres points. En outre, si l'on observe que $U=0$ (en remplaçant dans U les coordonnées déterminées ξ, η, ζ par les coordonnées courantes x', y', z') est l'équation d'un plan, et que l'inégalité $U>0$ subsiste pour tous les points de l'espace situés d'un même côté de ce plan, on verra qu'il suffit de construire la droite résultante de l'intersection du plan fixe avec celui $U=0$; que, si cette droite laisse d'un même côté tous ces points de contact, et que de plus l'inégalité $U>0$ soit satisfaite pour un de ces points, elle le sera pour tous les autres.

Chaque sommet du polygone pouvant être pris successivement pour le point F, et chacun de ses côtés pour l'arête FF', si n désigne le nombre de ses sommets, on pourra faire $2n$ hypothèses différentes sur le mouvement du corps, sans compter celle où il glisse sur le plan, et celle où il s'en détache entièrement. Parmi ces $2(n+1)$ hypothèses, à chacune desquelles se rapporte un système différent d'équations et d'inégalités, il faudra, comme on l'a dit en commençant, qu'il y en ait toujours une et une seule pour laquelle le système correspondant d'inégalités soit complètement vérifié.

14. Si au polygone dont il vient d'être question l'on substitue une courbe convexe et continue, comme dans le cas d'un cylindre assis sur sa base, et que d'ailleurs on ait vérifié que le corps ne pouvait pas glisser sur cette base, il semble d'après ce qui précède, qu'on devrait essayer autant d'hypothèses qu'il y a de points sur la courbe, c'est-à-dire une infinité; ce qui répugne. D'un autre côté, si l'on se reporte au numéro 6., on verra que l'équation (*k.*), qui doit servir à déterminer le point (ξ, η, ζ) sur lequel le corps s'appuie en roulant sur une arête curviligne, se trouve identiquement satisfaite à l'origine du mouvement; puisque, par hypothèse, la courbe qui forme arête est alors entièrement comprise dans le plan fixe.

Il est néanmoins facile de lever cette indétermination apparente: et d'abord si l'on passe, selon le principe des limites, du polygone à la

courbe continue, il résultera des N°s. 10. et 13., que la tangente à la courbe, au point (ξ, η, ζ), sur lequel le corps s'appuie en se soulevant, doit être parallèle à la projection de l'axe instantané en x, y, d'où l'on tire:

$$(k'.) \quad (rb - qc)\delta\xi + (pc - ra)\delta\eta + (qa - pb)\delta\zeta = 0;$$

et cette équation qui remplacera $(k.)$, servira, conjointement avec celles de la courbe, à déterminer complètement ξ, η, ζ. Mais sans recourir à cette considération indirecte, on peut dériver immédiatement $(k'.)$ de $(k.)$. En effet, puisque cette dernière équation doit être satisfaite pendant toute la durée du mouvement, elle donnera:

$$\partial a\delta\xi + \partial b\delta\eta + \partial c\delta\zeta = -(a\partial\delta\xi + b\partial\delta\eta + c\partial\delta\zeta).$$

Or, par hypothèse, $(k.)$ est satisfaite identiquement, c'est-à-dire, indépendamment de ξ, η, ζ; le second membre de l'équation précédente sera donc identiquement nul, ce qui la réduit à $(k'.)$, au moyen des relations $(c.)$.

Le point (ξ, η, ζ) étant connu, il faudra que la valeur de P, calculée par les formules du N°. 8., soit positive; et que pour un autre point quelconque $(\xi''', \eta''', \zeta''')$, situé sur le contour ou dans l'intérieur de la base, on vérifie l'inégalité $(q'.)$, qui se réduit à $(q''.)$, quand la projection du centre de gravité en x, y tombe dans l'intérieur de la base. Si ces conditions n'étaient pas satisfaites, ce serait une preuve que le corps se détache entièrement du plan fixe: alors il faudrait, qu'en éliminant entre les équations de la courbe et celles de l'intersection du plan fixe avec celui $U = 0$, les racines de l'équation finale fussent imaginaires, et que pour un point arbitrairement choisi sur cette courbe, ou dans l'aire qu'elle enveloppe, on eût $U > 0$.

Quand l'équation $(k'.)$, jointe à celle de la courbe, donne une équation finale à plusieurs racines réelles, il ne doit y avoir, comme nous le vérifierons, qu'un système de valeurs (ξ, η, ζ), qui satisfasse aux conditions d'inégalité. Enfin, si la base était terminée par plusieurs portions de courbes, il faudrait essayer des calculs analogues relativement à chaque portion de courbe, et ensuite relativement à chacun de leurs points de jonction, le corps pouvant s'appuyer sur l'un d'eux, comme sur une pointe, avec la condition que la perpendiculaire abaissée de ce point sur la projection de l'axe instantané, tombe dans l'angle supplémentaire de celui que forment les tangentes menées par ce point aux deux portions de courbes contiguës.

15. On peut faire, des formules qui précèdent, une application curieuse, qui s'étend à une classe nombreuse de solides. Supposons que le corps, à l'origine du mouvement, tende à glisser sur une face perpendiculaire à l'axe principal des z', et que la résultante des forces qui le sollicitent passe par le centre de gravité. On aura $0 = L' = M' = N'$; et en prenant les axes de x, y, respectivement parallèles à ceux des x', y' (ce qui, dans ce cas, ne diminue en rien la généralité des formules), il viendra: $a = 0$, $b = 0$, $c = 1$, d'où (N°. 12.):

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = 0, \quad p = 0, \quad q = 0,$$

et par suite:

$$\iint P \partial x \, \partial y = -Z, \quad \iint P x \, \partial x \, \partial y = 0, \quad \iint P y \, \partial x \, \partial y = 0;$$

l'origine des x, y étant d'ailleurs supposée la même que celle des x', y'. Or, pour que la fonction P puisse être censée constamment positive, et conséquemment pour que le glissement du corps sur sa base puisse avoir lieu, il suffira (N°. 12.) que Z soit négative, et que le point dont les coordonnées en x, y sont nulles, c'est-à-dire la projection du centre de gravité sur le plan de la base, tombe dans l'intérieur de cette base.

Cette dernière condition est évidemment satisfaite, dans le cas de l'homogénéité, à l'égard des prismes, cylindres et cônes droits, des pyramides régulières, et d'un grand nombre d'autres solides, qui ont d'ailleurs une de leurs faces ou bases perpendiculaires à l'un de leurs axes principaux. Si donc un semblable corps repose par sa base sur un plan fixe, et qu'on lui communique une impulsion passant par le centre de gravité, il glissera sur sa base, ou se détachera entièrement du plan, selon que Z sera négative ou positive, mais dans aucun cas, il ne pourra pivoter sur l'un des angles, ou l'une des arêtes de sa base. La conclusion sera la même, en vertu de l'observation qui termine le numéro 7., si le corps est tiré du repos par l'action de la pesanteur; quelle que soit d'ailleurs l'inclinaison du plan fixe à l'horizon: car la pesanteur est une force qui passe toujours par le centre de gravité. Enfin cette conclusion subsiste non seulement pour le premier instant du mouvement, mais pour tous ceux qui suivront: car on sait (N°. 4.) que les valeurs de $\iint R x \partial x \partial y$, $\iint R y \partial x \partial y$ étant nulles au premier instant, demeureront constamment nulles; et la condition de R positive dans toute l'étendue des intégrations, étant satisfaite à l'origine du mouvement, le sera pour toute sa durée.

16. Afin d'appliquer nos formules à un exemple, considérons un parallélipipède rectangle et homogène, posé sur le plan x, y par une de ses faces. Prenons les axes des x, y respectivement parallèles aux côtés de la base, et faisons $M = AK = BK'$. Soient $2f$, $2g$, $2h$ les longueurs des arêtes, parallèles aux axes des x, y, z; il s'agit d'examiner successivement les quatre hypothèses suivantes.

1°. Le parallélipipède peut glisser sur le plan fixe, auquel cas:

$$\iint P\partial x\partial y = -Z,\quad \iint Px\partial x\partial y = -L',\quad \iint Py\partial x\partial y = M';$$

d'où résultent (N°. 12.) les conditions

$$(r.)\quad Z<0,\quad -\frac{M'}{Z}>-f,\quad -\frac{M'}{Z}<f,\quad \frac{L'}{Z}>-g,\quad \frac{L'}{Z}<g,$$

en se rappelant toujours que les signes $<$ et $>$ n'excluent pas le cas d'égalité. Les quatre dernières inégalités ne peuvent être satisfaites par $Z=0$, à moins qu'on n'ait en même temps $0=L'=M'$, ce qui rentre dans le cas du numéro précédent. Ainsi l'on doit supposer que la résultante perce le plan x, y en un point (x'', y''), auquel cas on sait que L', M' se réduisent à Zy'', $-Zx''$. Ces inégalités expriment donc géométriquement que le point (x'', y'') tombe dans l'intérieur de la base du parallélipipède.

2°. Si le corps tourne, en s'appuyant sur un des angles de sa base (ξ, η), on aura (N°s. 7. et 8.):

$$P=-\frac{Z+K\eta L'-K'\xi M'}{1+K\eta^2+K'\xi^2},\quad Ap=P\eta+L',\quad Bq=-P\xi+M'.$$

Les inégalités $(q.)$ du numéro 13. se réduiront à $p\eta<0$, $q\xi>0$, à cause qu'on y doit faire $\xi'=\xi$, $\eta'=-\eta$; $\xi''=-\xi$, $\eta''=\eta$. D'ailleurs on doit avoir $P>0$; au moyen de quoi les inégalités relatives à cette hypothèse sont les trois suivantes:

$$(5.)\quad \begin{cases} Z+K\eta L'-K'\xi M'<0, \\ L'\eta+Z\eta^2+K'\eta\xi(\xi L'+\eta M')<0, \\ M'\xi+Z\xi^2+K\eta\xi(\xi L'+\eta M')>0, \end{cases}$$

dans lesquelles il faudra combiner les valeurs $\pm f$ pour ξ, avec celles $\pm g$ pour η, ce qui donnera quatre systèmes d'inégalités, relatifs à chacun des angles de la base.

3°. Si le corps s'appuie sur l'une des deux arêtes parallèles aux x, l'équation $(o.)$ du N°. 10. se réduisant à $q=0$, on aura:

$$\int P\partial x=-\frac{Z+K\eta L'}{1+K\eta^2},\quad \int Px\partial x=M',\quad Ap=L'+\eta\int P\partial x.$$

L'inégalité (q''.) du numéro 13. se réduira à $p\eta < 0$, et de plus en vertu des conditions signalées dans le numéro 11., on obtiendra ce système d'inégalités:

$$(t.)\quad Z+K\eta L'<0,\ L'\eta-Z\eta^2<0,\ -\frac{M'(1+K\eta^2)}{Z+K\eta L'}>-f,\ -\frac{M'(1+K\eta^2)}{Z+K\eta L'}<f,$$

dans lesquelles il faudra faire $\eta = \pm g$, relativement à chacune des deux arêtes parallèles aux x. L'analogie indique suffisamment quelles seraient les formules qui se rapportent aux arêtes parallèles aux y.

4°. Enfin, si le parallélipipède vient à se détacher entièrement du plan, l'inégalité

$$(u.)\quad Z+K\eta L'-K'\xi M'>0,$$

devra être satisfaite (N°. 13.) relativement à chacun des quatre angles de la base: c'est-à-dire qu'il faudra combiner dans la formule précédente, les valeurs $\pm f$ pour ξ, avec celles $\pm g$ pour η; ce qui donnera quatre inégalités différentes, lesquelles devront dans ce cas être vérifiées simultanément. C'est ce qui ne pourra avoir lieu lorsque Z est nulle, à moins qu'on n'ait en même temps $0 = L' = M'$. En outre, on déduit de ces quatre inégalités, combinées selon les règles d'élimination qui leur sont propres:

$$(u'.)\quad Z>0,\ Z+KgL'>0,\ Z-KgL'>0,\ Z-K'fM'>0,\ Z+K'fM'>0;$$

ce qui démontre à posteriori l'incompatibilité du système des inégalités ($u.$), ($u'.$) avec chacun des systèmes ($r.$), ($s.$), ($t.$).

Il ne semble pas aussi facile de démontrer algébriquement l'incompatibilité de chacun de ces derniers systèmes avec tous les autres, et en tous cas cela entraînerait bien des longueurs; mais on peut aisément vérifier cette incompatibilité sur autant d'exemples numériques que l'on voudra. Si l'on fait entre autres:

$$f = 1,\quad g = 2,\quad h = 2,\quad \text{d'où}\quad K = \tfrac{3}{8},\quad K' = \tfrac{3}{5},$$

et qu'on suppose de plus

$$Z=-1,\ L'=-6,\ M'=3,\ \text{on aura}\ P=\frac{73}{31},\ p=-\frac{15}{32.31},\ q=-\frac{3}{8.31}.$$

Le seul système ($s.$) sera vérifié complètement pour les valeurs $\xi = 1$, $\eta = 2$.

Il est à propos d'observer que cette analyse ne dépendant que de la forme du contour de la base, et de la direction des axes principaux, s'applique de même à la pyramide régulière à base rectangulaire, et à une infinité d'autres solides.

17. Occupons-nous maintenant du mouvement d'un cylindre droit, à base circulaire, qui repose par cette base sur le plan fixe, et appelons ϱ le rayon de la base, en observant que les momens d'inertie A, B, ou les nombres K, K' deviennent égaux entre eux. Si le cylindre glisse sur le plan, on obtiendra, par des considérations semblables à celles du numéro précédent, les conditions:

$$(v.)\quad Z<0,\quad L'^2+M'^2<\varrho^2 Z^2;$$

d'où l'on conclurait de même: 1°. que Z ne peut être nulle, à moins que L' et M' ne le soient aussi; 2°. que la résultante doit percer le plan fixe dans l'intérieur de la base.

Quand le cylindre se soulève, en s'appuyant sur un point $(\xi,\ \eta)$ de l'arête circulaire qui termine sa base, on a d'abord:

$$P=-\frac{Z+K(\eta L'-\xi M')}{1+K\varrho^2},\quad Ap=\frac{L'-Z\eta+K\xi(\xi L'+\eta M')}{1+K\varrho^2},$$

$$Aq=\frac{M'+Z\xi+K\eta(\xi L'+\eta M')}{1+K\varrho^2}.$$

Les coordonnées ξ, η sont déterminées par l'équation de l'arête

$$(w.)\quad \xi^2+\eta^2=\varrho^2,$$

et par l'équation $(k'.)$ du numéro 14., qui se réduit alors à $p\xi+q\eta=0$, ou, quand on Y substitue les valeurs précédentes de p, q, à

$$(k''.)\quad \xi L'+\eta M'=0.$$

L'inégalité $P>0$ doit être satisfaite, de même que celle $(q''.)$ du numéro 13., laquelle se réduit à $q\xi-p\eta>0$. Faisant les substitutions convenables, il en résulte:

$$(x.)\quad Z+K(\eta L'-\xi M')<0,\quad \varrho^2 Z-\eta L'+\xi M'>0.$$

L'élimination de Z, entre ces deux inégalités, donne

$$(y.)\quad \eta L'-\xi M'<0;$$

et comme on tire des équations $(w.)$ et $(k''.)$:

$$\xi=\pm\frac{\varrho M'}{\sqrt{(L'^2+M'^2)}},\quad \eta=\mp\frac{\varrho L'}{\sqrt{(L'^2+M'^2)}},$$

on voit que $(y.)$ ne peut être vérifiée, à moins qu'on ne choisisse les signes supérieurs dans les valeurs précédentes de ξ, η. Ainsi, parmi les deux points que détermine le système des équations $(w.)$ et $(k''.)$, il ne saurait y en avoir qu'un seul qui satisfasse aux conditions du problème.

Si Z n'est pas nulle, on peut mettre $(k''.)$ sous la forme $\xi y''-\eta x''=0$, $(x'',\ y'')$ étant toujours le point où la résultante perce le plan fixe. Il

en résulte que le point (ξ, η) est l'intersection de la circonférence $(w.)$ avec le diamètre mené par le point où la résultante pénètre le plan fixe. Le plan mené par ce diamètre et par l'axe du cylindre comprendra la résultante, dans le cas particulier où elle coupe l'axe. L'inégalité $(y.)$ devenant $Z(\xi x'' + \eta y'') < 0$, se résout en $\xi x'' + \eta y'' <$ ou > 0, selon que Z est positive ou négative: en conséquence, dans le premier cas, le centre de la circonférence tombera entre les deux points (ξ, η), (x'', y''); et dans le second, ces deux points seront situés du même coté, par rapport au centre.

Si Z est nulle, $(k''.)$ se réduit à $\eta X - \xi Y = 0$, équation d'une droite menée par le centre, parallèlement à la résultante. On a pour $(y.)$: $z''(\eta Y + \xi X) > 0$, Z'' étant la distance du centre de gravité au plan qui comprend la résultante, et qui est parallèle à celui des x, y. Selon que Z'' est positive ou négative, l'inégalité précédente devient $\eta Y + \xi X >$ ou < 0, c'est-à-dire que, dans le premier cas, le rayon mené du centre au point (ξ, η) sera dirigé dans le même sens que la résultante; et dans le second, il sera dirigé en sens contraire.

Par la substitution des valeurs de ξ, η, les inégalités $(x.)$ deviennent:

$$(x'.) \quad Z - K\varrho\sqrt{(L'^2 + M'^2)} < 0, \quad \varrho Z + \sqrt{(L'^2 + M'^2)} > 0.$$

D'un autre coté, en ayant égard à la première condition $(v.)$, la seconde peut s'écrire:

$$\varrho Z < -\sqrt{(L'^2 + M'^2)};$$

ce qui vérifie à posteriori, et d'une manière générale, que le système $(v.)$ et le système $(x.)$ ou $(x'.)$ sont incompatibles.

Il reste encore à considérer l'hypothèse où le cylindre se détache entièrement du plan. Il faut alors (N°. 14.), 1° que les racines de l'équation finale, résultant de l'élimination entre l'équation $(w.)$ et celle $U = 0$, ou $Z + K(\eta M' - \xi M') = 0$, soient imaginaires; 2° que pour un point pris arbitrairement sur la circonférence $(w.)$ ou dans son intérieur, on ait $Z + K(\eta L' - \xi M') > 0$. Effectuant les calculs relatifs à la première condition, et prenant ensuite pour le point arbitraire le centre même du cercle, il vient:

$$(z.) \quad Z^2 - K^2\varrho^2(L'^2 + M'^2) > 0, \quad Z > 0.$$

Cette dernière condition exclut l'existence simultanée des systèmes $(v.)$ et $(z.)$: en y ayant égard, l'autre peut s'écrire:

$$Z > K\varrho\sqrt{(L'^2 + M'^2)};$$

ce qui démontre encore l'incompatibilité du système (*z.*) avec celui (*x'.*) ou (*x.*).

Ajoutons à cela que la même analyse s'applique non seulement au cylindre, mais au cône droit, et généralement à tout corps de révolution homogène, reposant sur une base perpendiculaire à l'axe de révolution.

18. Ainsi qu'on l'a observé en commençant, il peut se faire que les points du corps qui exercent une percussion sur le plan, et dont la vitesse normale est nulle au premier instant du mouvement, s'en détachent avec une vitesse normale infiniment petite dans l'instant qui suit immédiatement, ce qui dépendra de l'intensité et de la direction des forces continues qui sollicitent le corps, comme aussi des vitesses acquises par l'impulsion initiale. Afin d'éclaircir cette observation par un exemple bien simple, on peut se représenter un corps pesant venant frapper de bas en haut un plan fixe horizontal. Il est clair que certains points du corps exerceront une percussion sur le plan, et que leur vitesse verticale deviendra nulle à l'instant du choc; ce qui ne les empêchera pas de se détacher du plan immédiatement après, par l'action de la pesanteur, avec une vitesse verticale infiniment petite.

Pour indiquer quelle serait, en pareil cas, la marche du calcul, supposons toujours que la pesanteur soit la force continue qui sollicite le corps, et ne considérons d'abord qu'un seul point de contact. Les équations (*a.*) et (*b.*) du N°. 1. s'appliqueront à cette hypothèse; et quand on y aura substitué les valeurs de p, q, r, relatives au premier instant du mouvement, et déterminées conformément à ce qu'on a vu dans les numéros précédens, de méme que celles de a, b, c, qui sont connues, elles donneront, par de simples calculs algébriques, les valeurs de

$$(l'.)\quad R,\ \frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2},\ \frac{\partial^2\beta}{\partial t^2},\ \frac{\partial^2\gamma}{\partial t^2},\ \frac{\partial p}{\partial t},\ \frac{\partial q}{\partial t},\ \frac{\partial r}{\partial t},$$

relatives au premier élément du temps. Il faut y joindre l'équation (*m'.*) du N°. 7., dont nous représenterons le second membre par $-V$, en observant que, d'après les relations (*c.*), on a:

$$V=(p\eta-q\xi)(qa-pb)+(r\xi-p\zeta)(pc-ra)+(q\zeta-r\eta)(rb-qc).$$

Selon que la valeur de R, déduite de ces sept équations, sera positive ou négative, le point (ξ, η, ζ) exercera ou non une pression sur le plan, et sa vitesse normale sera nulle, ou positive et infiniment petite, après l'élément ∂t.

Admettons que l'on ait, comme dans les N°s. 15. et suivans, $a = 0$, $b = 0$, $c = 1$, et, de plus, que la force instantanée qui sollicite le corps à l'orgine passe par l'axe des z', ce qui entraîne $N' = 0$; d'où, en vertu de la troisième équation $(b'.)$, $r = 0$. L'équation $(m'.)$ se réduira à:

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} + \eta \frac{\partial p}{\partial t} - \xi \frac{\partial q}{\partial t} - \zeta(p^2 + q^2) = 0,$$

ce qui donne

$$R = \frac{g \cos\varepsilon + \zeta(p^2 + q^2)}{\frac{1}{M} + \frac{\eta^2}{A} + \frac{\zeta^2}{B}}.$$

Remarquons maintenant qu'en vertu de nos hypothèses le corps est situé, par rapport au plan x, y, du côté des z positives, et que les z' sont comptées parallèlement aux z et dans le même sens, en sorte qu'on a z' ou $\zeta = z - \gamma$, γ étant positive. Relativement au point (ξ, η, ζ), qui repose sur le plan x, y, on a donc $\zeta = -\gamma$, et le terme $\zeta(p^2 + q^2)$ est essentiellement négatif. Ainsi, R est négatif toutes les fois que ce terme est numériquement supérieur à $g \cos\varepsilon$, et, à plus forte raison, quand g est nul, ou quand on fait abstraction de la pesanteur. Dans ce dernier cas, le corps se détache du plan, à la fin de l'élément ∂t, en vertu de la seule force d'impulsion, et avec une vitesse normale infiniment petite, égale à $-\zeta(p^2 + q^2)\partial t$.

Si un second point (ξ', η', ζ') avait exercé une percussion contre le plan, on aurait une nouvelle équation de même forme que $(m'.)$; et, en la retranchant de (m'.), il viendrait une autre équation de même forme que celle $(o.)$ du N°. 10., par rapport aux inconnues du problème, sauf l'addition d'un terme constant $V - V'$ dans son premier membre; ce qui modifierait les résultats que nous avons obtenus dans ce numéro. Mais on aurait toujours le nombre d'équations suffisant pour déterminer individuellement R et R', et pour reconnaître, au signe de ces quantités, les points qui se détachent du plan, à la fin de ∂t. V est nul quand la direction de l'axe instantanée passe par le point (ξ, η, ζ); car alors

$$p\eta - q\zeta = 0, \quad r\xi - p\zeta = 0, \quad q\zeta - r\eta = 0.$$

Il est encore nul, quel que soit le point (ξ, η, ζ), lorsque l'axe instantané est perpendiculaire au plan fixe, puisqu'alors

$$qa - qb = 0, \quad pc - ra = 0, \quad rb - qc = 0.$$

Si donc il y a eu, à l'origine, plus de deux points non en ligne droite exerçant une percussion sur le plan, comme les termes V s'évanouis-

sent, on aura entre les inconnues ($l'.$) des relations de même forme que celles des N°s. 12. et suivans, par rapport aux inconnues ($l.$); ainsi, il suffira d'appliquer la même analyse pour en déduire les mêmes conséquences.

Au reste, les remarques de ce numéro s'étendent à telle époque du mouvement que l'on voudra considérer, pourvu qu'en cet instant les valeurs des six quantités p, q, r, a, b, c, soient données par l'intégration ou autrement.

Addition au numéro 15.

Comme le résultat auquel on parvient dans ce numéro, et sur lequel nous avons appelé l'attention en commençant, semblerait peut-être paradoxal, il ne sera pas hors de propos de le démontrer encore par une autre voie, et de le généraliser ainsi qu'il suit:

1°. Si le corps pouvait se soulever, en s'appuyant sur un point du contour de sa base, les équations ($b'.$) et ($m.$) donneraient, à cause de $0 = L' = M' = N'$, quelle que soit d'ailleurs la direction des axes principaux:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = -P\left(\frac{\lambda^2}{A} + \frac{\mu^2}{B} + \frac{\nu^2}{C}\right).$$

P devrait être positif; donc $\frac{\partial \gamma}{\partial t}$ serait négatif, ce qui est en contradiction avec l'inégalité ($q''.$) du numéro 13., qui subsiste sous la seule condition que la perpendiculaire abaissée du centre de gravité sur le plan fixe tombe dans l'intérieur de la base.

2°. Le corps ne peut pas davantage se soulever en s'appuyant sur une arête rectiligne; car on aurait dans ce cas, en supposant $a = 0$, $b = 0$, $c = 1$:

$$M\frac{\partial \gamma}{\partial t} = Z + \int P \partial s, \quad Ap = \int P\eta \partial s, \quad Bq = -\int P\xi \partial s.$$

Prenons pour équation de l'arête:

$$\eta = m\xi + n, \quad \text{d'où} \quad \int P\eta \partial s = m\int P\xi \partial s + n\int P \partial s;$$

l'équation ($o.$) donnera:

$$-q(\xi - \xi') + p(\eta - \eta') = 0, \quad \text{ou} \quad mp = q,$$

et l'équation ($m.$):

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = q\xi - p\eta = -np.$$

De là on tire, toutes réductions faites:

$$\int P \partial s = -\frac{Z(A + m^2 B)}{A + m^2 B + n^2 M}, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{n^2 Z}{A + m^2 B + n^2 M}.$$

Puisque $\int P \partial s$ doit toujours être positive, il résulte de la première de ces deux équations que Z est négative; et par suite, en vertu de la seconde, $\frac{\partial \gamma}{\partial t}$ serait négative, ce qui est encore en contradiction avec l'inégalité (φ''.). Quoique cette dernière partie de la démonstration s'appuie sur la condition que l'axe des z' soit perpendiculaire au plan x, y, on conçoit aisément qu'on pourrait, sauf la complication des calculs, lui donner la même généralité qu'à la première partie de cette démonstration: et il en résulte que le théorème du numéro 15. subsiste, quelle que soit la direction des axes principaux, sous la seule condition que la résultante passe par le centre de gravité, et que la perpendiculaire abaissée du centre de gravité sur le plan fixe, tombe dans l'intérieur de la base. Ainsi ce que nous avons dit des prismes, cylindres et cônes droits, s'appliquera également aux prismes, cylindres et cônes obliques, pourvu que l'obliquité ne dépasse pas certaines limites. Ces corps pourront être supposés imparfaitement réguliers et homogènes, et le frottement exercé sur le plan, ou la résistance de l'air, seront les seules causes qui les feront chavirer.

Nous observerons encore que les forces instantanées, qui ont été designées dans tout ce qui précède par les lettres X, Y, Z, sont censées données en nombres; mais si l'on connaissait seulement la masse et la vitesse d'un autre corps qui vient frapper celui en repos sur le plan fixe, on déduirait sans peine de la théorie ordinaire des chocs les valeurs numériques des projections et des momens de la force instantanée, développée par ce choc. Enfin si le corps dont nous avons désigné la masse par M, au lieu d'être en repos sur le plan, et d'être tiré de cet état par l'action d'une force instantanée, venait lui-même choquer le plan fixe, nos formules seraient les mêmes, en remplaçant X, Y, Z, L', M', N', par les valeurs qu'avaient les quantités

$$M\frac{\partial \alpha}{\partial t},\quad M\frac{\partial \beta}{\partial t},\quad M\frac{\partial \gamma}{\partial t},\quad Ap,\quad Bq,\quad Cr.$$

immédiatement avant le choc.

(La suite dans le cahier prochain.)

10.
Bemerkungen zu den Aufgaben und Lehrsätzen S. 96. 97. 98 im ersten Heft zweiten Bandes dieses Journals *).

(Vom Herrn *O. G. D. Aubert* zu Christiania in Norwegen.)

1. Aufgabe. *Wenn in einer Ebene drei beliebige Kreise einander in einem Puncte schneiden, so soll man durch denselben eine Gerade so ziehen, dafs wenn* U, X, Y, Z *ihre übrigen Durchschnitte mit den Kreisen sind, die Abschnitte* UX, XY *der Geraden ein gegebenes Verhältnifs zu einander haben.*

2. Aufgabe. *Wenn im Raume vier beliebige Kugeln einander in einem Puncte schneiden, so soll man durch denselben eine Gerade so ziehen, dafs wenn* U, X, Y, Z *die Puncte sind, in welchen sie den Kugelflächen aufserdem begegnet, ihre Abschnitte* UX, XY, YZ *gegebene Verhältnisse zu einander haben.*

Jede Gerade, die durch einen der Durchschnittspuncte C (Taf. II. Fig. 1.) der Kreise A und B gezogen wird, bildet mit den Linien, die ihre Endpuncte mit dem anderen Durchschnittspuncte D verbinden, ein Dreieck, welches dem Dreiecke ABD ähnlich ist, weil es mit ihm gleiche Winkel hat. Wenn man also AD und BD bis E und F verlängert, und die Gerade EF zieht, so wird dieselbe mit AB parallel sein, und durch den Punct C gehen, auch wird EF, weil $EF:GH = DE:DG$ ist, die gröfste unter allen Linien durch C sein, indem DE die gröfste unter allen Sehnen durch D im Kreise A ist. Ferner ist $EF = 2AB$, und $GH = EF.\frac{DG}{DE} = EF.\cos C$. Hierdurch wird es leicht sein, die obige Aufgabe zu lösen.

Es sollen nemlich auf der gesuchten Geraden, bei den Kreisen die zwei Abstände in einem gegebenen Verhältnifs $m:n$, und bei den Kugeln die drei Abstände in dem Verhältnisse $m:n:p$ sein. Stellt man

*) Dieser Aufsatz eines Freundes des leider viel zu früh dahin geschiedenen, so ausgezeichneten Mathematikers, Herrn Abel, wurde dem Herausgeber noch von diesem, nicht lange vor seinem Tode, mit seinem und des Herrn Verfassers Auftrage, den Aufsatz in das Journal einzurücken, mitgetheilt. Anm. d. Herausg.

sich die mit den Central-Linien durch den gemeinschaftlichen Schnittpunct parallel gezogenen Geraden vor, und bezeichnet sie bei den Kreisen durch C und C', bei den Kugeln durch C, C', C'', so werden die Cosinus der Winkel, die die gesuchte Gerade mit den bekannten C etc. bildet, in dem gegebenen Verhältnifs wie $\frac{m}{C} : \frac{n}{C'}$ bei den Kreisen, und wie $\frac{m}{C} : \frac{n}{C'} : \frac{p}{C''}$ bei den Kugeln stehen. Wenn man also auf den Linien C etc. von dem Puncte C Stücke in diesem Verhältnifs absetzt, und durch die Endpuncte und C einen Kreis oder eine Kugel construirt, so wird in beiden Fällen der durch C gezogene Durchmesser die gesuchte Gerade sein. Auch kann man leicht beweisen, dafs die Linien, die den Endpunct der gesuchten Geraden in einem der Kreise oder Kugeln, im ersten Falle mit den nicht gemeinschaftlichen Durchschnittspuncten des gedachten Kreises mit den zwei übrigen, im zweiten Falle mit den dem gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte der Kugeln auf den Durchschnittskreisen der gedachten Kugel mit den drei anderen Kugeln diametral entgegengesetzten Puncten verbinden, sich wie die Cosinus der oben erwähnten Winkel verhalten, also wie $\frac{m}{C}$ etc. Der Ort der Puncte in einer Ebene, deren Abstände von zwei Puncten ein gegebenes Verhältnifs haben, ist bekanntlich ein Kreis, dessen Mittelpunct auf der Linie liegt, die die zwei constanten Puncte verbindet, im Raume also eine Kugel. Sollen also die Puncte von drei Puncten Abstände haben, die in gegebenem Verhältnifs stehen, so müssen sie auf zwei Kugeln liegen: ihr Ort wird also ein Kreis sein. Diese Ortskreise kann man leicht construiren, und also auch die gesuchte Gerade finden.

Von Kreisen, die einander in einem Puncte schneiden, will ich, des Folgenden wegen, noch einige Bemerkungen hinzufügen.

Die Kreise a, b, c, d, e etc. (Fig. 2.) schneiden einander in dem Puncte F. Aus einem beliebigen Puncte A im Kreise a ziehe man durch den (nicht gemeinschaftlichen) Durchschnittspunct der Kreise a und b, eine Gerade bis B, aus diesem Punct durch den Durchschnittspunct H der Kreise b und c, eine Gerade bis C, u. s. w., bis man zum Kreise a zurückkommt, so wird sich die letzte Gerade EA in A anschliefsen. Denn in den Vierecken wie $FBHG$ sind die entgegengesetzten Winkel $F + B = 2R$. Die Zahl der Kreise sei n, so wird die Summe

aller Winkel in den verschiedenen Vierecken $= n.2R$ sein. Zieht man hiervon die Winkel um F, $= 4R$ ab, so wird $A+B+C\ldots. = n.2R-4R$ sein, unter der Voraussetzung, dafs das Vieleck in A geschlossen sei. Wenn dieses nicht der Fall wäre, so würde die Gerade EA die AB in einem anderen Puncte schneiden, also ihr Winkel gröfser oder kleiner sein, mithin die Summe der Winkel gröfser oder kleiner als $n.2R-4R$; aber sie soll eben so grofs sein, weder gröfser noch kleiner. Das Vieleck mufs sich also, wie behauptet, schliefsen. Die verschiedenen Vielecke die man durch Versetzung des Anfangspunctes A erhält, werden, wie man leicht sieht, unter sich und dem Centralvieleck $abcde$ ähnlich sein, denn die einzelnen Dreiecke, wie ABF, sind ähnlich. Das gröfste unter allen diesen Vielecken wird nach dem Vorhergehenden dasjenige sein, dessen Seiten mit den Centrallinien ab, bc etc. parallel sind, und welches $= 4abcde = M$ ist. Jedes andere Vieleck wie $ABCDE$, verhält sich zu M wie $AB^2 : A'B'^2$. Also ist

$$ABCDE = M.\cos v^2 = M.\sin^2 FGA.$$

6. Aufgabe. *Fället man aus irgend einem Peripheriepunct* P *des um ein gegebenes Dreieck beschriebenen Kreises Lothe auf die Seiten des Dreiecks, so liegen bekanntlich die Fufspuncte dieser drei Lothe allemal in irgend einer Geraden* G. *Man soll nun denjenigen Punct* P *finden, für welchen die ihm zugehörige Gerade* G *mit einer gegebenen Geraden parallel ist.*

Aus einem beliebigen Puncte D (Fig. 3.) des um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises sind Linien unter gleichen Winkeln an einerlei Seite nach den Seiten gezogen, und schneiden sie in den Puncten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$. Der Winkel $\mathfrak{A}$ ist dem Winkel $\mathfrak{B}$ gleich, also der Bogen AB' dem Bogen $A'B$ oder $AB = A'B'$, mithin sind die Sehnen AB und $A'B'$ gleich, und AA' ist mit BB' und aus demselben Grunde mit CC' parallel (die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ sind gleich). Nun sind in dem nach den Ecken centrischen Viereck $\mathfrak{A}\mathfrak{B}CD$ die Winkel $D\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $DC\mathfrak{B}$ gleich; aber $DC\mathfrak{B} = DA'A$, also $D\mathfrak{A}\mathfrak{B} = DA'A$, und $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ parallel mit AA'. Aus demselben Grunde müssen auch die Linien $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ mit AA', BB' und CC' parallel sein; folglich können sie nur eine Gerade bilden, d. h. die Puncte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ liegen auf einer Geraden, parallel mit AA' etc. Verlangt man nun, dafs diese Gerade mit einer gegebenen Geraden parallel sein soll, so braucht man nur eine Linie von der gegebenen Lage

aus einer der Ecken des Dreiecks, zum Beispiel aus A nach A' zu ziehen: eine Linie aus diesem Puncte nach der A entgegengesetzten Seite unter dem gegebenen Winkel gezogen, bestimmt den gesuchten Punct D.

Wir haben im Vorbeigehen bewiesen, dafs die Puncte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ auf einer Geraden liegen. Directer und einfacher kann man dieses darthun, wenn man, wie oben, bemerkt, dafs $D\mathfrak{A}\mathfrak{B} = DCA = DBA$ (und da auch das Viereck $\mathfrak{A}BC\mathfrak{C}D$ centrisch nach den Ecken ist) $= D\mathfrak{A}\mathfrak{C}$.

$\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ bilden also den nemlichen Winkel mit der nemlichen Linie CD, machen also nur eine Gerade aus. Was nur von rechten Winkeln bewiesen war, ist auf diese Weise ohne Schwierigkeit auf beliebige gleiche Winkel erweitert worden. Auf dieselbe Art läfst sich der schöne polygonometrische Satz des Herrn Steiner (I. Band 1. Heft dieses Journals), der auch nur von rechten Winkeln behauptet war, auf beliebige gleiche Winkel erweitern. B und C (Fig. 4.) sind rechte Winkel, also läfst sich um das Viereck $ABCD$ ein Kreis beschreiben, dessen Mittelpunct E in AD liegt. Nun ist, wie leicht zu sehen, $BCD - ABC = 2BCE$, also $BE.CE.\sin BEC = AD^2.\frac{\sin 2BDC}{4}$; welches die Gleichung ist, von der Herr Steiner seinen Satz herleitet. Für den Fall wo B und C beliebige gleiche Winkel sind (nach derselben Seite), geht dieselbe über in:

$$\sin C^2 \sin 2D.(BCD - ABC) - \sin D^2 \sin 2C(ABD - ACD) = \sin D^2 AD^2.(\sin C^2 - \sin D^2),$$

woraus, so weit ich sehe, nichts für unsern Satz folgt. Aus den obigen Bemerkungen aber, von Kreisen die sich in einem Puncte schneiden, wird die Sache leicht klar. Es lassen sich nemlich, wenn nur die Winkel gleich sind, um die Vierecke $ABCD$ etc. (Fig. 3.) Kreise beschreiben, die alle den Punct D gemein haben, und sich übrigens in B, C etc. schneiden. Durch diese Puncte läfst sich, wie oben bemerkt, den Kreisen ein Vieleck einschreiben, dessen Seiten respective auf DB, DC senkrecht stehen. Der Inhalt dieses Vielecks (M) ist, wenn man das ursprüngliche Vieleck A nennt, $= \frac{A}{\sin C^2}$. Nennt man den constanten Inhalt des eingeschriebenen Vielecks B, so ist nach Herrn Steiner's Gleichung (II. Band S. 263.):

$$M - 2B = \frac{A}{\sin C^2} - 2B = \Sigma.\frac{AD^2 \sin A^2}{4},$$

wo das erste Glied, wie oben, constant ist. Die Schlüsse sind die nämlichen. Es ist wahrscheinlich, dafs der Satz einer noch gröfsern Erweiterung fähig ist. Dafs der Ort des Punctes *D*, im Falle beliebiger nicht gleicher Winkel ein Kegelschnitt sei, ist aus geometrischen Gründen leicht zu errathen, und analytisch nicht schwer zu beweisen. Es fragt sich, ob der Ort des Punctes *D* nicht ein Kreis werden könne, wenn auch die Winkel nicht gleich sind.

7. Lehrsatz. *Halbirt man in einem Viereck im Kreise sowohl die Winkel zwischen den Diagonalen, als auch die Winkel, welche die gegenüberliegenden Seiten einschliefsen, so sind von den* 6 *Geraden, welche diese Winkel halbiren,* 3 *und* 3 *parallel.*

Da $x = y$ (Fig. 5.), so ist Bogen $DH - CG = FH - EG$ oder $DH + EG = FH + CG$, folglich

$$o = p.$$

Von den Linien, die die Winkel halbiren, mufs also die eine auf *AH* senkrecht, die andere mit ihr parallel sein.

8. Lehrsatz. *Vier beliebige Geraden in einer Ebene bilden, zu drei und drei genommen, vier Dreiecke. In jedem dieser Dreiecke schneiden die drei Lothe aus den Spitzen auf die gegenüberliegenden Seiten einander in einem Punct, und diese* 4 *Puncte liegen allemal in einer Geraden.*

Von den Dreiecken wollen wir nur die drei, die eine der Geraden *ABC* (Fig. 6.) mit je zwei der übrigen bildet, und von den Lothen nur diejenigen betrachten, die von den Puncten *A*, *B*, *C* (den Durchschnittspuncten der Geraden *ABC* mit den drei andern) ausgehen. Von diesen 6 Lothen sind je zwei auf derselben Geraden perpendiculair, z. B. *AD* und *BF* etc., und also parallel. Der Satz läfst sich also auch so ausdrücken. Wenn in einem Sechseck, dessen entgegengesetzte Seiten parallel sind, die erste, dritte und fünfte Ecke in einer und derselben Geraden liegen, so liegen auch die zweite, vierte und sechste Ecke in einer und derselben Geraden, welches nur ein specieller Fall eines bekannten Satzes (Carnot *Géométrie de position*, *pag.* 456.) ist. Um ihn zu beweisen, will ich erst den umgekehrten Satz betrachten, nemlich: In einem Sechseck, welches in ein System von zwei Geraden eingeschrieben ist, und in welchem zwei Paare gegenüberstehender Seiten parallel sind, ist auch das dritte Paar parallel.

Es sei BE (Fig. 7.) mit DG, und CE mit DF parallel, so hat man

$$AB : AD = AE : AG,$$
$$AD : AC = AF : AE,$$

also
$$AB : AC = AF : AG,$$

und folglich ist BF mit CG parallel.

Vermittelst dieses Satzes läfst sich der obige Lehrsatz 8. leicht indirect beweisen.

Auf dieselbe Art wie für das Sechseck kann man von den in ein System zweier Geraden eingeschriebenen Zehn-Ecken, Vierzehn-Ecken u. s. w. (nemlich von jedem Vieleck, dessen Seitenzahl ein Product von Geraden und Ungeraden ist) beweisen, dafs, wenn alle Paare entgegengesetzter Seiten, aufser einem, parallel sind (oder, durch das Projections-Princip verallgemeinert: sich in Puncten schneiden, die in einer Geraden liegen), auch das letzte Paar parallel sein mufs (oder in einem Puncte sich schneiden mufs, der auf derselben Geraden liegt, wie die anderen).

9. *Vier beliebige Puncte in der Peripherie eines gegebenen Kreises bestimmen, zu dreien genommen, vier Dreiecke. Die vier Puncte, in welchen die Lothe aus den Spitzen dieser vier Dreiecke auf die gegenüberliegenden Seiten einander schneiden, liegen allemal in der Peripherie eines Kreises, welcher dem gegebenen Kreise gleich ist.*

Carnot bemerkt (*Géométrie de position, pag.* 163.), dafs der Abstand EF (Fig. 8.) des Mittelpuncts E des um ein Dreieck ABC beschriebenen Kreises von einer der Seiten halb so grofs ist, als der Abstand CG der entgegengesetzten Winkelspitze C von dem Puncte wo die 3 Lothe aus den Winkelspitzen des Dreiecks auf die gegenüberstehenden Seiten sich schneiden.

Man ziehe nemlich einen Durchmesser aus B nach H, so sind AH auf AB, CH auf CB senkrecht, und also respective mit CG und AG parallel. Die Figur $AHCG$ ist also ein Parallelogramm, und $AH = CG$. Man hat also $EF = \frac{1}{2} AH = \frac{1}{2} CG$. $CG = 2\,EF$ behält seine Gröfse, wenn E und AB constant bleiben, C aber eine andere Lage annimmt. Solchergestalt ist, wenn im Dreieck ABD die Lothe sich in H schneiden, DH parallel mit CG und gleich CG, also ist auch HG gleich und parallel mit CD.

Wenn man jetzt auch die zwei übrigen Lothpuncte (so wollen wir die Puncte nennen, wo die Lothe sich schneiden) bestimmt, so werden eben so die Geraden, die sie verbinden, mit den übrigen Seiten des

Vierecks parallel und gleich grofs sein, und begränzen also ein Viereck, das dem ursprünglichen gleich ist und sich also in einen, dem ursprünglichen Kreise gleichen Kreis einschreiben läfst.

10. Lehrsatz. *Fället man aus den Ecken eines beliebigen (irregulairen) Tetraëders auf die gegenüberliegenden Seiten-Ebenen Lothe, so schneiden diese vier Lothe einander im Allgemeinen nicht. Schneiden sich aber, in einem besonderen Falle, irgend zwei derselben, so schneiden alle vier einander in einem und demselben Puncte. Im Allgemeinen aber haben die genannten vier Lothe die merkwürdige Eigenschaft, dafs jede Gerade, welche durch irgend drei derselben geht, auch das vierte schneidet, d. h., dafs durch jeden beliebigen Punct, den man in einem der vier Lothe annimmt, allemal eine Gerade so gelegt werden kann, dafs sie die drei übrigen Lothe schneidet.*

Die Lothe AF und DG (Fig. 9.), aus A und D auf die gegenüberstehenden Seitenflächen, schneiden sich in H. Legt man durch diese Lothe eine Ebene, so wird dieselbe auf ABC und BCD, so wie auch auf ihrer Schnittlinie BC senkrecht stehen. Mithin werden die Geraden AE und DE, in welchen die Ebene ADE die Ebenen ABC und BCD schneidet, beide durch den nemlichen Punct E auf der Geraden BC gehen, und beide auf BC senkrecht stehen. Also wenn die Lothe aus A und D auf die entgegengesetzten Ebenen, einander schneiden, so werden sie immer durch die Lothe aus den nämlichen Puncten auf die der AD entgegengesetzten Seite BC gehen. Und umgekehrt: die beiden Lothe AF und DG werden sich schneiden, sobald sie durch die Lothe DE und AE gehen. Also ist es nicht nothwendig, dafs, wenn zwei Lothe sich schneiden, alle vier sich schneiden. Denn sollte dies der Fall sein, so würde AF z. B. wie durch DE auch durch die zwei übrigen Lothe des Dreiecks BCD gehen, also durch den Punct, in welchem sich alle drei schneiden, welches nach dem oben Angeführten nicht nothwendig ist, wenn man nur annimmt, dafs AF und DG einander schneiden. Es ist also AF auf DE, DG auf AE senkrecht, folglich auch die durch H gezogene Gerade EI, auf AD; und da BC auf der Ebene ADE senkrecht ist, so müssen auch BI und CI auf AD, und die Ebene BCI auf ABD und BCD senkrecht sein. Die aus B und C auf diese Ebenen gefällten Lothe müssen also in der nemlichen Ebene BCI liegen und einander schneiden, aber nicht nothwendig in H. Geht aber das eine von ihnen durch

H, z. B. das aus *B* gezogene Loth, so steht es im Dreieck *BCI* auf *CI* senkrecht, und also die durch *H* gezogene Gerade auf *BI*, und folglich auch auf der Ebene *ABD*. Also, wenn sich zwei Lothe schneiden, so schneiden sich auch die zwei übrigen, und wenn drei sich in einem Puncte schneiden, so geht auch das vierte durch den nämlichen Punct.

Nunmehr ist leicht einzusehen, dafs auch der andere Theil der Behauptung nicht zutrifft. Wir wollen uns den Fall vorstellen, wo zwei Lothe sich in einem, und die zwei übrigen in einem anderen Puncte schneiden, welches, wie bewiesen, möglich ist, so bildet jedes Paar Lothe eine Ebene, und jede Gerade, die alle vier Lothe schneiden soll, mufs in diesen beiden Ebenen liegen, also ihm Schnittlinie sein. Aber es giebt der Geraden, welche die 3 Lothe, und folglich nach der Behauptung auch das vierte schneiden, unstreitig unendlich viele (die man in diesem Falle durch den Schnittpunct der einen mit der Ebene der beiden übrigen ziehen kann), und die Ebenen hätten solchergestalt unendlich viele Schnittlinien.

11. *Vier der Gröfse und Lage nach gegebene Kugeln können im Allgemeinen von* 16 *bestimmten Kugeln berührt werden; gehen sie aber durch unendliche Vergröfserung in vier Ebenen über, die ein Tetraëder (beliebige dreiseitige Pyramide) bilden, so bleiben von jenen* 16 *Kugeln im Allgemeinen nur noch* 8 *übrig, d. h. es giebt im Allgemeinen* 8 *Kugeln, von denen jede die* 4 *Seiten-Ebenen eines gegebenen Tetraëders berührt. Von diesen* 8 *Kugeln ist* 1) *eine dem Tetraëder eingeschrieben,* 2) *von vier andern berührt jede die Aufsenseite einer Seiten-Ebene und die Verlängerungen der drei übrigen; und* 3) *jede der drei übrigen Kugeln berührt alle Seiten-Ebenen in ihrer Verlängerung, und zwar zwei Seiten-Ebenen auf ihrer Aufsenseite.*

Bezeichnet man nun den Radius der Kugel (1.) *durch* R, *die Radien der Kugeln* (2.), *nach der Ordnung ihrer Gröfse, durch* R_1, R_2, R_3, R_4; *wo nemlich der letzte der gröfste ist, und die Radien der Kugeln* (3.), *nach der Ordnung ihrer Gröfse, durch* R_5, R_6, R_7, *so hat man zwischen diesen Radien unter anderen folgende merkwürdige Relationen:*

I. $$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_6} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_1} \pm \frac{1}{R_7},$$

II. $$\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \pm \frac{1}{R_7} = 0,$$

III. $$\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} + \frac{1}{R_3^2} + \frac{1}{R_4^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{R_5^2} + \frac{1}{R_6^2} + \frac{1}{R_7^2},$$ etc.

Sind von den Seiten-Ebenen des Tetraëders drei zu einander senkrecht, so hat man z. B. auch noch folgende Gleichungen:

$$\text{IV.}\quad \frac{1}{R_4 - R} = \frac{1}{R_1 + R_7} + \frac{1}{R_2 + R_6} + \frac{1}{R_3 + R_5},$$

$$\text{V.}\quad \frac{1}{RR_4} = \frac{1}{R_1 R_7} + \frac{1}{R_2 R_6} + \frac{1}{R_3 R_5}.$$

Wir wollen die Seiten-Ebenen des Tetraëders, nach der Ordnung ihrer Gröfse, s', s'', s''', s^{IV}, und den Inhalt des Tetraëders T nennen, so hat man, wie leicht zu sehen, folgende Gleichungen:

$$T = \frac{(s' + s'' + s''' + s^{IV})R}{3}, \quad \text{also} \quad \frac{1}{R} = \frac{s' + s'' + s''' + s^{IV}}{3T} = S,$$

$$T = \frac{(-s' + s'' + s''' + s^{IV})R_1}{3}, \quad \text{also} \quad \frac{1}{R_1} = S - p',$$

$$T = \frac{(s' - s'' + s''' + s^{IV})R_2}{3}, \quad \text{also} \quad \frac{1}{R_2} = S - p'',$$

$$T = \frac{(s' + s'' - s''' + s^{IV})R_3}{3}, \quad \text{also} \quad \frac{1}{R_3} = S - p''',$$

$$T = \frac{(s' + s'' + s''' - s^{IV})R_4}{3}, \quad \text{also} \quad \frac{1}{R_4} = S - p^{IV},$$

$$T = \frac{(-s' - s'' + s''' + s^{IV})R_5}{3}, \quad \text{also} \quad \frac{1}{R_5} = S - (p' + p''),$$

$$T = \frac{(-s' - s'' - s''' + s^{IV})R_6}{3}, \quad \text{also} \quad \frac{1}{R_6} = S - (p' + p'''),$$

$$T = \frac{(-s' + s'' + s''' - s^{IV})R_7}{3}$$

$$\text{oder} \quad \frac{(s' - s'' - s''' + s^{IV})R_7}{3}, \quad \text{also} \quad \frac{1}{R_7} = S - (p' + p^{IV}) \text{ oder } S - (p'' + p''')$$

(nemlich derjenige von beiden Ausdrücken, der positiv wird).

Hieraus lassen sich leicht die Formeln des Satzes beweisen. Der Kürze wegen übergehe ich die beiden ersten, und bemerke nur in Rücksicht auf die Zweideutigkeit von R_7, dafs man untersuchen mufs, welcher von den beiden Ausdrücken $s' + s^{IV}$ und $s'' + s'''$ der gröfsere sei.

Die Richtigkeit der dritten ergiebt sich aus folgender Rechnung:

$$\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} + \frac{1}{R_3^2} + \frac{1}{R_4^2} = (S - p')^2 + (S - p'')^2 + (S - p''')^2$$

$$= 4S^2 - 2S(p' + p'' + p''' + p^{IV}) + p'^2 + p''^2 + p'''^2 + p^{IV2},$$

oder, da $p' + p'' + p''' + p^{IV} = 2S$ ist,

$$= p'^2 + p''^2 + p'''^2 + p^{IV2}.$$

Welchen von den beiden entgegengesetzten Werthen von R_7 man nimmt, ist gleichgültig, da das doppelte Zeichen auf das Quadrat keinen Einflufs hat.

Es ist aber auch

$$\frac{1}{R^2}+\frac{1}{R_5^2}+\frac{1}{R_6^2}+\frac{1}{R_7^2}=S^2+(S-(p'+p''))^2+(S-(p'+p'''))^2+(S-(p'+p^{IV}))^2$$
$$= 4S^2-2S(3p'+p''+p'''+p^{IV})+(p'+p'')^2+(p'+p''')^2+(p'+p^{IV})^2$$
$$= -4p'S+2p'^2+(p'^2+p''^2+p'''^2+p^{IV\,2})+2p'p''+2p'p'''+2p'p^{IV}$$
$$= -4p'S+4p'S+(p'^2+p''^2+p'''^2+p^{IV\,2}) = p'^2+p''^2+p'''^2+p^{IV\,2},$$

folglich sind die beiden Ausdrücke

$$\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_2^2}+\frac{1}{R_3^2}+\frac{1}{R_4^2} \text{ und } \frac{1}{R^2}+\frac{1}{R_5^2}+\frac{1}{R_6^2}+\frac{1}{R_7^2}$$

einander gleich.

Die Richtigkeit der beiden folgenden Gleichungen (IV. und V.) erhellet daraus, dafs, wenn drei Seiten-Ebenen auf einander senkrecht sind, nach einem bekannten Satze allemal

$$p^{IV\,2} = p'^2+p''^2+p'''^2$$

ist. Übrigens mufs man in diesen zwei Formeln, in welchen keine Quadrate von R_1, R_2, R_3, ... vorkommen, auf das doppelte Zeichen von R_7 Rücksicht nehmen. R_7 wird positiv, wenn $s'+s^{IV}$ gröfser ist als $s''+s'''$, und umgekehrt.

Ferner ist

$$(S-p')(S-(p''+p'''))+(S-p'')(S-(p'+p'''))+(S-p''')(S-(p'+p''))$$
$$= 3S^2-3S(p'+p''+p''')+2(p'p''+p'p'''+p''p''')$$
$$= 3S^2-3S(2S-p^{IV})+(2S-p^{IV})^2-p^{IV\,2},$$

[denn $p'+p''+p''' = 2S-p$, und

$$2(p'p''+p'p'''+p''p''') = (p'+p''+p''')^2+(p'^2+p''^2+p'''^2)]$$
$$= -3S(S-p^{IV})+4S^2-4Sp^{IV} = S(S-p^{IV}).$$

Hieraus ergiebt sich die Richtigkeit der letzten Formel V. Denn man sieht leicht, dafs die einzelnen Glieder in V. nichts Anderes sind, als die Glieder in der oben stehenden Gleichung.

Es folgt aber auch die Richtigkeit der Gleichung IV., denn es ist:

$$R_1+R_7 = \frac{1}{S-p'}+\frac{1}{S-(p''+p''')} = \frac{2S-(p'+p''+p''')}{(S-p')(S-(p''+p'''))}$$
$$= \frac{p^{IV}}{(S-p')(S-(p''+p'''))}, \text{ also } \frac{1}{R_1+R_7} = \frac{(S-p')(S-(p''+p'''))}{p^{IV}},$$

ferner $R_2+R_6 = \frac{1}{S-p''}+\frac{1}{S-(p'+p''')} = \frac{p^{IV}}{(S-p'')(S-(p'+p'''))}$,

also $\frac{1}{R_2+R_6} = \frac{(S-p'')(S-(p'+p'''))}{p^{IV}}$,

endlich $R_3+R_5 = \frac{1}{S-p'''}+\frac{1}{S-(p'+p'')} = \frac{p^{IV}}{(S-p''')(S-(p'+p''))}$,

also $$\frac{1}{R_3+R_5} = \frac{(S-p''')(S-(p'+p''))}{p^{IV}}.$$

Wenn man addirt, so erhält man nach dem Obigen:

$$\frac{1}{R_1+R_7}+\frac{1}{R_2+R_6}+\frac{1}{R_3+R_5} = \frac{S(S-p^{IV})}{p^{IV}} = \frac{1}{\frac{1}{S-p^{IV}}-\frac{1}{S}} = \frac{1}{R_4-R'},$$

wie zu beweisen war.

12. **Lehrsatz.** *Beschreibt man in einem beliebigen dreikantigen Körperwinkel eine Reihe Kugeln, von denen jede die drei Seiten-Ebenen desselben berührt, und die einander der Ordnung nach berühren, so bilden die Radien dieser Kugeln, ihrer Gröfse nach, eine geometrische Progression. Sind z. B.* a, b, c *die Winkel, welche die Kanten des Körperwinkels mit einander bilden, und setzt man die Radien zweier nach einander folgender Kugeln* R_1 *und* R_2, *und zur Abkürzung* $a+b+c=2s$, *so ist der Exponent der genannten Progression:*

I. $$\frac{R_2}{R_1} = \left[\sqrt{\left(\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}\right)}+\sqrt{\left(1+\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}\right)}\right]^2.$$

Oder sind A, B, C *die drei Flächenwinkel des Körperwinkels, und man setzt zur Abkürzung* $A+B+C=2S$, *so ist:*

II. $$\frac{R_2}{R_1} = \left[\frac{\sqrt{(-\cos S\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C))}}{2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}+\sqrt{\left(1+\frac{-\cos S\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}{2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}\right)}\right]^2.$$

Zur Erläuterung will ich den analogen Satz aus der Planimetrie in Erinnerung bringen. Nemlich: „Wenn man in einen Winkel Kreise einschreibt, welche der Reihe nach die Schenkel des Winkels und einander berühren, so bilden die Halbmesser dieser Kreise eine geometrische Progression, deren Exponent, wenn man den Winkel durch A bezeichnet,

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{1+\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{3}} = \tan g^2\left(45^\circ+\frac{A}{4}\right)$$

ist. Denn

$$AF\,(\text{Fig. 10.}) = AB+BF = R_1\left(\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+1\right) = AC-CF = R_2\left(\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}-1\right),$$

folglich

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+1}{\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}-1} = \frac{1+\sin\frac{A}{2}}{1-\sin\frac{A}{2}}.$$"

Wenn man nun erwägt, dafs die Kugeln, welche die Seiten-Ebenen eines Körperwinkels berühren, in einen geraden Kegel eingeschrieben sind, der die Seiten-Ebenen berührt, so sieht man leicht, dafs der obige Lehrsatz 12. auf den ähnlichen aus der Planimetrie reducirt werden kann.

11.

Quelques observations sur les quatre droites données dans l'espace et non comprises deux à deux dans un même plan.

(Par Mr. *Garbinsky*, prof. à l'univ. et directeur de l'école polyt. à Varsovie.)

§. 1. Quoique l'on possède déjà trois solutions du problème suivant: „Construire rigoureusement la droite qui coupe à la fois quatre droites A, B, C, D données dans l'espace, non comprises deux à deux dans un même plan *);" il ne sera peut-être pas sans quelque utilité de le considérer de nouveau comme on va le voir par ce qu'il suit:

Imaginons un hyperboloïde dont les trois directrices sont les trois droites A, B, C, et designons par d et d' les deux points d'intersection de cette surface avec la quatrième droite D; si maintenant par chacun de ces points et par l'une quelconque de trois directrices, par exemple C, on mène deux plans P et P', et que l'on désigne leurs intersections avec la directrice A par a et a', et leurs intersections avec la directrice B par b, b'; les deux droites ab, $a'b'$ seront les droites demandées, c'est à dire, les deux droites qui coupent à la fois les quatre droites données A, B, C, D. Donc en dernière analyse le problème proposé se trouve ramené à construire rigoureusement les intersections d'une droite D avec la surface gauche du second degré, nommée hyperboloïde à une nappe, et ayant pour ses trois directrices les droites A, B, C.

§. 2. Pour trouver les points d, d', menons par la droite A un plan M parallèle à la droite D, et par la droite D un plan M' parallèle à la droite A, ce dernier plan coupera évidemment l'hyperboloïde suivant une hyperbole, puisqu'il est parallèle à la droite A, et à une autre droite A' qui sera entierement sur cette surface, et qu'on déterminera, en menant une droite par les deux points d'intersection des lignes B et C avec le plan M'. Donc tout se réduit maintenant à déterminer les points d'in-

*) Ce problème a été résolu, dans les Annales de Mathématiques de Mr. Gergonne v. T. XVIII. p. 182. — 184. par Mr. Bobillier et moi, et dans le *Journal für die reine und angewandte Mathematik* par Mr. Steiner *II. Band 3. Heft.*

tersection de l'hyperbole et de la droite D; car ces deux points seront évidemment les points d et d'. — Désignons par α, β, γ les trois points de l'hyperbole mentionnée, qu'on obtiendrait en cherchant l'intersection du plan M' avec les droites B, C, et une troisième droite quelconque B', qui coupe les trois droites A, B, C à la fois. Pour obtenir les asymptotes de l'hyperbole, il faut se rappeller qu'elles sont les intersections de deux plans passants respectivement par les droites A et A' et tangens à l'hyperboloïde aux points situés sur ces deux droites dans l'infini, avec un troisième plan M; car les lignes A et A' étant parallèles au plan M', sont coupées par ce plan dans l'infini. — Déterminons l'un de ces plans tangens, celui par exemple qui passe par la droite A: on sait, que le plan tangent à l'hyperboloïde passe toujours par deux droites situées entièrement sur la surface, et dont l'intersection est le point de contact. De là on conclut facilement, qu'en menant par chacune de deux droites B et C un plan, respectivement parallèle à la droite A, l'intersection commune de ces deux plans sera une autre droite qui coupe les droites B et C, et qui est parallèle à la ligne A: donc le plan passant par la droite ainsi déterminée et par la droite A, touchera l'hyperboloïde dans l'infini; donc enfin l'intersection de ce plan avec le plan M sera l'une des asymptotes de cette courbe. On déterminera l'autre asymptote en cherchant l'intersection du plan M' avec le plan passant par la droite A' et sa parallèle, située entièrement sur l'hyperboloïde; cette dernière droite doit être l'intersection de deux plans parallèles à la droite A', et dont l'un passe par la droite B' et l'autre par la droite C'. Les deux droites B' et C' sont quelconques, mais situées entièrement sur la surface, en coupant les droites données A, B, C, comme directrices de d'hyperboloïde. Menons par le point x, intersection de deux asymptôtes, une droite, qui partage l'angle de ces asymptôtes en deux parties égales, et de manière qu'elle ne coupe pas l'hyperbole, cette droite sera l'axe imaginaire de la courbe. Si maintenant l'hyperbole mentionnée fait une révolution autour de son axe imaginaire, elle engendrera un hyperboloïde de révolution, et les trois points α, β, γ decriront trois cercles S, S', S'', situés entièrement sur cette surface et dont les plans seront perpendiculaires à l'axe imaginaire. Mais on sait, que l'hyperboloïde de révolution n'est qu'un cas particulier de l'hyperboloïde à une nappe; donc, le même hyperboloïde de révolution pourrait encore être engendré par une droite quelconque qui

coupe à la fois tous les trois cercles S, S', S'', en faisant une révolution complète autour de l'axe imaginaire. — On déterminera l'une de ces droites de la manière suivante: Imaginons une surface conique ayant pour sommet un point du cercle S et pour directrice ou base le cercle S', on voit clairement que cette surface conique sera coupée par le plan du troisième cercle S'' suivant un autre cercle; après avoir construit les deux intersections de ce cercle avec le cercle S'', une droite ϱ passant par l'un de ces deux points et le sommet du cône, coupera à la fois tous les trois cercles S, S', S'', et sera par conséquent toute entière sur l'hyperboloïde de révolution. — Mais on voit, que les deux points cherchés d et d' sont situés en même temps sur l'hyperboloïde de révolution et sur la droite D qui coupe en un point y l'axe imaginaire de l'hyperbole. On trouvera donc ces points si on détermine les deux cercles communs à l'hyperboloïde de révolution et au cône qui serait engendré par la révolution de la droite D autour de l'axe de révolution de l'hyperboloïde, car les intersections de ces deux cercles avec la droite D seront évidemment les deux points cherchés. Imaginons un plan passant par la droite ϱ et le sommet y du cône et determinons les deux génératrices d'intersection de ce même plan avec le cône, elle seront coupées, généralement parlant, en deux points par la droite ϱ; abaissant de chacun de ces deux points une perpendiculaire à l'axe de rotation, on obtiendra les rayons des deux cercles cherchés, et les points situés sur ces cercles de la droite D seront les points démandés d et d'.

§. 3. Avant de donner une autre construction de la ligne demandée, il faut se rappeler quelques propositions dont les unes sont bien connues aux géomètres et les autres peuvent être démontrées aisément:

a. Un pôle et le milieu de sa pôlaire à l'égard d'une section conique quelconque, sont situés sur un même diamètre conjugué avec un autre diamètre parallèle à la pôlaire.

b. Si l'axe étant réel, F, F' sont les foyers d'une hyperbole quelconque et qu'un cercle est décrit du foyer F' comme centre avec un rayon égal à l'axe réel de l'hyperbole, après avoir ensuite décrit d'un point donné comme centre un cercle passant par l'autre foyer F, et déterminé ses deux points d'intersection t et t' avec le cercle primitif: si de plus on mène du point donné deux droites passant par les milieux des cordes

Ft et Ft': on obtiendra ainsi les deux tangentes qu'on pourra mener par le point donné à l'hyperbole; l'intersection de la droite $F't$ avec la première tangente donnera son point de contact, et le point de contact de l'autre tangente, sera son point d'intersection avec la droite $F't'$.

c. On démontre facilement que les deux tangentes trouvées sont respectivement perpendiculaires aux cordes Ft, Ft', d'où l'on tire une méthode très facile, pour mener une tangente à l'hyperbole, parallèlement à une droite donnée; car après avoir tiré du foyer F une droite perpendiculaire à la droite donnée, et après avoir construit les deux points u et u' d'intersection de cette perpendiculaire avec le cercle primitif, les deux parallèles à la droite donnée, tirées des milieux de deux cordes Fu, Fu' seront les tangentes demandées. On déterminera leurs points de contact comme précédemment *).

d. Si l'on observe que les milieux de toutes les cordes Ft, Ft', Fu, Fu' etc. sont situées sur un cercle décrit avec l'axe réel de l'hyperbole comme diamètre, on démontre sans aucune difficulté que, si de l'un quelconque de deux foyers F et F' on mène deux tangentes au cercle décrit sur l'axe de l'hyperbole pris pour diamètre, les deux rayons de ce cercle prolongés à l'infini et passant par les points de contact de deux tangentes, seront les asymptotes de la courbe; et vice versa: si des points d'intersection d'une des asymptotes avec le cercle, ayant l'axe réel de l'hyperbole pour diamètre, on mène des tangentes à ce cercle, les deux intersections de ces tangentes avec l'axe réel de la courbe seront ses deux foyers F et F'.

Partant de ce point, supposons pour le moment que la droite ϱ (§. 2.) soit déterminée d'une manière quelconque, qu'on a mené une perpendiculaire à l'axe de rotation par le milieu x de l'hyperbole sur laquelle se trouvent les deux points d, d' et qu'on ait déterminé la distance du point d'intersection de ce plan avec la droite ϱ au point x milieu de l'hyperbole, décrivant avec cette distance du point x comme milieu un cercle sur le plan de la courbe, et menant une tangente à ce cercle, au

*) Tout ce que je dis rélativement aux tangentes menées à l'hyperbole d'un point donné ou parallèlement à une droite donnée, a également lieu pour toutes les sections coniques, en observant seulement que pour la parabole le cercle primitif n'est autre chose que la droite directrice de cette courbe et que le cercle passant par les milieux des cordes Ft, Ft', Fu, Fu' etc. est une autre droite parallèle à la directrice et tirée du sommet de la parabole.

point où il est coupé par l'asymptote: l'intersection de cette tangente avec l'axe réel prolongé fera connoître l'un de foyers des l'hyperbole. Avec ces données on déterminera facilement les deux points de contact avec la courbe de deux tangentes parallèles à la droite D, et par cela même la grandeur du diamètre conjuguée avec celui qui est parallèle à la droite D. Je prends le diamètre conjugué que j'ai trouvé pour le diamètre d'un cercle et je mène du point z, intersection de ce diamètre avec la droite D, deux tangentes à ce cercle: il est bien clair que, la corde passant par les points de contact de ces tangentes avec le cercle, coupera le diamètre conjugué en un point z qui sera le pôle de la droite D à l'égard de l'hyperbole. Donc les deux points de contact de l'hyperbole avec ses deux tangentes tirées du point z, feront connoître les deux points cherchés d et d' *).

§. 4. Faisons voir maintenant comment on pourrait resoudre analytiquement le problème proposé, et quelles seraient les équations des conditions pour les diverses positions des quatre droites données A, B, C, D.

Si pour plus de commodité nous allons prendre la ligne A pour l'axe des coordonnées z, et pour les axes des coordonnées de y et x deux lignes menées d'un point quelconque de la droite A, parallèlement aux deux droites B et C, les équations des quatre droites données pouront être exprimées comme il suit:

$$1. \quad A.\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad B.\begin{cases} z=c \\ x=a \end{cases} \quad C.\begin{cases} y=b \\ z=c' \end{cases} \quad D.\begin{cases} x=a'z+m \\ y=b'z+m'. \end{cases}$$

---

*) Cette manière de construire les points d'intersection d'une droite avec une hyperbole dont on connait l'axe réel et les foyers, s'applique également aux autres sections coniques, en observant, que pour trouver le pôle de la corde dd' rélativement à une éllipse, il faut décrire un cercle sur un diamètre conjugué avec le diamètre parallèle à la corde dd', élever une perpendiculaire sur ce diamètre du point d'intersection de ce diamètre avec la corde, déterminer les deux points d'intersection de cette perpendiculaire avec le cercle; l'intersection commune des deux tangentes aux cercles menées par ces deux points, sera le pôle de la corde dd', rélativement à l'élipse donnée. Pour la parabole dont tous les diamètres sont parallèles à l'axe, la construction est très simple, car si après avoir déterminé le point de contact de la tangente parallèle à dd', on mène par ce point une parallèle au grand axe, et qu'on détermine son intersection z avec la corde dd', un autre point z' situé de coté opposé sur le prolongement du diamètre conjugué, à la même distance du point de contact que le premier point z, sera le pôle de la corde ou de la pôlaire dd' rélativement à la parabole donnée.

Mr. Coste a donné une autre construction du même problème dans les Annales de Mathématique de Mr. Gergonne T. VII. p. 304., mais je crois plus directe et plus facile dans la pratique celle que nons venons de présenter.

Un plan quelconque passant par la droite A aura pour équation:

$$2. \quad y = qx.$$

Les deux points d'intersection de ce plan avec les droites B et C auront pour coordonnées:

$$3. \quad (x=a,\ y=qa,\ z=c);\ \left(x=\frac{b}{q},\ y=b,\ z=c\right).$$

Donc la droite déterminée par ces deux points, ayant pour équations:

$$4. \quad x-a=\frac{(qa-b)}{q(c-c')}(z-c);\ \ y-qa=\frac{q(qa-b)}{q(c-c')}(z-c),$$

coupera à la fois les trois droites A, B, C; donc pour une certaine valeur de q elle sera l'une des génératrices de l'hyperboloïde ayant les trois droites A, B, C pour directrices. Eliminant donc q entre les équations (4.) ou entre l'une quelconque de ces deux équations et entre celle (2.), on aura:

$$5. \quad (c-c')yx+(z-c)bx-(z-c')ay=0.$$

Cette équation exprimera évidemment une rélation entre tous les points de toutes les génératrices de l'hyperboloïde qui a les droites A, B, C, pour directrices, ou ce qui est la même chose: cette équation sera celle de l'hyperboloïde lui même.

Mettant dans cette équation pour x et y leurs valeurs correspondantes tirées des équations de la droite D, transposant et décomposant en facteurs, on aura:

$$6. \quad [a'b'(c-c')+a'b-ab']z^2+[(b'm+a'm')(c-c')+b(m-a'c)-a(m'-b'c')]z + mm'(c-c')+ac'm'-bcm=0,$$

ce qui prouve que, généralement parlant, l'hyperboloïde (5.) sera coupé, en deux points d et d' par la droite D, et que les deux génératrices de l'hyperboloïde, qu'on menerait par ces points, resoudront le problème proposé.

§. 5. Considérons à présent les cas particuliers. On tire de l'équation (6.):

$$7. \quad z=-\frac{[(b'm+a'm')(c-c')+b(m-a'c)-a(m'-b'c')]}{2[a'b'(c-c')+a'b-ab']} \pm \frac{\left\{\sqrt{\{[(b'm+a'm')(c-c')+b(m-a'c)-a(m'-b'c')]^2 - 2[a'b'(c-c')+a'b-ab'][mm'(c-c')+ac'm'-bcm]}\right\}}{2[a'b'(c-c')+a'b-ab']}$$

et on peut faire rélativement à la quantité comprise sous le radical les trois suppositions suivantes:

$$8.\quad \begin{cases} 1)\ [(bm+a'm')(c-c')+b(m-a'c)-a(m'-b'c')]^2 \\ -2[a'b'(c-c')+a'b-ab'][mm'(c-c')+ac'm'-bcm] > 0, \\ 2)\ [(bm+a'm')(c-c')+b(m-a'c)-a(m'-b'c')]^2 \\ -2[a'b'(c-c')+a'b-ab'][mm'(c-c')+ac'm'-bcm] = 0, \\ 3)\ [(bm+a'm')(c-c')+b(m-a'c)-a(m'-b'c')]^2 \\ -2[a'b'(c-c')+a'b-ab'][mm'(c-c')+ac'm'-bcm] < 0. \end{cases}$$

Dans le premier cas la droite D sera une sécante de l'hyperboloïde et il y aura deux droites qui résoudront le problème; dans l'autre cas la droite D sera tangente et il n'y aura qu'une seule solution; dans le troisième cas les deux valeurs de z seront imaginaires et la droite D n'aura aucun point de commun avec l'hyperboloïde, où en d'autres termes, la solution du problème sera impossible.

§. 6. Si entre les coëfficients de l'équation (6.) on suppose une rélation telle qu'on ait à la fois:

$$9.\quad \begin{cases} a'b'(c-c')+a'b-ab' = 0, \\ (bm+a'm')(c-c')+b(m-a'c)-a(m-b'c') = 0, \\ mm'(c-c')+ac'm'-bcm = 0; \end{cases}$$

on suppose par là que z a une infinité de valeurs, ou que la droite D a une infinité de points sur l'hyperboloïde, ce qui veut dire en d'autres termes que cette droite D est entièrement sur l'hyperboloïde; donc les équations (8.) expriment les conditions nécéssaires de ce que les quatre droites A, B, C, D, soyent sur un méme hyperboloïde.

§. 7. Enfin nous ferons remarquer que l'équation

$$10.\quad a'b'(c-c')+a'b-ab' = 0,$$

peut subsister isolément, ou bien que les deux équations

$$11.\quad \begin{cases} a'b'(c-c')+a'b-ab' = 0, \\ (bm+a'm')(c-c')-b(m-a'c)-a(m-b'c') = 0 \end{cases}$$

peuvent avoir lieu en même tems. Dans le premier cas une des valeurs de z sera déterminée et l'autre infinie, dans le second cas toutes les deux valeurs de z seront infinies. Pour montrer clairement la différence entre ces deux cas, il faut se rappeler que par un point donné sur un hyporboloïde on peut mener deux lignes droites situées entièrement sur cette surface et que le plan déterminé par ces deux droites est un plan tangent à la surface au point donné. Si donc le point donné

étoit dans l'infini, les deux droites de la surface, dont le plan est un plan tangent à l'hyperboloïde dans ce point, seroient parallèles entre elles.

Cela posé, il est aisé de voir que dans les deux suppositions (10.) et (11.) il y aura sur l'hyperboloïde qui a A, B, C, pour directrices une génératrice parallèle à la droite D, mais que si dans le premier cas on fait passer un plan par la droite D et par sa génératrice parallèle, ce plan coupera l'hyperboloïde suivant une autre droite, dont l'intersection avec la droite D sera un point déterminé; tandis que dans l'autre cas le plan passant par la droite D et par sa génératrice parallèle, coupera l'hyperboloïde suivant une autre droite qui sera aussi parallèle à la droite D. Donc dans la première supposition la ligne D quoiqu'elle ait à une distance infinie un point commun avec l'hyperboloïde, n'est qu'une sécante de cette surface, tandis que dans la seconde supposition cette droite est une asymptôte de la surface, où ce qui est la même chose, une des génératrices de la surface conique, asymptotique rélativement à l'hyperboloïde. On se rendra raison d'une manière encore plus évidente de tous ces résultats quand on remarque que l'hyperbole qui est l'intersection du plan M' avec l'hyperboloïde, ayant A, B, C, pour directrices (§. 2.), peut être remplacée dans des cas particuliers par un système de deux droites dont l'intersection commune sera ou déterminée ou dans l'infini.

Le 31. Août 1829, à Varsovie.

12.

Über die Existenz der Wurzeln einer höhern Gleichung mit einer Unbekannten.

(Vom Hrn. *Adam Burg*, Professor der höhern Mathematik am K. K. polytechnischen Institute zu Wien.)

Bekanntlich läfst sich das Dasein von wenigstens einer reellen Wurzel in einer Gleichung von ungeraden, so wie das Vorhandensein von wenigstens zwei reellen Wurzeln in einer geordneten Gleichung von gerader Ordnung, deren letztes Glied negativ ist, sehr leicht und einfach nachweisen, so dafs es nur darauf ankommt, Gleichungen von gerader Ordnung, welche ihr letztes Glied positiv haben, in dieser Beziehung zu untersuchen. Da aber solche Gleichungen auch lauter imaginäre Wurzeln haben können, so handelt es sich, wie ebenfalls bekannt, blofs darum, zu zeigen, dafs einer solchen Gleichung in jedem Falle ein Genüge geschieht, wenn man in ihr die Unbekannte $x = p + q\sqrt{-1}$ setzt, weil unter dieser Form nicht nur jede imaginäre (wenn nämlich p und q reelle Gröfsen bedeuten), sondern auch eine jede reelle Wurzel, wenn $q = 0$ ist, kann dargestellt werden; daher es auch nicht nothwendig ist, den Beweis von der Existenz einer Wurzel, welche im Allgemeinen die Form $p + q\sqrt{-1}$ hat, blofs auf Gleichungen von der letztgenannten Gattung zu beschränken, sondern es kann dieser, wie es auch sonst geschieht, sogleich auf alle Gleichungen ausgedehnt werden. Der allerdings scharfsinnige Beweis, welcher von Herrn Cauchy herrührt, und meines Wissens noch der einzige ist, welcher als genügend angesehen wird, erscheint mir doch keinesweges so einfach, als dafs es nicht wünschenswerth sein sollte, dafür einen wenigstens eben so strengen, aber weit einfacheren zu finden. Irre ich nicht, so hat der nachstehende Beweis, welcher sich auf Gleichungen von gerader Ordnung überhaupt, ohne auf das Zeichen des letzten Gliedes Rücksicht zu nehmen, bezieht, diese genannte Eigenschaft.

1. Der Ordnungs-Exponent N einer jeden Gleichung $X=0$ von gerader Ordnung ist immer in der Form enthalten $N=n.2^m$, wo n nur ungerade, m aber beliebig eine jede ganze positive Zahl bezeichnet. Transformirt man die gegebene Gleichung in eine andere $X=0$ mit quadrirten Differenzen, welche Gleichung wir, der Kürze wegen, die erste transformirte Gleichung nennen wollen, so ist diese, wie bekannt, von der Ordnung $N'=\frac{N(N-1)}{2}=n.2^{m-1}(n.2^m-1)$. Wird auch für diese Gleichung jene $X''=0$, deren Wurzeln die quadrirten Differenzen der Wurzeln der Gleichung $X=0$ sind, oder die zweite transformirte Gleichung gesucht, so ist diese von der Ordnung

$$N''=\frac{N'(N'-1)}{2}=n.2^{m-2}(n.2^m-1)[n.2^{m-1}(n.2^m-1)-1],$$

so wie wieder die dritte transformirte Gleichung den Ordnungs-Exponenten

$$\frac{N''(N''-1)}{2}$$

$$=n.2^{m-3}(n\,2^m-1)[n.2^{m-1}(n.2^m-1)-1]\{n.2^{m-2}(n.2^m-1)[n.2^{m-1}(n.2^m-1)-1]-1\}$$

haben würde, u. s. w.

Man sieht leicht, dafs die $m$te formirte Gleichung $X^{(m)'}$ der quadrirten Differenzen von ungerader Ordnung sein mufs, weil sowohl der erste Factor $n.2^{m-m}=n$, als auch jeder der folgenden, welche sämmtlich von der Form $2^\gamma-1$ sind, ungerade ist.

2. Da nun diese $m$te transformirte Gleichung von ungerader Ordnung ist, also nothwendig wenigstens eine reelle Wurzel x_a haben mufs, so hat die $(m-1)$te transformirte Gleichung wenigstens ein Paar Wurzeln x_a, x_b, für welche $x_a=(x_a-x_b)^2$, oder $x_a-x_b=\sqrt{x_a}$ ist. Es wird aber dieser Gleichung in jedem Falle, es mag die reelle Wurzel x_a positiv oder negativ sein, Genüge geleistet, wenn man setzt: $x_a=P+Q\sqrt{-1}$, $x_b=P_1+Q_1\sqrt{-1}$, weil dann $x_a-x_b=(P-P_1)+(Q-Q_1)\sqrt{-1}$, also von der Form $A+B\sqrt{-1}$ ist, wo $B=0$ wird, wenn x_a positiv ist.

Da aber, wenn wir nur eine dieser beiden Wurzeln weiter betrachten, die $(m-1)$te transformirte Gleichung eine Wurzel x_a von der Form $P+Q\sqrt{-1}$ hat, so giebt es in der $(m-2)$ten transformirten Gleichung ein Paar Wurzeln x'_a, x'_b, für welche wieder $x'_a-x'_b=\sqrt{x_a}=\sqrt{(P+Q\sqrt{-1})}$ sein mufs; und es wird auch dieser Gleichung wie-

der genug gethan, wenn man setzt: $x'_a = P' + Q'\sqrt{-1}$, $x'_b = P'_1 + Q'_1\sqrt{-1}$, weil $x'_a - x'_b$ wieder die Form $A' + B'\sqrt{-1}$ annimmt, und bekanntlich das Quadrat dieses Binoms ebenfalls von derselben Form ist.

Da aber ferner die $(m-2)$te transformirte Gleichung auf diese Weise wenigstens eine Wurzel x'_a von der Form $P' + Q'\sqrt{-1}$ hat, so mufs nach demselben Raisonnement die $(m-3)$te transformirte Gleichung wenigstens eine Wurzel von der Form $P'' + Q''\sqrt{-1}$ zulassen u. s. w., so, dafs man durch dieselben fortgesetzten Schlüsse endlich auf die $(m-m)$te transformirte, d. i. auf die ursprüngliche Gleichung $X = 0$ selbst zurückkommt, von welcher auf diese Art erwiesen ist, dafs sie sofort wenigstens eine Wurzel von der Form $p + q\sqrt{-1}$ haben oder zulassen müsse.

13.

Démonstration d'un théorème d'arithmétique proposé dans les annales de mathématiques de Mr. Gergonne, tom. XIX. p. 256.

(Par Mr. *J. A. Grunert*, prof. des math. à Brandenbourg.)

Théorème. Tout nombre entier est diviseur d'un nombre exprimé par une suite de 9 suivis de plusieurs zéros.

Démonstration. Désignons par p le nombre donné, diviseur du nombre cherché

$$Z = \overset{(x)}{9}\,\overset{(x-1)}{9}\,\overset{(x-2)}{9}\ldots\ldots\overset{(1)}{9}\,\overset{(0)}{9}\,\overset{(1)}{0}\ldots\ldots\overset{(y-1)}{0}\,\overset{(y)}{0}$$

$$= 9(1+10+10^2+\ldots\ldots+10^x).10^y = (10^{x+1}-1).10^y.$$

Décomposons le nombre donné p en facteurs premiers de sorte que $p = 2^\mu.5^\nu.\alpha^m\beta^n\gamma^k\ldots\ldots$, où $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots$ ne soient ni $=2$, ni $=5$. Le nombre des nombres plus petits que $\alpha^m\beta^n\gamma^k\ldots\ldots$ et premiers à ce produit sera

$$= \alpha^m\beta^n\gamma^k\ldots\ldots\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\ldots\ldots$$

$$= \alpha^{m-1}(\alpha-1)\beta^{n-1}(\beta-1)\gamma^{k-1}(\gamma-1)\ldots\ldots$$

(Legendre *Essai sur la théorie des nombres. Sec. éd. p.* 7.), donc en vertu du théorème de Fermat, généralisé par Mr. Gauſs (*Disquis. arithm. p.* 80. *art.* 83.), si

$$x+1 = \alpha^{m-1}(\alpha-1)\beta^{n-1}(\beta-1)\gamma^{k-1}(\gamma-1)\ldots\ldots,$$

la différence $10^{x+1}-1$ sera divisible par $\alpha^m\beta^n\gamma^k\ldots\ldots$, 10 et $\alpha^m\beta^n\gamma^k\ldots\ldots$ étant premiers entre eux suivant l'hypothèse.

Cela posé, soit $M(\mu,\nu)$ le plus grand des deux nombres μ, ν, il est clair, que l'expression $10^y = 10^{M(\mu,\nu)}$, y étant $M(\mu,\nu)$, sera toujours divisible par le produit $2^\mu.5^\nu$, et qu'on pourra trouver dans tous les cas deux nombres:

$$x = \alpha^{m-1}(\alpha-1)\beta^{n-1}(\beta-1)\gamma^{k-1}(\gamma-1)\ldots\ldots-1 \quad \text{et} \quad y = M(\mu,\nu)$$

tels que

$$Z = \overset{(x)\,(x-1)\,(x-2)}{9\ 9\ 9\ \ldots\ 9}\ \overset{(1)\,(0)\,(1)}{9\ 0\ \ldots\ 0}\ \overset{(y-1)\,(y)}{0\ 0} = (10^{x+1}-1).10^{y}$$

soit divisible par le nombre arbitraire donné p.

Exemple. $p = 5^3.2^2.7.3$, $x = 7^0.6.3^0.2-1 = 11$, $y = 3$,

$$Z = 999999999999000$$
$$= p.95238095238.$$

Il est aussi clair, que dans ce cas et dans tous les cas semblables on peut toujours trouver un nombre plus petit qui soit divisible par p; car tout nombre de la forme demandée est divisible par 3, donc s'il est divisible par 7, il le sera aussi par $3.7 = 21$ (*Essai sur la théorie des nombres p.* 4. 5.). Donc il n'y a dans ce cas que de supposer

$$x = 7^0.6-1 = 5,\quad y = 3,\quad Z = 999999000 = p.95238.$$

14.

Mémoire sur la convergence de la série du binome; pour faire suite à la démonstration du théorème du binôme, donnée tome III. de ce journal, cahier 3., page 305.

(Par l'éditeur.)

Nous avons présenté à l'endroit cité une démonstration du théorème du binome, fondée uniquement sur une équation identique, exécutée seulement au moyen de transformations algébriques, et indépendante de toute supposition arbitraire. Elle semble ne rien laisser à désirer pour la généralité et la rigueur. Mais ce développement ayant été borné à présenter la forme générale de la série et l'expression identique du reste complémentaire, il s'agit encore de la convergence de la série. Elle sera l'objet de ce qui suit.

Nous reprendrons l'expression du développement du binome sous la forme (15. tome III. page 307.), savoir:

$$1.\quad (1+a)^k = 1^k(1+k_1a+k_2a^2+k_3a^3\ldots.+k_na^n) + k_n(k-n)\Delta^n\left(\frac{(1+a)^{x(=a)+k}-(1+a)^{x(=0)}1^k}{k}\right),$$

$k_1, k_2, k_3 \ldots . k_n$ étant les coëfficiens binomiaux

$$2.\quad \begin{cases} k_1 = k, \quad k_2 = \frac{k.(k-1)}{2}, \quad k_3 = \frac{k(k-1)(k-2)}{2.3} \ldots . \\ k_n = \frac{k(k-1)(k-2)\ldots.(k-(n-1))}{2.3\ldots.n}. \end{cases}$$

Si l'on veut sousentendre les racines correspondantes de deux côtés de l'équation, on peut supprimer le facteur 1^k, et l'on aura simplement:

$$3.\quad (1+a)^k = 1 + k_1a + k_2a^2 + k_3a^3\ldots. + k_na^n + k_n(k-n)\Delta^n\left(\frac{(1+a)^{x(=0)+k}-(1+a)^{x(=0)}}{k}\right).$$

Ici la quantité

$$\Delta^n\left(\frac{(1+a)^{x(=0)+k}-(1+a)^{x(=0)}}{k}\right)$$

signifie la n^{me} différence des $n+1$ quantités

4. $\frac{(1+a)^k-1}{k}$, $\frac{(1+a)^k-(1+a)}{k-1}$, $\frac{(1+a)^k-(1+a)^2}{k-2}$ .... $\frac{(1+a)^k-(1+a)^n}{k-n}$

et si l'on veut désigner le reste qui suit le $n+1^{\text{me}}$ terme de la série, savoir

5. $k_n(k-n)\Delta^n\frac{(1+a)^{x(=0)+k}-(1+a)^{x(=0)}}{k}$,

par R_n, on peut écrire

6. $(1+a)^k = 1 + k_1 a + k_2 a^2 + k_3 a^3 + ... + k_n a^n + R_n$.

Nous nous bornerons aux cas où l'exposant k et la base $=1+a$ sont réels.

Pour juger de la convergence de la série dans ces cas, nous emploierons la méthode de d'Alembert, savoir de chercher deux séries dont la convergence puisse être démontrée et dont l'une ait tous les termes plus grands, l'autre plus petits que la série donnée.

2.

Généralement il y a quatre cas. L'exposant k et la partie a de la base peuvent être positifs ou négatifs. Si k est positif, les signes des coëfficiens k_1, k_2, k_3 .... alternent dès le m^{me} coëfficient, m étant le premier nombre entier plus grand que k. Si k est négatif, les coëfficiens k_1, k_2, k_3 .... sont alternativement positifs et négatifs dès le premier terme. Donc les signes des coëfficiens binomiaux alternent dans tous les cas, au moins à partir d'une certaine limite. Il suit de là que si a est positif, les termes de la série du binôme sont alternativement positifs et négatifs dans tous les cas, au moins à commencer d'une certaine limite, et si a est négatif, ils ont tous leurs signes égaux, également au moins à partir d'une certaine limite, qui, tant que l'exposant k n'est pas infini, n'est jamais éloignée du commencement de la série que d'un nombre fini de termes. Donc il n'y a que deux cas à considérer, savoir a positif ou a négatif. Dans le premier cas on peut toujours supposer alternatifs les signes des termes de la série et dans le second cas égaux.

3.

Soit a négatif et $k_n a^n = \tau_n$ un terme quelconque de ceux dont les signes sont égaux, la série, à partir du terme τ_n, que nous prendrons pour le reste R_n (6.), pourra être exprimée par

7. $R_n = \tau_n\left(1 + a\frac{k-n}{n+1} + a^2\frac{(k-n)(k-n-1)}{(n+1)(n+2)} + a^3\frac{(k-n)(k-n-1)(k-n-2)}{(n+1)(n+2)(n+3)}....\right)$

ou bien, si l'on fait

8. $a = -b$,

où b est positif, par

$$9.\quad R_n = \tau_n\Big[1 + b\Big(1-\frac{k+1}{n+1}\Big) + b^2\Big(1-\frac{k+1}{n+1}\Big)\Big(1-\frac{k+1}{n+2}\Big) + b^3\Big(1-\frac{k+1}{n+1}\Big)\Big(1-\frac{k+1}{n+2}\Big)\Big(1-\frac{k+1}{n+3}\Big)\ldots.\Big].$$

Puisque n a été supposé plus grand que $\pm k$, $k+1$ est toujours plus petit que $n+1$.

Si k est plus grand que -1, toutes les fractions $\frac{k+1}{n+1}$, $\frac{k+1}{n+2}$, $\frac{k+1}{n+3}$, ... sont positives et plus petites que $+1$, et la première fraction $\frac{k+1}{n+1}$ est plus grande que toutes les autres; donc tous les facteurs b, b^2, b^3, ... sont plus petits que 1, et le premier facteur $1-\frac{k+1}{n+1}$ est plus petit que tous les autres; donc la somme de la série R_n (9.) est plus petite que la somme

$$10.\quad s_2 = \tau_n(1 + b + b^2 + b^3\ldots.)$$

et plus grande que la somme

$$11.\quad s_3 = \tau_n\Big[1 + b\Big(1-\frac{k+1}{n+1}\Big) + b^2\Big(1-\frac{k+1}{n+1}\Big)^2 + b^3\Big(1-\frac{k+1}{n+1}\Big)^3\ldots.\Big].$$

Si k est plus petit que -1, toutes les fractions $\frac{k+1}{n+1}$, $\frac{k+1}{n+2}$, $\frac{k+1}{n+3}$, ... sont négatives et plus grandes que -1, et la première fraction $\frac{k+1}{n+1}$ est plus petite que toutes les autres; donc tous les facteurs de b, b^2, b^3, ... sont plus grands que $+1$, et le premier facteur $1-\frac{k+1}{n+1}$ est plus grand que tous les autres; donc la somme de la série R_n (9.) est plus grande que la somme de la série (10.) et plus petite que la somme de (11.).

Donc R_n est toujours compris entre s_2 et s_3 quel que soit k, positif ou négatif.

Mais les sommes s_2 et s_3 des séries (10. et 11.) peuvent être exprimées par

$$12.\quad s = \tau_n \cdot \frac{1}{1-b} \quad \text{et} \quad s_3 = \tau_n \frac{1}{1-b\Big(1-\frac{k+1}{n+1}\Big)},$$

et si l'on développe ces expressions par la division, on trouve que les valeurs de leurs restes, à partir du m^{me} terme, sont:

$$13.\quad \tau_n \cdot \frac{b^m}{1-b} \quad \text{et} \quad \tau_n \cdot \frac{b^m\Big(1-\frac{k+1}{n+1}\Big)^m}{1-b\Big(1-\frac{k+1}{n+1}\Big)},$$

de manière que les valeurs exactes des séries (10. et 11.) peuvent être exprimées par

14. $$s_2 = \tau_n\left(1 + b + b^2 + b^3 \ldots + \frac{b^m}{1-b}\right),$$

15. $$s_3 = \tau_n\left(1 + b\left(1 - \frac{k+1}{n+1}\right) + b^2\left(1 - \frac{k+1}{n+1}\right)^2 \ldots + \frac{b^m\left(1 - \frac{k+1}{n+1}\right)^m}{1 - b\left(1 - \frac{k+1}{n+1}\right)}\right).$$

Si l'on veut que ces expressions donnent des limites finies de la valeur de la série pour R_n, qui, comme on l'a vu, est toujours comprise entre celles de s_2 et s_3, il faut que les séries (14. et 15.) soient convergentes, c'est à dire que leurs restes $\frac{b^m}{1-b}$ et $\frac{b^m\left(1 - \frac{k+1}{n+1}\right)^m}{1 - b\left(1 - \frac{k+1}{n+1}\right)}$ soient zéro pour $m = \infty$. Cela n'a pas lieu, à moins que b ne soit respectivement compris entre 0 et 1 et entre 0 et $\frac{1}{1 - \frac{k+1}{n+1}}$, savoir entre 0 et 1 si $k > -1$ et entre 0 et $\frac{1}{1 - \frac{k-1}{n+1}}$, si $k < -1$.

Si b est renfermé dans ces limites, les séries s_2 et s_3 (14. et 15.) seront convergentes, et la somme de la série R_n (9.) qui est toujours comprise entre s_2 et s_3 (12.), sera renfermée entre les limites

16. $$\frac{\tau_n}{1-b} \text{ et } \frac{\tau_n}{1 - b\left(1 - \frac{k+1}{n+1}\right)},$$

où ce qui est la même chose, si $a = -b$ est compris entre 0 et -1, k étant > -1, ou entre 0 et $\frac{1}{\frac{k+1}{n+1} - 1}$, k étant < -1, la somme de la série R_n (7.) sera comprise entre les limites

17. $$\frac{\tau_n}{1+a} \text{ et } \frac{\tau_n}{1 + a\left(1 - \frac{k+1}{n+1}\right)}.$$

Si l'on fait $n = \infty$, les limites (17.) et celles de a qui sont les conditions de la convergence des séries s_2 et s_3 coïncident.

Les dernières sont 0 et -1 pour un k quelconque et les limites (17.) rentrent toutes les deux dans $\frac{\tau_n}{1+a}$. Donc si a est négatif et

compris entre 0 et -1, la valeur du reste R_n de la série du binome est

$$18.\quad R_n = \frac{\tau_n}{1+a} \text{ pour } n = \infty.$$

Maintenant pour juger de la convergence de la série du binôme, il s'agit de savoir si $\frac{\tau_n}{1+a}$ est nul pour $n = \infty$.

Le terme τ_n, comme le fait voir l'expression (9.), n'est autre chose que

$$19.\quad \tau_n = \tau_m\left[b^\mu\left(1-\frac{k+1}{m+1}\right)\left(1-\frac{k+1}{m+2}\right)\left(1-\frac{k+1}{m+3}\right)\ldots. \text{ à l'infini}\right];$$

où m est arbitraire et $\mu = \infty$ et cette valeur de τ_n est toujours renfermée entre

$$20.\quad \tau_m b^\mu \text{ et } \tau_m b^\mu\left(1-\frac{k+1}{m+1}\right)^\mu,$$

pour un k quelconque. Si $k > -1$, ces limites sont évidemment zéro toutes les deux, b étant supposé entre 0 et 1. Donc τ_n est nécessairement nul pour $n = \infty$, si $k > -1$. Si k est < -1, la seconde limite se présente sous la forme $\tau_m . 0 . \infty$. Donc les limites ne donnent pas la valeur de τ_∞ dans ce cas. Pour la trouver, reprenons l'expression $k_n b^n$ du terme τ_n, et supposons $b = \frac{1}{c}$, où c est plus grand que $+1$, puisque b doit être entre 0 et $+1$. Cette expression de τ_n, k étant supposé négatif, savoir < -1, pourra être présentée sous la forme:

$$21.\quad \tau_n = \pm\frac{k(k+1)(k+2)\ldots.(k+\nu-2)}{c.2c.3c\ldots.(\nu-1)c} \cdot \frac{(k+\nu-1)(k+\nu)(k+\nu+1)\ldots.(k+n-1)}{\nu c.(\nu+1)c.(\nu+2)c\ldots.nc} = P.Q,$$

où maintenant k est regardé comme positif et > 1. Donnons à ν une valeur telle que $\nu c > k+\nu-1$, par exemple $\nu c = k+\nu-1+\varepsilon$ où ε est positif, ce qui est toujours possible, car il n'y a qu'à faire

$$22.\quad \nu = \frac{k-1+\varepsilon}{c-1},$$

où $\frac{k-1+\varepsilon}{c-1}$ sera toujours un nombre positif et fini, k et c étant > 1 et ε positif. Cela posé

$$23.\quad P = \frac{k(k+1)(k+2)\ldots.(k+\nu-2)}{c.2c.3c\ldots.(\nu-1)c}$$

sera toujours une quantité finie. L'autre facteur Q, si pour abréger l'on fait $k+\nu-1 = z$, prendra la forme:

$$24.\quad Q = \frac{z}{z+\varepsilon} \cdot \frac{z+1}{z+\varepsilon+c} \cdot \frac{z+2}{z+\varepsilon+2c} \cdot \ldots \frac{z+n-\nu}{z+\varepsilon+(n-\nu)c}.$$

Dans cette expression tous les facteurs sans exception sont < 1, puis-

que $\varkappa$ et ε sont positifs et $c>1$. Donc si l'on désigne par $\frac{1}{p}$ le plus grand des facteurs, Q sera moindre que $\left(\frac{1}{p}\right)^{n-\nu}$. Mais p étant >1, $\left(\frac{1}{p}\right)^{n-\nu}$ sera déja nul pour $n=\infty$, donc à plus forte raison Q sera nul dans ce cas. Donc τ_∞ est aussi zéro dans le cas $k<-1$, a étant entre 0 et -1.

La valeur de τ_∞ étant nulle dans tous les cas, et la valeur du reste R_n de la série du binôme dans l'infini, c'est à dire du reste R_x, étant $\frac{\tau_x}{1+a}$ (18.), on voit, en nous résumant, que cette série sera toujours convergente quel que soit k, si a est compris entre les limites 0 et -1. La convergence ne cesse que dès $a=-1$, en allant aux valeurs négatives. Si k est >-1 et a entre 0 et -1, et également si $k<-1$ et a entre 0 et $\frac{1}{1-\frac{k+1}{n+1}}=\frac{n+1}{n-k}$ la valeur de la série du binôme, à partir du terme $k_n a^n$, sera comprise entre les limites

$$25.\quad \frac{k_n a^n}{1+a} \text{ et } \frac{k_n a^n}{1+a.\frac{n-k}{n+1}}.$$

4.

Soit a positif et $k_n a^n=\tau_n$ un terme quelconque de ceux dont les signes sont alternativement positifs et négatifs, la série, à partir du terme τ_n, c'est à dire la valeur du reste R_n pourra être exprimée comme ci-dessus (7. et 9.) par

$$\begin{aligned}26.\quad R_n = \tau_n\Big[1 &- a\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right)+a^2\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right)\left(1-\frac{k+1}{n+2}\right)\\ &-a^3\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right)\left(1-\frac{k+1}{n+2}\right)\left(1-\frac{k+1}{n+3}\right)\\ &+a^4\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right)\left(1-\frac{k+1}{n+2}\right)\left(1-\frac{k+1}{n+3}\right)\left(1-\frac{k+1}{n+4}\right)\\ &-a^5\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right)\left(1-\frac{k+1}{n+2}\right)\left(1-\frac{k+1}{n+3}\right)\left(1-\frac{k+1}{n+4}\right)\left(1-\frac{k+1}{n+5}\right)\\ &\ldots\ldots\ldots\Big],\end{aligned}$$

ou bien, si l'on prend les termes par couples:

27. $$R_n = \tau_n\Big[1-a\Big(1-\frac{k+1}{n+1}\Big) + \Big(1-a\Big(1-\frac{k+1}{n+3}\Big)\Big)\Big(1-\frac{k+1}{n+1}\Big)\Big(1-\frac{k+1}{n+2}\Big)a^2 + \Big(1-a\Big(1-\frac{k+1}{n+5}\Big)\Big)\Big(1-\frac{k+1}{n+1}\Big)\Big(1-\frac{k+1}{n+2}\Big)\Big(1-\frac{k+1}{n+3}\Big)\Big(1-\frac{k+1}{n+4}\Big)a^4 \ldots\ldots\ldots\Big],$$

Puisque n a été supposé plus grand que $\pm k$, $k+1$ est toujours plus petit que $n+1$.

Si k est plus grand que -1, toutes les fractions $\frac{k+1}{n+1}$, $\frac{k+1}{n+2}$, $\frac{k+1}{n+3}$, ... sont positives et

28. $$\frac{k+1}{n+1} > \frac{k+1}{n+2} > \frac{k+1}{n+3} \ldots\ldots < 1,$$

29. $$1-\frac{k+1}{n+1} < 1-\frac{k+1}{n+2} < 1-\frac{k+1}{n+3} \ldots < 1,$$

30. $$1-a\Big(1-\frac{k+1}{n+1}\Big) > 1-a\Big(1-\frac{k+1}{n+3}\Big) > 1-a\Big(1-\frac{k+1}{n+5}\Big)\ldots\ldots > 1-a.$$

Donc R_n (36.) est plus petit que la somme de la série

31. $$s_2 = \tau_n\Big[1-a\Big(1-\frac{k+1}{n+1}\Big)\Big][1+a^2+a^4+a^6\ldots.]$$

et plus grand que la série

$$s_3 = \tau_n\Big[1-a+a\frac{k+1}{n+1}+(1-a)\Big(1-\frac{k+1}{n+1}\Big)^2a^2+(1-a)\Big(1-\frac{k+1}{n+1}\Big)^4a^4\ldots.\Big]$$

savoir

32. $$s_3 = \tau_n a\,\frac{k+1}{n+1}+\tau_n(1-a)\Big[1+\Big(1-\frac{k+1}{n+1}\Big)^2a^2+\Big(1-\frac{k+1}{n+1}\Big)^4a^4\ldots.\Big].$$

Si k est plus petit que -1, toutes les fractions $\frac{k+1}{n+1}$, $\frac{k+1}{n+2}$, $\frac{k+1}{n+3}$, ... sont négatives et

33. $$\frac{k+1}{n+1} < \frac{k+1}{n+2} < \frac{k+1}{n+1} \ldots\ldots > -1,$$

34. $$1-\frac{k+1}{n+1} > 1-\frac{k+1}{n+2} > 1-\frac{k+1}{n+3} \ldots\ldots > 1,$$

35. $$1-a\Big(1-\frac{k+1}{n+1}\Big) < 1-a\Big(1-\frac{k+1}{n+3}\Big) < 1-a\Big(1-\frac{k+1}{n+5}\Big)\ldots. < 1-a.$$

Donc R_n (27.) est plus grand que la somme de la série (31.) et plus petit que la somme de (32.).

Donc R_n est toujours compris entre s_2 et s_3 quel que soit k, positif ou négatif.

Mais les sommes s_2 et s_3 des séries (31. et 32.) peuvent être exprimées par

36. $$s_2 = \frac{\tau_n\left[1-a\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right)\right]}{1-a^2} = \tau_n \frac{1-a\frac{n-k}{n+1}}{1-a^2},$$

37. $$s_3 = \tau_n\left(a\cdot\frac{k+1}{n+1} + \frac{1-a}{1-\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right)^2 a^2}\right) = \tau_n\left(\frac{1-a\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right)-\frac{k+1}{n+1}\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right)^2 a^3}{1-\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right)^2 a^2}\right)$$

$$= \tau_n \frac{1-a\frac{n-k}{n+1}-\frac{k+1}{n+1}\cdot\left(\frac{n-k}{n+1}\right)^2 a^3}{1-\left(\frac{n+k}{n+1}a\right)^2} = \tau_n \frac{1-a\frac{n-k}{n+1}\left(1-\frac{k+1}{n+1}\cdot\frac{n-k}{n+1}\cdot a^2\right)}{1-\left(\frac{n-k}{n+k}\right)^2 a^2}$$

et si l'on développe ces expressions par la division, on trouve que les valeurs de leurs restes, à partir des m^{mes} termes, sont:

38. $$\frac{\tau_n\left(1-a\frac{n-k}{n+1}\right)a^{2m}}{1-a^2} \quad \text{et}$$

39. $$\frac{\tau_n(1-a)\left(\frac{n-k}{n+1}a\right)^{2m}}{1-\left(\frac{n-k}{n+1}a\right)^2},$$

de sorte que les valeurs exactes des séries (40. et 41.) peuvent être exprimées par

40. $$s_2 = \tau_n\left[1-a\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right)\right]\left[1+a^2+a^4+a^6+\ldots+\frac{a^{2m}}{1-a^2}\right] \quad \text{et}$$

41. $$s_3 = \tau_n a\frac{k+1}{n+1} + \tau_n(1-a)\left(1+\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right)^2 a^2+\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right)^4 a^4\ldots+\frac{\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right)^{2m} a^{2m}}{1-\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right)^2 a^2}\right).$$

Si l'on veut que ces expressions donnent des limites finies de la valeur de R_n qui, comme on l'a vu, est toujours comprise entre s_2 et s_3 il faut que les séries s_2 et s_3 soient convergentes, c'est à dire que leurs restes $\frac{a^{2m}}{1-a^2}$ et $\frac{\left[\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right)a\right]^{2m}}{1-\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right)^2 a^2}$ soient zéro pour $m=\infty$. Cela n'a pas lieu, à moins que a ne soit respectivement compris entre 0 et 1 et entre 0 et $\frac{1}{1-\frac{k+1}{n+1}}$, savoir entre 0 et 1, si $k>-1$, et entre 0 et $\frac{1}{1-\frac{k+1}{n+1}}$, si $k<-1$. Si a est renfermé dans ces limites, les séries s_2 et s_3 (31. et 32.) seront convergen-

tes, et la somme de la série R_n (27.) puisqu'elle est toujours comprise entre s_2 et s_3, sera renfermée entre les limites (36. et 37.).

Si l'on fait $n = \infty$, les limites (36. et 37.) de R_n et celles de a, qui sont les conditions de la convergence des séries s_2 et s_3, coïncident. Les dernières sont 0 et 1 pour un k quelconque, et les limites (36. et 37.) rentrent toutes les deux dans

$$42. \quad \tau_n \cdot \frac{1-a}{1-a^2} = \tau_n(1+a).$$

Donc si a est positif et compris entre 0 et $+1$, la valeur du reste R_n de la série du binôme est

$$43. \quad R_n = \tau_n(1+a) \text{ pour } n = \infty.$$

Mais nous avons vu plus haut que τ_n est toujours nul pour $n = \infty$; donc le reste R_n est également nul dans tous les cas. Donc la série du binôme sera toujours convergente, quel que soit k, si a est compris entre les limites 0 et $+1$. La convergence ne cesse que dès $a = +1$, en allant aux valeurs positives. Si k est > -1 et a entre 0 et $+1$, et également si $k < -1$, et a entre 0 et $\frac{1}{1-\frac{k+1}{n+1}} = \frac{n+1}{n-k}$, la valeur de la série du binôme, à partir du terme $k_n a^n$, est comprise entre les limites:

$$14. \quad k_n a^n \cdot \frac{1-a \cdot \frac{n-k}{n+1}}{1-a^2} \quad \text{et} \quad k_n a^n \cdot \frac{1-a \cdot \frac{n-k}{n+1}\left(1-\frac{k+1}{n+1} \cdot \frac{n-k}{n+1} \cdot a^2\right)}{1-\left(\frac{n+k}{n+1}\right)^2 a^2}.$$

5.

Les cas de $a = -1$ et $a = +1$ méritent une attention particulière, puisque dans ces cas les séries s_2 et s_3, qu'on a choisies pour servir de limites de la série du binôme, cessent d'être convergentes et que par conséquent les expressions (25. et 44.) ne donnent plus des limites finies pour la série du binôme, à partir d'un terme quelconque $k_n a^n$.

Nous remarquerons d'abord que, quoique les séries s_2 et s_3 ne soient plus convergentes dans le cas actuel, la valeur de la série du binôme sera néanmoins toujours comprise entre leurs valeurs respectives, et puisque s_2 et s_3 coïncident toujours pour $n = \infty$, l'expression de R_∞ sera encore la même comme ci-dessus (18. et 43.), savoir:

$$45. \quad R_\infty = \frac{\tau_\infty}{1+a} = \frac{\tau_\infty}{0}, \text{ si } a = -1, \text{ et}$$

$$46. \quad R_\infty = \tau_\infty(1+a) = 2\tau_\infty, \text{ si } a = +1.$$

Mais ce qui a été dit plus haut de la valeur de τ_∞ n'est plus applicable aux cas actuels, puisque par exemple dans la formule (21.) c n'est plus >1, condition nécessaire du résultat ci-dessus. Il faut donc recourir à l'expression générale de τ_n. Elle est dans les cas actuels de $a=\pm 1$.

$$47.\quad \tau_n = \pm\frac{k(k-1)(k-2)\ldots k-(n-1)}{1.2.3\ldots n}.$$

Cette expression donne pour $n=\infty$, comme l'on sait,

$$48.\quad \tau_n = 0, \text{ si } k>-1, \qquad 49.\quad \tau_n=\infty, \text{ si } k<-1,$$

Donc si $a=-1$, on a en vertu de (45.):

$$50.\quad R_\infty = \tfrac{0}{0}, \text{ pour } k>-1 \text{ et } R_\infty=\infty, \text{ pour } k<-1,$$

et si $a=+1$, on a, suivant (46.)

$$51.\quad R_\infty = 0, \text{ pour } k>-1 \text{ et } R_\infty=\infty, \text{ pour } k<-1.$$

Donc la série

$$52.\quad (1+a)^k = 1+k_1a+k_2a^2+k_3a^3\ldots.$$

est divergente si $a=-1$ et $a=+1$, k étant <-1, et convergente si $a=+1$ et $k>-1$. Si $a=-1$ et $k>-1$, le problème de la convergence de la série (52.) est indéterminé et ne peut être resolu à moins qu'on ne connoisse la loi suivant laquelle $1+a$ converge vers la limite 0.

Les résultats que nous venous de trouver diffèrent comme on voit en plusieurs points de ceux qu'on donne ordinairement, surtout en ce qui regarde l'application de la méthode des séries-limites au cas où la partie a de la base $1+a$ est positive, et les limites entre lesquelles a doit être compris, s'il existe des limites finies du reste. Cette différence des résultats semble mériter l'attention, d'autant plus que l'objet du problème entre dans les élémens.

En appliquant, comme nous venons de le faire, la méthode de d'Alembert à la recherche de la convergence de la série du binôme, l'expression générale du reste du binôme $k_n.k-n.\Delta^n\left(\frac{(1+a)^{x(=0)+k}-(1+a)^{x(=0)}}{k}\right)$, n'est pas entrée en calcul. A l'occasion nous reviendrons à notre problème, en opérant directement sur cette expression identique. Cela se fera par l'application de la méthode générale d'évaluer les restes des séries développées suivant les différences au lieu des différentielles, méthode que j'ai présentée dans un mémoire lu à l'Académie des sciences de Berlin en Janvier 1828. Elle s'applique au théorème général de Taylor d'une manière semblable à celle qu'a donnée Mr. Lagrange pour l'évaluation des restes de la série particulière de Taylor et qui a été perfectionnée par Mr. Ampère.

15.

Recherches sur les expressions des puissances des cosinus et sinus en cosinus et sinus des arcs multiples, et sur les expressions réciproques.

(Par l'éditeur.)

Depuis quelques années on a beaucoup discuté les développements des puissances des fonctions angulaires à exposans quelconques et des cosinus et sinus des arcs multiples. Néanmoins cette matière ne semble pas encore avoir été mise dans tout son jour. Car, d'un côté les résultats auxquels on est parvenu ne s'accordent pas parfaitement entre eux, et de l'autre côté, les recherches par lesquelles on a peut-être le mieux approfondi le problème, ne jouissent pas partout de cette clarté et de cette élégante simplicité qui est le caractère essentiel de la vérité. Le problème n'étant donc pas épuisé, j'éspère qu'on ne me blâmera de le reprendre ici. Je vais offrir ce que j'ai trouvé en discutant de nouveau cet objet.

I. Expressions des puissances des cosinus et sinus en cosinns et sinus des arcs multiples.

1.

Puisque $(\cos x \pm i \sin x)(\cos x \mp i \sin x) = 1$, i étant $\sqrt{-1}$, on peut écrire $\frac{1}{\cos x \pm i \sin x}$ au lieu de $\cos x \mp i \sin x$, et par suite $\cos x \pm i \sin x + \frac{1}{\cos x \pm i \sin x}$ au lieu de $2\cos x$. Donc on a:

$$(2\cos x)^m = \left(\cos x \pm i \sin x + \frac{1}{\cos x \pm i \sin x}\right)^m,$$

et en vertu du théorème du binome

$$(2\cos x)^m = (\cos x \pm i \sin x)^m + m_1(\cos x \pm i \sin x)^{m-2} + m_2(\cos x \pm i \sin x)^{m-4} \ldots;$$

en désignant les coëfficiens binomiaux par m_1, m_2, m_3, ... Mais $(\cos x \pm i \sin x)^m$ étant égal à $\cos mx \pm i \sin mx$, on a

$$(2\cos x)^m = \cos mx + m_1 \cos(m-2)x + m_2 \cos(m-4)x \ldots.$$
$$\pm i(\sin mx + m_1 \sin(m-2)x + m_2 \sin(m-4)x \ldots.)$$

et $\cos(x+2\dot{n}\pi)$, où $\dot{n}$ est un nombre entier quelconque *), étant égal à $\cos x$, l'expression générale et complète de $(2\cos x)^m$ sera

$$1.\quad (2\cos x)^m = \cos m(x+2\dot{n}\pi)+m_1\cos(m-2)(x+2\dot{n}\pi)+m_2\cos(m-4)(x+2\dot{n}\pi)\ldots.$$
$$\pm i\,[\sin m(x+2\dot{n}\pi)+m_1\sin(m-2)(x+2\dot{n}\pi)+m_2\sin(m-4)(x+2\dot{n}\pi)\ldots.].$$

Pour abréger nous indiquerons la première ligne à droite par $S\cos m(x+2\dot{n}\pi)$ et la seconde ligne par $iS\sin m(x+2\dot{n}\pi)$. On écriroit pour une autre valeur de n, par exemple $\dot{\mu}$, $S\cos m(x+2\dot{\mu}\pi)$ et $iS\sin m(x+2\dot{\mu}\pi)$, et pour $\dot{n}=0$, $S\cos mx$ et $iS\sin mx$. De cette sorte on aura

$$2.\quad (2\cos x)^m = S\cos(m+2\dot{n}\pi)\pm iS\sin m(x+2\dot{n}\pi).$$

Les formules (1. et 2.) représentent, comme on sait, toutes les valeurs différentes que $(2\cos x)^m$ peut avoir. Il s'agit maintenant de réduire et de simplifier les expressions autant qu'il sera possible, et de trouver les valeurs particulières, toutes réelles et toutes imaginaires de $(2\cos x)^m$, s'il y en a.

2.

Nous nous bornerons aux cas où m et x sont réels. Il est vrai que les expressions ci-dessus ont également lieu si même x et m étoient de la forme générale $p+qi$, mais nous laisserons ces cas de côté.

L'exposant m peut être ou positif ou négatif, mais on peut le supposer toujours positif. Car si m étoit négatif, par ex. $m=-\mu$, il n'y auroit qu'à développer $\frac{1}{(2\cos x)^\mu}$, où l'exposant μ est positif.

La base $2\cos x$ de la puissance $(2\cos x)^m$ peut être également positive ou négative, suivant que l'arc x tombe entre $(2\dot{\tau}-\frac{1}{2})\pi$ et $(2\dot{\tau}+\frac{1}{2})\pi$, ou entre $(2\dot{\tau}+\frac{1}{2})\pi$ et $(2\dot{\tau}+\frac{3}{2})\pi$, mais on peut toujours réduire le cas où $2\cos x$ est négatif à celui où cette quantité est positive. Car si x est un arc dont le cosinus est négatif, $x-\pi$ sera un arc dont il est positif et de la même grandeur. Donc on a pour ce cas $2\cos x=-2\cos(x-\pi)$ et par suite

$$3.\quad (2\cos x)^m = (-1)^m(2\cos(x-\pi))^m.$$

---

*) Toutes les fois qu'un point sera mis au dessus d'une lettre, ce sera pour indiquer que cette lettre doit exprimer un nombre entier quelconque. Par exemple $\dot{n}$, $\dot{\mu}$, $\dot{p}$, ... exprimeront des nombres entiers quelconques. Cette notation très simple, si elle était généralement adoptée, épargneroit beaucoup de mots et perfectionneroit l'art d'écrire algébriquement.

Donc on pourra appliquer immédiatement l'expression des puissances m des cosinus positifs aux puissances des cosinus négatifs, en écrivant seulement $x-\pi$ au lieu de x et multipliant par $(-1)^m$.

Un arc quelconque x et un autre, moindre ou plus grand d'un nombre pair quelconque $2\dot{\tau}$ de circonférences, ayant toujours précisément le même cosinus et le même sinus, on pourra toujours, si x est un arc plus grand que ceux qui sont compris entre $-\frac{1}{2}\pi$ et $+\frac{1}{2}\pi$, lui substituer un de ces derniers, sans diminuer la généralité des formules.

En dernier lieu, si x désigne un arc compris entre $-\pi$ et 0, l'arc $x+\frac{1}{2}\pi$ sera compris entre $-\frac{1}{2}\pi$ et $+\frac{1}{2}\pi$. Donc l'expression de $(2\cos x)^m$ pour tout arc entre $-\frac{1}{2}\pi$ et $+\frac{1}{2}\pi$, s'appliquera sur le champ à celle de $(2\sin x)^m$ pour tout arc entre $-\pi$ et 0, c'est-à-dire dont le sinus est négatif, si l'on y écrit seulement $x+\frac{1}{2}\pi$ au lieu de x et qu'on multiplie par $(-1)^m$. De la même manière si x est un arc compris entre 0 et π, l'arc $x-\frac{1}{2}\pi$ tombera entre $-\frac{1}{2}\pi$ et $+\frac{1}{2}\pi$. Donc pour avoir l'expression de $(2\sin x)^m$ pour les arcs entre 0 et π, c'est-à-dire ponr ceux, dont les sinus sont positifs, il n'y a qu'à écrire $x-\frac{1}{2}\pi$ au lieu de x dans la formule qui donne $(2\cos x)^m$ pour les arcs entre $-\frac{1}{2}\pi$ et $+\frac{1}{2}\pi$, ou dont les cosinus sont positifs.

Il suit de là, que toute la recherche des puissances des cosinus et sinus pour un exposant et un arc quelconque réels, peut être réduite à celle de $(2\cos x)^m$ pour un m positif et pour un x compris entre $-\frac{1}{2}\pi$ et $+\frac{1}{2}\pi$. Donc tout ce qui va suivre sera soumis à cette restriction.

3.

Soit $n=\dot{\mu}+\dot{\nu}$, on a

$$\cos m(x+2\dot{n}\pi)\pm i\sin m(x+2\dot{n}\pi)=$$

$$[\cos m(x+2\dot{\nu}\pi)\pm i\sin m(x+2\dot{\nu}\pi)][\cos 2\dot{\mu}\pi\pm i\sin 2m\dot{\mu}\pi],$$

$$\cos(m-2)(x+2\dot{n}\pi)\pm i\sin(m-2)(x+2\dot{n}\pi)=$$

$$[\cos(m-2)(x+2\dot{\nu}\pi)\pm i\sin(m-2)(x+2\dot{\nu}\pi)][\cos 2(m-2)\dot{\mu}\pi\pm i\sin 2(m-2)\dot{\mu}\pi],$$

$$\cos(m-4)(x+2\dot{n}\pi)\pm i\sin(m-4)(x+2\dot{n}\pi)=$$

$$[\cos(m-4)(x+2\dot{\nu}\pi)\pm i\sin(m-4)(x+2\dot{\nu}\pi)][\cos 2(m-4)\dot{\mu}\pi\pm i\sin 2(m-4)\mu\pi]$$

etc.; et puisque

$$\cos 2m\dot{\mu}\pi=\cos 2(m-2)\dot{\mu}\pi=\cos 2(m-4)\dot{\mu}\pi\ldots\text{ et}$$

$$\sin 2m\dot{\mu}\pi=\sin 2(m-2)\dot{\mu}\pi=\sin 2(m-4)\dot{\mu}\pi\ldots,$$

cela donne

4. $(2\cos x)^m = (\cos 2m\dot{\mu}\pi \pm i \sin 2m\dot{\mu}\pi)\,[S\cos m(x+2\dot{\nu}\pi) \pm iS\sin m(x+2\dot{\nu}\pi)]$.

D'un autre côté si dans la formule (1.) on fait $x=0$, on trouve

$$(+2)^m = \cos 2m\dot{n}\pi\,(1+m_1+m_2\ldots.) \pm i\sin 2m\dot{n}\pi\,(1+m_1+m_2\ldots.).$$

Mais $1+m_1+m_2\ldots. = 2^m$, donc

$$5.\quad (+1)^m = \cos 2m\dot{n}\pi + i\sin 2m\dot{n}\pi.$$

Cela fait voir que le premier facteur à droite dans (4.) peut être représenté par $(+1)^m$ parceque $\dot{n}$ et $\dot{\mu}$ sont arbitraires tous les deux. Donc on aura

$$6.\quad (2\cos x)^m = (+1)^m\,[S\cos m(x+2\dot{\nu}\pi) \pm iS\sin m(x+2\dot{\nu}\pi)].$$

4.

Cela posé, nous remarquerons que toute puissance a^m, dont l'exposant m et la base a sont réels et positifs, peut être présentée sous la forme

$$7.\quad a^m = (+1)^m\,|a|^m,$$

où $|a|^m$ désigne une valeur réelle unique et absolue. Cette expression représente toutes les valeurs que a^m peut avoir. Mais elle n'est pas la seule qui peut représenter a^m. On peut exprimer cette puissance également par

$$8.\quad a^m = (+1)^m(p+qi).$$

Voyons en quoi consiste la différence des deux expressions (7. et 8.). Les valeurs différentes de $(+1)^m$ ont, comme on sait et comme le fait voir l'expression (5.), la propriété que, l'une quelconque d'entre elles étant désignée par α, les autres sont α^2, α^3, α^4 . . . . 1, α, α^2 . . . . Donc en multipliant $(+1)^m$ par une puissance quelconque entière de α, on reproduira toujours toutes les valeurs de cette quantité. C'est le cas de la formule (8.). Dans cette formule la quantité $|a|^m$ de l'expression (7.) est multiplié par une puissance entière quelconque de α. C'est pourquoi le facteur de $|a|^m$ y paroit sous la forme $p \pm qi$. En effet cette quantité n'est autre chose que

$$9.\quad p \pm qi = |a|^m.(+1)^{\dot{\lambda}}.$$

Mais il y a une autre différence entre les deux expressions (7. et 8.). La quantité $(+1)^m$ peut avoir toujours une valeur toute réelle, car $\dot{n}$ dans (5.) peut être égal à zéro, et si m est tel que $2m\dot{n}$ puisse être $= \frac{2\dot{\varkappa}+1}{2}$, elle peut aussi avoir deux valeurs toutes imaginaires. Maintenant en

vertu de $a^m = (+1)^m |a|^m$, la puissance a^m doit avoir également des valeurs toutes réelles ou toutes imaginaires, puisque $|a|^m$ est réel; et ces valeurs particulières doivent être exprimées également par les deux formules (7. et 8.). La différence de ces formules est, que dans (8.) les valeurs toutes réelles ou toutes imaginaires de $(+1)^m$ ne seront pas nécessairement combinées avec des valeurs semblables de $p \pm qi$; les valeurs particulières de $(+1)^m$ seront plutôt combinées avec des valeurs de $p \pm qi$ de cette dernière forme, et il faudra des valeurs de $(+1)^m$ de la forme $P \pm Qi$, combinées avec des valeurs de $p \pm qi$ de cette forme, pour donner les valeurs toutes réelles ou toutes imaginaires de a^m. En effet, l'expression (8.) n'étant autre chose que

$$10. \quad a^m = (+1)^m (|a|^m . \alpha^{\dot{\lambda}}),$$

on voit que la valeur α^0 de $(+1)^m$ qui est toute réelle ne peut donner la valeur toute réelle de a^m. Elle en donne la valeur $\alpha^{\dot{\lambda}} |a|^m$ qui est de la forme $p + qi$. Ce n'est que la valeur $\alpha^{-\dot{\lambda}}$ de $(+1)^m$, qui produit la valeur particulière, et cette valeur $\alpha^{-\dot{\lambda}}$ est elle même de la forme $p + qi$. Dans la formule (7.) au contraire les valeurs toutes réelles ou toutes imaginaires de $(+1)^m$ donnent aussi nécessairement celles de a^m de cette forme.

5.

La formule (6.) présente la puissance $(2\cos x)^m$ sous la forme (8.), et c'est évidemment le nombre arbitraire $\dot{\nu}$ qui produit la multiplicité des valeurs du second facteur à droite. Si donc on veut connoître les valeurs toutes réelles ou toutes imaginaires de $(2\cos x)^m$ et notamment les tirer de celles de $(+1)^m$, il faut chercher à réduire la forme de l'expression (6.) à celle de (7.), c'est-à-dire, il faut soumettre l'expression (6.) à la condition que les valeurs toutes réelles ou toutes imaginaires de $(+1)^m$ doivent comporter les valeurs semblables de $(2\cos x)^m$.

En vertu de cette condition on aura

$$11. \quad S \sin m(x + 2\dot{\nu}\pi) = 0,$$

car si $iS \sin m(x + 2\dot{\nu}\pi)$ n'étoit pas zéro, cette quantité se combineroit avec les valeurs toutes réelles ou toutes imaginaires de $(+1)^m$ et produiroit une partie imaginaire dans le premier et une partie réelle dans le second cas, qui, suivant l'hypothèse, ne doivent point exister.

L'expression de $(2\cos x)^m$ (6.) se réduit donc à

$$12. \quad (2\cos x)^m = (+1)^m S \cos m(x + 2\dot{\nu}\pi),$$

6.

Maintenant il s'agit de chercher la valeur du nombre arbitraire $\dot{\nu}$ pour laquelle la quantité $S\sin m(x+2\dot{\nu}\pi)$ peut être zéro. Cette valeur de $\dot{\nu}$ donnera ensuite celle qui convient au facteur $S\cos m(x+2\dot{\nu}\pi)$ (12.).

En développant les deux quantités $S\sin m(x+2\dot{\nu}\pi)$ et $S\cos m(x+2\dot{\nu}\pi)$, on trouve:

13. $S\sin m(x+2\dot{\nu}\pi) = \cos 2m\dot{\nu}\pi\, S\sin mx + \sin 2m\dot{\nu}\pi\, S\cos mx$ etc.,

14. $S\cos m(x+2\dot{\nu}\pi) = \cos 2m\dot{\nu}\pi\, S\cos mx - \sin 2m\dot{\nu}\pi\, S\sin mx.$

Puisque la première de ces quantités doit être nulle, on tire de l'équation (13.)

15. $$\operatorname{tang} 2m\dot{\nu}\pi = -\frac{S\sin mx}{S\cos mx} = -\frac{\sin mx + m_1\sin(m-2)x + m_2\sin(m-4)x\ldots.}{\cos mx + m_1\cos(m-2)x + m_2\cos(m-4)x\ldots.}.$$

Dans cette équation la quantité $\operatorname{tang} 2m\dot{\nu}\pi$ à gauche est discontinue, puisque $\dot{\nu}$ ne peut être qu'un nombre entier. Elle ne peut varier que par intervalles. Au contraire la quantité $-\frac{S\sin mx}{S\cos mx}$ à droite est continue, et si elle varie avec x, cela ne peut se faire qu'insensiblement. Il suit de cette contradiction que la quantité à droite est invariable et que parconséquent celle à gauche le doit être également, c'est-à-dire qu'une seule et même valeur de $\dot{\nu}$ doit convenir également à toutes les valeurs différentes de x, ou qu'au moins $\dot{\nu}$ ne peut avoir d'autres valeurs que celles qui donnent une seule ou même valeur à $\operatorname{tang} 2m\dot{\nu}\pi$, ou ce qui est la même chose, à $\sec 2m\dot{\nu}\pi$ ou bien à $\cos 2m\dot{\nu}\pi$ et $\sin 2m\dot{\nu}\pi$.

On tirera la même conclusion de l'équation (12.). Dans cette équation la quantité $(2\cos x)^m$ à gauche est continue et celle $S\cos m(x+2\dot{\nu}\pi)$ est en partie discontinue et ne varie que par intervalles, si $\dot{\nu}$ change de valeur, puisque dans ce cas $\cos 2m\dot{\nu}\pi$ et $\sin 2m\dot{\nu}\pi$ ne conservent pas la même grandeur; comme le fait voir l'expression (14.).

7.

Puisque les mêmes valeurs de $\cos 2m\dot{\nu}\pi$ et $\sin 2m\dot{\nu}\pi$ conviennent à toutes les valeurs différentes de x, on pourra choisir indifféremment une valeur quelconque de x pour trouver celles de $\cos 2m\dot{\nu}\pi$ et $\sin 2m\dot{\nu}\pi$. Choisissons la valeur zéro de x, parceque nous pourrons trouver pour cette valeur celle de $\dot{\nu}$. Si l'on fait $x = 0$, on a $S\sin mx = 0$ et

$S\cos mx = 1 + m_1 + m_2 + \ldots = 2^m$, donc en vertu de l'équation (14.): $S\cos(x + 2\dot{\nu}\pi) = \cos 2m\dot{\nu}\pi . 2^m$, et en vertu de celle (12.):

$$(+2)^m = (+1)^m \cos 2m\dot{\nu}\pi . 2^m.$$

De là on tire

16. $\cos 2m\dot{\nu}\pi = 1.$

C'est la valeur cherchée de $\cos m\dot{\nu}\pi$. Elle donne $\sin 2m\dot{\nu}\pi = 0$, et puis en vertu des équations (13. et 14.):

17. $0 = S\sin mx$ et

18. $S\cos m(x + 2\dot{\nu}\pi) = S\cos mx.$

8.

En introduisant l'expression (18.) dans celle (12.), on aura

19. $(2\cos x)^m = (+1)^m S\cos mx,$

c'est-à-dire

20. $(2\cos x)^m =$

$(\cos 2m\dot{n}\pi + i\sin 2m\dot{n}\pi)[\cos mx + m_1\cos(m-2)x + m_2\cos(m-4)x \ldots.]$,

où $\dot{n}$ est un nombre entier arbitraire.

Voilà l'expression complète cherchée de $(2\cos x)^m$. Conjointement avec cette expression il subsistera toujours l'équation (17.), c'est à dire l'équation

21. $\sin mx + m_1\sin(m-2)x + m_2\sin(m-4)x \ldots. = 0.$

9.

Les équations (20. et 21.) supposent x compris entre $-\frac{1}{2}\pi$ et $+\frac{1}{2}\pi$. Si x est compris entre $(2\dot{\tau} - \frac{1}{2})\pi$ et $(2\dot{\tau} + \frac{1}{2}\pi)$, il faut écrire $x - 2\dot{\tau}$ au lieu de x dans les deux équations. Si x est compris entre $+\frac{1}{2}\pi$ et $+\frac{3}{2}\pi$, c'est à dire si $\cos x$ est négatif, il n'y a qu'à écrire $x - \pi$ au lieu de x et à multiplier par $(-1)^m$ comme nous l'avons fait voir (§. 2.). Donc on a pour les cosinus négatifs:

22. $(2\cos x)^m = (-1)^m[\cos m(x-\pi) + m_1\cos(m-2)(x-\pi) + m_2\cos(m-4)(x-\pi)\ldots.]$,

ou bien

23. $(2\cos x)^m = (\cos 2m(\dot{n}+1)\pi \pm i\sin 2m(\dot{n}+1)\pi)$

$\times[\cos m(x-\pi) + m_1\cos(m-2)(x-\pi) + m_2\cos(m-4)(x-\pi)\ldots.]$.

L'équation (21.) est dans ce cas

24. $\sin m(x-\pi) + m_1\sin(m-2)(x-\pi) + m_2\sin(m-4)(x-\pi)\ldots. = 0.$

Pour les puissances des sinus on aura en vertu de (§. 2.) pour les sinus positifs

25. $(2\sin x)^m =$

$(\cos 2mn\pi \pm i\sin 2mn\pi)[\cos m(x-\frac{1}{2}\pi) + m_1\cos(m-2)(x-\frac{1}{2}\pi) + m_2\cos(m-4)(x-\frac{1}{2}\pi)\ldots.]$

et pour les sinus négatifs:

26. $(2\sin x)^m = (\cos 2m(\dot{n}+1)\pi \pm i \sin 2m(\dot{n}+1)\pi)$
$\times [\cos m(x+\frac{1}{2}\pi) + m_1 \cos(m-2)(x+\frac{1}{2}\pi) + m_2 \cos(m-4)(x+\frac{1}{2}\pi)\ldots.]$.

10.

En développant l'équation (21.) on trouve:

$$\left.\begin{array}{r} \sin mx + m_1 \sin mx \cos 2x + m_2 \sin mx \cos 4x \ldots. \\ - m_1 \cos mx \sin 2x - m_2 \cos mx \sin 4x \ldots. \end{array}\right\} = 0,$$

et de là:

$$27.\quad \operatorname{tang} mx = \frac{m_1 \sin 2x + m_2 \sin 4x + m_3 \sin 6x \ldots.}{1 + m_1 \cos 2x + m_2 \cos 4x + m_3 \cos 6x \ldots.}.$$

Cette équation aura lieu pour une valeur quelconque de x, comprise entre $-\frac{1}{2}\pi$ et $+\frac{1}{2}\pi$.

Puisque la quantité $\sin mx + m_1 \sin(m-2)x + m_2 \sin(m-4)x \ldots.$ est invariable et nulle, leurs différentielles le seront également. Cela donne:

$$28.\quad \begin{cases} m\cos mx + m_1(m-2)\cos(m-2)x + m_2(m-4)\cos(m-4)x \ldots. = 0, \\ m^2 \sin mx + m_1(m-2)^2 \sin(m-2)x + m_2(m-4)^2 \sin(m-4)x \ldots. = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

et généralement:

$$29.\quad m^{2\dot{\varepsilon}} \sin mx + m_1(m-2)^{2\dot{\varepsilon}} \sin(m-2)x + m_2(m-4)^{2\dot{\varepsilon}} \sin(m-4)x \ldots. = 0,$$

et

$$30.\quad m^{2\dot{\varepsilon}+1} \cos mx + m_1(m-2)^{2\dot{\varepsilon}+1} \cos(m-2)x + m_2(m-4)^{2\dot{\varepsilon}+1} \cos(m-4)x \ldots. = 0.$$

De là on tire, en développant:

$$31.\quad \operatorname{tang} mx = \frac{m_1(m-2)^{2\dot{\varepsilon}} \sin 2x + m_2(m-4)^{2\dot{\varepsilon}} \sin 4x + m_3(m-6)^{2\dot{\varepsilon}} \sin 6x \ldots.}{m^{2\dot{\varepsilon}} + m_1(m-2)^{2\dot{\varepsilon}} \cos 2x + m_2(m-4)^{2\dot{\varepsilon}} \cos 4x + m_3(m-6)^{2\dot{\varepsilon}} \cos 6x \ldots.}$$

et

$$32.\quad \operatorname{tang} mx = -\frac{m^{2\dot{\varepsilon}+1} + m_1(m-2)^{2\dot{\varepsilon}+1} \cos 2x + m_2(m-2)^{2\dot{\varepsilon}+1} \cos 4x \ldots.}{m_1(m-2)^{2\dot{\varepsilon}+1} \sin 2x + m_2(m-2)^{2\dot{\varepsilon}+1} \sin 4x \ldots.}.$$

L'équation (32.) donne, en supposant $x = 0$:

$$33.\quad m^{2\dot{\varepsilon}+1} + m_1(m-2)^{2\dot{\varepsilon}+1} + m_2(m-4)^{2\dot{\varepsilon}+1} \ldots. = 0,$$

pour une valeur quelconque positive de m.

II. Expressions des cosinus et sinus des arcs multiples en puissances des cosinus et sinus des arcs simples.

11.

La formule

$$34.\quad \cos mx \pm i \sin mx = (\cos x \pm i \sin x)^m$$

a lieu, comme on sait, pour un m et un x quelconques. Mais nous nous bornerons comme ci-dessus aux cas où x et m sont réels.

Puisque $\cos x = \cos(x+2\dot{n}\pi)$ et $\sin x = \sin(x+2\dot{n}\pi)$, la formule (34.) donne

35. $\cos m(x+2\dot{n}\pi) \pm \sin m(x+2\dot{n}\pi) = (\cos x \pm i \sin x)^m$,

et il s'agit de trouver les expressions de $\cos mx$ et $\sin mx$ en puissances de $\cos x$ et $\sin x$.

12.

Nous remarquerons d'abord qu'on pourra toujours ramener les cas où $\cos x$ ou $\sin x$ est négatif à ceux où les cosinus et sinus sont positifs. Car si x est un arc dont le cosinus ou le sinus est négatif, le cosinus ou le sinus de $x-\pi$ sera positif, et on aura

36. $\cos mx = \cos m(x-\pi)\cos m\pi - \sin m(x-\pi)\sin m\pi$,

37. $\sin mx = \sin m(x-\pi)\cos m\pi + \cos m(x-\pi)\sin m\pi$,

et l'on pourra appliquer immédiatement à ces formules les expressions qu'on aura trouvées pour les cosinus et sinus positifs.

Les cas des m négatifs se réduisent sur le champ à ceux de m positifs, car $\cos -mx = \cos mx$, et $\sin -mx = -\sin mx$.

On pourra donc toujours supposer $\cos x$, $\sin x$ et m positifs.

13.

Mettons la formule (35.) sous la forme

$\cos m(x+2\dot{n}\pi) \pm i \sin m(x+2\dot{n}\pi) = (\cos x)^m (1 \pm i \operatorname{tang} x)^m$, ou bien

$\cos m(x+2\dot{n}\pi) \pm i \sin m(x+2\dot{n}\pi) = |\cos x|^m (+1)^m (1 \pm i \operatorname{tang} x)^m$:

puisque

$$(+1)^m = \cos 2m\dot{\nu}\pi \pm i \sin 2m\dot{\nu}\pi,$$

on aura

38. $\cos m(x+2\dot{n}\pi) \pm i \sin m(x+2\dot{n}\pi) = |\cos x|^m (\cos 2m\dot{\nu}\pi \pm i \sin 2m\dot{\nu}\pi)(1 \pm i \operatorname{tg} x)^m$.

En développant le dernier facteur à droite, on trouve

39. $\cos m(x+2\dot{n}\pi) \pm i \sin m(x+2\dot{n}\pi) = |\cos x|^m (\cos 2m\dot{\nu}\pi \pm i \sin 2m\dot{\nu}\pi)$
$$\times \left[\begin{matrix} 1 - m_2 \operatorname{tang} x^2 + m_4 \operatorname{tang} x^4 - m_6 \operatorname{tang} x^6 \ldots . \\ \pm i (m_1 \operatorname{tang} x - m_3 \operatorname{tang} x^3 + m_5 \operatorname{tang} x^5 \ldots .) \end{matrix}\right]$$

et en multipliant les deux derniers facteurs à droite:

40. $\cos m(x+2\dot{n}\pi) \pm i \sin m(x+2\dot{n}\pi)$

$$= |\cos x|^m \left(\begin{matrix} \cos 2m\dot{\nu}\pi - m_1 \sin 2m\dot{\nu}\pi \operatorname{tang} x - m_2 \cos 2m\dot{\nu}\pi \operatorname{tang} x^2 \\ + m_3 \sin 2m\dot{\nu}\pi \operatorname{tang} x^3 + m_4 \cos 2m\dot{\nu}\pi \operatorname{tang} x^4 \ldots . \\ \pm i (\sin 2m\dot{\nu}\pi + m_1 \cos 2m\dot{\nu}\pi \operatorname{tang} x - m_2 \sin 2m\dot{\nu}\pi \operatorname{tang} x^2 \\ - m_3 \cos 2m\dot{\nu}\pi \operatorname{tang} x^3 + m_4 \sin 2m\dot{\nu}\pi \operatorname{tang} x^4 \ldots .) \end{matrix} \right)$$

Puisque les parties réelles et les parties imaginaires de cette formule doivent être égales séparément, on en tire:

41. $\cos m(x+2\dot{n}\pi) = |\cos x|^m(\cos 2m\dot{\nu}\pi - m_1 \sin 2m\dot{\nu}\pi \operatorname{tang} x$
$- m_2 \cos 2m\dot{\nu}\pi \operatorname{tang} x^2 + m_3 \sin 2m\dot{\nu}\pi \operatorname{tang} x^3 + m_4 \cos 2m\dot{\nu}\pi \operatorname{tang} x^4 \ldots.),$

42. $\sin m(x+2\dot{n}\pi) = |\cos x|^m(\sin 2m\dot{\nu}\pi + m_1 \cos 2m\dot{\nu}\pi \operatorname{tang} x$
$- m_2 \sin 2m\dot{\nu}\pi \operatorname{tang} x^2 - m_3 \cos 2m\dot{\nu}\pi \operatorname{tang} x^3 + m_4 \sin 2m\dot{\nu}\pi \operatorname{tang} x^4 \ldots.).$

Il s'agit maintenant de trouver les valeurs de $\dot{\nu}$ qui conviennent à une valeur donnée de $\dot{n}$. Pour cela nous remarquerons que les formules (41. et 42.) ont été soumises à la condition que $\cos x$ soit positif. Donc pour trouver $\dot{\nu}$, on y pourroit faire $x = 2\dot{\tau}\pi$; car en vertu de la condition établie, les valeurs de x doivent être comprises entre $(2\dot{\tau} - \frac{1}{2})\pi$ et $(2\dot{\tau} + \frac{1}{2})\pi$, et d'ailleurs il est clair, que pour une valeur déterminée de $\dot{n}$, ou plutôt de $\cos 2m\dot{\nu}\pi$ et $\sin 2m\dot{\nu}\pi$, et pour une valeur donnée de $\dot{\tau}$, il ne peut convenir qu'une seule et même valeur de $\dot{\nu}$ à tous les x compris entre $(2\dot{\tau} - \frac{1}{2})\pi$ et $(2\dot{\tau} + \frac{1}{2})\pi$; car sans cela la quantité à droite varieroit par intervalles, pendant que celle à gauche varie suivant la loi de la continuité, ce qui est impossible. Mais la valeur $2\dot{\tau}\pi$ de x ne donneroit pas explicitement la valeur correspondante de $\dot{\nu}$, comme cela est facile à voir. Il faut supposer $\dot{\tau} = 0$ si l'on veut la trouver, c'est à dire $x = 0$, et cela est permis, car on ne diminue pas la généralité des formules en écrivant seulement $2\dot{n}\pi$ au lieu de $2\dot{\tau}\pi + 2\dot{n}\pi$. Mais il y a à remarquer qu'en supposant $x = 0$, on réduit les formules à n'être désormais applicables qu'aux cas où x est renfermé entre les limites $-\frac{1}{2}\pi$ et $+\frac{1}{2}\pi$.

La supposition $x = 0$, faite dans les formules (41. et 42.), donne:

43. $\cos 2m\dot{n}\pi = \cos 2m\dot{\nu}\pi$ et $\sin 2m\dot{n}\pi = \sin 2m\nu\pi$,

donc on a

44. $\cos m(x+2\dot{n}\pi) = |\cos x|^m[\cos 2m\dot{n}\pi - m_1 \sin 2m\dot{n}\pi \operatorname{tang} x$
$- m_2 \cos 2m\dot{n}\pi \operatorname{tang} x^2 + m_3 \sin 2m\dot{n}\pi \operatorname{tang} x^3 + m_4 \cos 2m\dot{n}\pi \operatorname{tang} x^4 \ldots.],$

45. $\sin m(x+2\dot{n}\pi) = |\cos x|^m[\sin 2m\dot{n}\pi + m_1 \cos 2m\dot{n}\pi \operatorname{tang} x$
$- m \sin 2m\dot{n}\pi \operatorname{tang} x^2 - m_3 \cos 2m\dot{n}\pi \operatorname{tang} x^3 + m_4 \sin 2m\dot{n}\pi \operatorname{tang} x^4 \ldots.],$

où $\dot{n}$ est arbitraire. En supposant $\dot{n} = 0$, on a

46. $\cos mx = |\cos x|^m (1 - m_2 \operatorname{tang} x^2 + m_4 \operatorname{tang} x^4 - m_6 \operatorname{tang} x^6 \ldots.),$

47. $\sin mx = |\cos x|^m (m \operatorname{tang} x - m_3 \operatorname{tang} x^3 + m_5 \operatorname{tang} x^5 \ldots.).|$

Voilà les expressions complètes des cosinus et des sinus des arcs multiples en puissances de cosinus et sinus des arcs simples. Ces formules sont soumises à la condition que x soit compris entre $-\frac{1}{2}\pi$ et $+\frac{1}{2}\pi$ et que m soit réel et positif.

Puisque $\cos mx$ à la même valeur pour un x positif ou négatif de la même grandeur, et que $\sin mx = -\sin mx$, si x est négatif, il faut que les formules (46. et 47.) se reproduisent, au signe près, si l'on y met $-x$ au lieu de $+x$. C'est ce qui a effectivement lieu comme il est facile de voir.

14.

Mais les résultats (46. et 47.) sont encore soumis à une autre restriction. Car en examinant le développement général (39.) on verra sans peine, que la série à droite cesse d'être convergente, si $\operatorname{tang} x$ est plus grand que l'unité. Donc, passé $x = \pm\frac{1}{4}\pi$, les expressions (46. et 47.) ne sont plus hors de doute. Il faut donc borner leur application aux arcs compris entre $-\frac{1}{4}\pi$ et $+\frac{1}{4}\pi$ et il s'agit de trouver d'autres formules pour les arcs plus grands.

Cela se fera comme suit:

1. Si x est un arc entre $\frac{1}{4}\pi$ et $\frac{3}{4}\pi$, l'arc $x - \frac{1}{2}\pi$ sera compris entre $-\frac{1}{4}\pi$ et $+\frac{1}{4}\pi$, et les expressions (46. et 47.) seront applicables à ce dernier arc. Puisque

48. $\cos(x - \frac{1}{2}\pi) = +\sin x$ et $\operatorname{tang}(x - \frac{1}{2}\pi) = -\cot x,$

les formules (46. et 47.) donneront

49. $\begin{cases} \cos m(x - \frac{1}{2}\pi) = |+\sin x|^m (1 - m_2 \cot x^2 + m_4 \cot x^4 \ldots.) \text{ et} \\ \sin m(x - \frac{1}{2}\pi) = -|+\sin x|^m (m_2 \cot x - m_3 \cot x^3 \ldots.). \end{cases}$

Mais

50. $\begin{cases} \cos mx = \cos m(x - \frac{1}{2}\pi) \cos \frac{1}{2} m\pi + \sin m(x - \frac{1}{2}\pi) \sin \frac{1}{2} m\pi, \text{ et} \\ \sin mx = \sin m(x - \frac{1}{2}\pi) \cos \frac{1}{2} m\pi + \cos m(x - \frac{1}{2}\pi) \sin \frac{1}{2} m\pi, \end{cases}$

donc dans ce cas

51. $\cos mx = |+\sin x|^m [+\cos \frac{1}{2} m\pi (1 - m_2 \cot x^2 + m_4 \cot x^4 \ldots.) - \sin \frac{1}{2} m\pi (m_1 \cot x - m_3 \cot x^3 \ldots.)].$

52. $\sin mx = |+\sin x|^m [-\cos \frac{1}{2} m\pi (m_1 \cot x - m_3 \cot x^3 \ldots.) - \sin \frac{1}{2} m\pi (1 - m_2 \cot x^2 + m_4 \cot x^4 \ldots.)].$

II. Si l'arc x tombe entre $\frac{3}{4}\pi$ et $\frac{5}{4}\pi$, l'arc $x-\pi$ sera compris entre $-\frac{1}{4}\pi$ et $+\frac{1}{4}\pi$, donc on peut se servir des formules (46. et 47.).

On a

53. $\cos(x-\pi) = -\cos x$ et $\operatorname{tang}(x-\pi) = +\operatorname{tang} x$,

donc en vertu des formules (46. et 47.):

54. $$\begin{cases}\cos m(x-\pi) = |-\cos x|^m (1 - m_2 \operatorname{tang} x^2 + m_4 \operatorname{tang} x^4 \ldots.) \text{ et} \\ \sin m(x-\pi) = |-\cos x|^m (m_1 \operatorname{tang} x - m_3 \operatorname{tang} x^3 \ldots.).\end{cases}$$

Mais

55. $$\begin{cases}\cos mx = \cos m(x-\pi)\cos m\pi + \sin m(x-\pi)\sin m\pi \text{ et} \\ \sin mx = \sin m(x-\pi)\cos m\pi - \cos m(x-\pi)\sin m\pi;\end{cases}$$

donc:

56. $$\cos mx = |-\cos x|^m [\cos m\pi (1 - m_2 \operatorname{tang} x^2 + m_4 \operatorname{tang} x^4 \ldots.) + \sin m\pi (m_1 \operatorname{tang} x - m_3 \operatorname{tang} x^3 \ldots.)] \text{ et}$$

57. $$\sin mx = |-\cos x|^m [\cos m\pi (m_1 \operatorname{tang} x - m_3 \operatorname{tang} x^3 \ldots.) - \sin m\pi (1 - m_2 \operatorname{tang} x^2 + m_4 \operatorname{tang} x^4 \ldots.)]$$

dans ce cas.

III. Si l'arc x tombe entre $\frac{5}{4}\pi$ et $\frac{7}{4}\pi$, l'arc $x-\frac{3}{2}\pi$ sera compris entre $-\frac{1}{4}\pi$ et $+\frac{1}{4}\pi$, donc les formules (46. et 47.) conviendront à ce dernier.

On a

58. $\cos(x-\frac{3}{2}\pi) = -\sin x$ et $\operatorname{tang}(x-\frac{3}{2}\pi) = -\cot x$,

donc en vertu des formules (46. et 47.):

59. $$\begin{cases}\cos m(x-\frac{3}{2}\pi) = +|-\sin x|^m (1 - m_2 \cot x^2 + m_4 \cot x^4 \ldots.) \\ \sin m(x-\frac{3}{2}\pi) = -|-\sin x|^m (m_1 \cot x - m_3 \cot x^3 \ldots.).\end{cases}$$

Mais

60. $$\begin{cases}\cos mx = \cos m(x-\frac{3}{2}\pi)\cos \frac{3}{2}m\pi + \sin m(x-\frac{3}{2}\pi)\sin \frac{3}{2}m\pi \text{ et} \\ \sin mx = \sin m(x-\frac{3}{2}\pi)\cos \frac{3}{2}m\pi - \cos m(x-\frac{3}{2}\pi)\sin \frac{3}{2}m\pi,\end{cases}$$

donc

61. $$\cos mx = |-\sin x|^m [+\cos \tfrac{3}{2}m\pi (1 - m_2 \cot x^2 + m_4 \cot x^4 \ldots.) - \sin \tfrac{3}{2}m\pi (m_1 \cot x - m_3 \cot x^3 \ldots.)] \text{ et}$$

62. $$\sin mx = |-\sin x|^m [-\cos \tfrac{3}{2}m\pi (m_1 \cot x - m_3 \cot x^3 \ldots.) - \sin \tfrac{3}{2}m\pi (1 - m_2 \cot x^2 + m_4 \cot x^4 \ldots.)]$$

dans ce cas.

IV. Si l'arc x tombe entre $\frac{7}{4}\pi$ et 2π l'arc $x-2\pi$ sera compris entre $-\frac{1}{4}\pi$ et 0; donc les formules (46. et 47.) seront applicables à ce dernier.

On a

63. $\cos(x-2\pi) = +\cos x$ et $\operatorname{tang}(x-2\pi) = +\operatorname{tang} x$,

donc en vertu des formules (46. et 47.):

64. $$\begin{cases}\cos m(x-2\pi) = |+\cos x|^m(1-m_2\tang x^2+m_4\tang x^4\ldots.) \text{ et}\\ \sin m(x-2\pi) = |+\cos x|^m(m_1\tang x-m_3\tang x^3\ldots.).\end{cases}$$

Mais

65. $$\begin{cases}\cos mx = \cos m(x-2\pi)\cos 2m\pi+\sin m(x-2\pi)\sin 2m\pi \text{ et}\\ \sin mx = \sin m(x-2\pi)\cos 2m\pi-\cos m(x-2\pi)\sin 2m\pi,\end{cases}$$

donc

66. $$\cos mx = |+\cos x|^m[\cos 2m\pi(1-m_2\tang x^2+m_4\tang x^4\ldots.) + \sin 2m\pi(m_1\tang x-m_3\tang x^3\ldots.)] \text{ et}$$

67. $$\sin mx = |+\cos x|^m[\cos 2m\pi(m_1\tang x-m_3\tang x^3\ldots.) - \sin 2m\pi(1-m_2\tang x^2+m_4\tang x^4\ldots.)]$$

dans ce cas.

V. Si l'arc x est plus grand qu'un autre compris entre 0 et 2π, d'un nombre $2\dot{n}$ de civconférences, l'arc $x-2\dot{n}\pi$ sera compris entre 0 et 2π; donc l'une ou l'autre des formules ci dessus lui sera applicable.

En supposant pour abréger:

68. $1-m_2\tang x^2+m_4\tang x^4\ldots. = P_1$, $m_1\tang x-m_3\tang x^3\ldots. = Q_1$,

69. $1-m_2\cot x^2+m_4\cot x^4\ldots. = P_2$, $m_1\cot x-m_3\cot x^3\ldots. = Q_2$,

les formules trouvées donnent les suivantes:

70.
$$\begin{cases}
\text{I.} & \begin{cases}\cos mx = |+\cos x|^m P_1,\\ \sin mx = |+\cos x|^m Q_1,\end{cases}\\
& \text{pour les arcs entre } 0 \text{ et } \tfrac{1}{4}\pi;\\
\text{II.} & \begin{cases}\cos mx = +|+\sin x|^m[+P_2\cos\tfrac{1}{2}m\pi-Q_2\sin\tfrac{1}{2}m\pi],\\ \sin mx = -|+\sin x|^m[+P_2\sin\tfrac{1}{2}m\pi+Q_2\cos\tfrac{1}{2}m\pi],\end{cases}\\
& \text{pour les arcs entre } \tfrac{1}{4}\pi \text{ et } \tfrac{3}{4}\pi;\\
\text{III.} & \begin{cases}\cos mx = +|-\cos x|^m[+P_1\cos m\pi+Q_1\sin m\pi],\\ \sin mx = -|-\cos x|^m[+P_1\sin m\pi-Q_1\cos m\pi],\end{cases}\\
& \text{pour les arcs entre } \tfrac{3}{4}\pi \text{ et } \tfrac{5}{4}\pi;\\
\text{IV.} & \begin{cases}\cos mx = +|-\sin x|^m[+P_2\cos\tfrac{3}{2}m\pi-Q_2\sin\tfrac{3}{2}m\pi],\\ \sin mx = -|-\sin x|^m[+P_2\sin\tfrac{3}{2}m\pi+Q_2\cos\tfrac{3}{2}m\pi],\end{cases}\\
& \text{pour les arcs entre } \tfrac{5}{4}\pi \text{ et } \tfrac{7}{4}\pi;\\
\text{V.} & \begin{cases}\cos mx = |+\cos x|^m[+P_1\cos 2m\pi+Q_1\sin 2m\pi],\\ \sin mx = |+\cos x|^m[-P_1\sin 2m\pi+Q_1\cos 2m\pi],\end{cases}\\
& \text{pour les arcs entre } \tfrac{7}{4}\pi \text{ et } 2\pi.
\end{cases}$$

Maintenant on a:

71. $$\begin{cases}\cos(x-2\dot{n}\pi) = +\cos x, & \tang(x-2\dot{n}\pi) = +\tang x,\\ \sin(x-2\dot{n}\pi) = +\sin x, & \cot(x-2\dot{n}\pi) = +\cot x,\end{cases}$$

II. Si l'arc x tombe entre $\frac{3}{4}\pi$ et $\frac{5}{4}\pi$, l'arc $x-\pi$ sera compris entre $-\frac{1}{4}\pi$ et $+\frac{1}{4}\pi$, donc on peut se servir des formules (46. et 47.).

On a

53. $\cos(x-\pi) = -\cos x$ et $\operatorname{tang}(x-\pi) = +\operatorname{tang} x$,

donc en vertu des formules (46. et 47.):

54. $$\begin{cases}\cos m(x-\pi) = |-\cos x|^m (1 - m_2 \operatorname{tang} x^2 + m_4 \operatorname{tang} x^4 \ldots.) \text{ et} \\ \sin m(x-\pi) = |-\cos x|^m (m_1 \operatorname{tang} x - m_3 \operatorname{tang} x^3 \ldots.).\end{cases}$$

Mais

55. $$\begin{cases}\cos mx = \cos m(x-\pi)\cos m\pi + \sin m(x-\pi)\sin m\pi \text{ et} \\ \sin mx = \sin m(x-\pi)\cos m\pi - \cos m(x-\pi)\sin m\pi;\end{cases}$$

donc:

56. $$\cos mx = |-\cos x|^m [\cos m\pi (1 - m_2 \operatorname{tang} x^2 + m_4 \operatorname{tang} x^4 \ldots.) + \sin m\pi (m_1 \operatorname{tang} x - m_3 \operatorname{tang} x^3 \ldots.)] \text{ et}$$

57. $$\sin mx = |-\cos x|^m [\cos m\pi (m_1 \operatorname{tang} x - m_3 \operatorname{tang} x^3 \ldots.) - \sin m\pi (1 - m_2 \operatorname{tang} x^2 + m_4 \operatorname{tang} x^4 \ldots.)]$$

dans ce cas.

III. Si l'arc x tombe entre $\frac{5}{4}\pi$ et $\frac{7}{4}\pi$, l'arc $x-\frac{3}{2}\pi$ sera compris entre $-\frac{1}{4}\pi$ et $+\frac{1}{4}\pi$, donc les formules (46. et 47.) conviendront à ce dernier.

On a

58. $\cos(x-\frac{3}{2}\pi) = -\sin x$ et $\operatorname{tang}(x-\frac{3}{2}\pi) = -\cot x$,

donc en vertu des formules (46. et 47.):

59. $$\begin{cases}\cos m(x-\frac{3}{2}\pi) = +|-\sin x|^m (1 - m_2 \cot x^2 + m_4 \cot x^4 \ldots.) \\ \sin m(x-\frac{3}{2}\pi) = -|-\sin x|^m (m_1 \cot x - m_3 \cot x^3 \ldots.).\end{cases}$$

Mais

60. $$\begin{cases}\cos mx = \cos m(x-\frac{3}{2}\pi)\cos \frac{3}{2}m\pi + \sin m(x-\frac{3}{2}\pi)\sin \frac{3}{2}m\pi \text{ et} \\ \sin mx = \sin m(x-\frac{3}{2}\pi)\cos \frac{3}{2}m\pi - \cos m(x-\frac{3}{2}\pi)\sin \frac{3}{2}m\pi,\end{cases}$$

donc

61. $$\cos mx = |-\sin x|^m [+\cos \tfrac{3}{2}m\pi (1 - m_2 \cot x^2 + m_4 \cot x^4 \ldots.) - \sin \tfrac{3}{2}m\pi (m_1 \cot x - m_3 \cot x^3 \ldots.)] \text{ et}$$

62. $$\sin mx = |-\sin x|^m [-\cos \tfrac{3}{2}m\pi (m_1 \cot x - m_3 \cot x^3 \ldots.) - \sin \tfrac{3}{2}m\pi (1 - m_2 \cot x^2 + m_4 \cot x^4 \ldots.)]$$

dans ce cas.

IV. Si l'arc x tombe entre $\frac{7}{4}\pi$ et 2π l'arc $x-2\pi$ sera compris entre $-\frac{1}{4}\pi$ et 0; donc les formules (46. et 47.) seront applicables à ce dernier.

On a

63. $\cos(x-2\pi) = +\cos x$ et $\operatorname{tang}(x-2\pi) = +\operatorname{tang} x$,

donc en vertu des formules (46. et 47.):

64. $$\begin{cases}\cos m(x-2\pi) = |+\cos x|^m(1-m_2\tang x^2+m_4\tang x^4\ldots.) \text{ et}\\ \sin m(x-2\pi) = |+\cos x|^m(m_1\tang x-m_3\tang x^3\ldots.).\end{cases}$$

Mais

65. $$\begin{cases}\cos mx = \cos m(x-2\pi)\cos 2m\pi+\sin m(x-2\pi)\sin 2m\pi \text{ et}\\ \sin mx = \sin m(x-2\pi)\cos 2m\pi-\cos m(x-2\pi)\sin 2m\pi,\end{cases}$$

donc

66. $$\cos mx = |+\cos x|^m[\cos 2m\pi(1-m_2\tang x^2+m_4\tang x^4\ldots.) + \sin 2m\pi(m_1\tang x-m_3\tang x^3\ldots.)] \text{ et}$$

67. $$\sin mx = |+\cos x|^m[\cos 2m\pi(m_1\tang x-m_3\tang x^3\ldots.) - \sin 2m\pi(1-m_2\tang x^2+m_4\tang x^4\ldots.)]$$

dans ce cas.

V. Si l'arc x est plus grand qu'un autre compris entre 0 et 2π, d'un nombre $2\dot{n}$ de civconférences, l'arc $x-2\dot{n}\pi$ sera compris entre 0 et 2π; donc l'une ou l'autre des formules ci dessus lui sera applicable.

En supposant pour abréger:

68. $1-m_2\tang x^2+m_4\tang x^4\ldots.=P_1$, $m_1\tang x-m_3\tang x^3\ldots.=Q_1$,

69. $1-m_2\cot x^2+m_4\cot x^4\ldots.=P_2$, $m_1\cot x-m_3\cot x^3\ldots.=Q_2$,

les formules trouvées donnent les suivantes:

70.
I. $\begin{cases}\cos mx = |+\cos x|^m P_1,\\ \sin mx = |+\cos x|^m Q_1,\end{cases}$
pour les arcs entre 0 et $\frac{1}{4}\pi$;

II. $\begin{cases}\cos mx = +|+\sin x|^m[+P_2\cos\frac{1}{2}m\pi-Q_2\sin\frac{1}{2}m\pi],\\ \sin mx = -|+\sin x|^m[+P_2\sin\frac{1}{2}m\pi+Q_2\cos\frac{1}{2}m\pi],\end{cases}$
pour les arcs entre $\frac{1}{4}\pi$ et $\frac{3}{4}\pi$;

III. $\begin{cases}\cos mx = +|-\cos x|^m[+P_1\cos m\pi+Q_1\sin m\pi],\\ \sin mx = -|-\cos x|^m[+P_1\sin m\pi-Q_1\cos m\pi],\end{cases}$
pour les arcs entre $\frac{3}{4}\pi$ et $\frac{5}{4}\pi$;

IV. $\begin{cases}\cos mx = +|-\sin x|^m[+P_2\cos\frac{3}{2}m\pi-Q_2\sin\frac{3}{2}m\pi],\\ \sin mx = -|-\sin x|^m[+P_2\sin\frac{3}{2}m\pi+Q_2\cos\frac{3}{2}m\pi],\end{cases}$
pour les arcs entre $\frac{5}{4}\pi$ et $\frac{7}{4}\pi$;

V. $\begin{cases}\cos mx = |+\cos x|^m[+P_1\cos 2m\pi+Q_1\sin 2m\pi],\\ \sin mx = |+\cos x|^m[-P_1\sin 2m\pi+Q_1\cos 2m\pi],\end{cases}$
pour les arcs entre $\frac{7}{4}\pi$ et 2π.

Maintenant on a:

71. $$\begin{cases}\cos(x-2\dot{n}\pi) = +\cos x, \quad \tang(x-2\dot{n}\pi) = +\tang x,\\ \sin(x-2\dot{n}\pi) = +\sin x, \quad \cot(x-2\dot{n}\pi) = +\cot x,\end{cases}$$

donc les quantités P_1, Q_1, P_2, Q_2 et les facteurs $|\pm\cos x|^m$ et $|\pm\sin x|^m$ sont les mêmes pour les arcs x et pour les arcs $x-2n\pi$. On a en second lieu:

$$72.\quad \begin{cases}\cos mx = \cos m(x-2n\pi)\cos 2mn\pi + \sin m(x-2n\pi)\sin 2mn\pi & \text{et}\\ \sin mx = \sin m(x-2n\pi)\cos 2mn\pi - \cos m(x-2n\pi)\sin 2mn\pi.\end{cases}$$

Donc si dans ces dernières formules on substitue au lieu de $\cos m(x-2n\pi)$ et $\sin m(x-2n\pi)$, les expressions ci-dessus de $\cos mx$ et $\sin mx$, on trouve:

$$73.\quad \begin{cases}
\text{I.} & \begin{cases}\cos mx = |+\cos x|^m [P_1\cos 2mn\pi + Q_1\sin 2mn\pi],\\ \sin mx = |+\cos x|^m [Q_1\cos 2mn\pi - P_1\sin 2mn\pi],\end{cases}\\
\text{II.} & \begin{cases}\cos mx = |+\sin x|^m [(P_2\cos\frac{1}{2}m\pi - Q_2\sin\frac{1}{2}m\pi)\cos 2mn\pi\\ \qquad -(P_2\sin\frac{1}{2}m\pi + Q_2\cos\frac{1}{2}m\pi)\sin 2mn\pi],\\ \sin mx = |+\sin x|^m [-(P_2\sin\frac{1}{2}m\pi + Q_2\cos\frac{1}{2}m\pi)\cos 2mn\pi\\ \qquad -(P_2\cos\frac{1}{2}m\pi - Q_2\sin\frac{1}{2}m\pi)\sin 2mn\pi],\end{cases}\\
\text{III.} & \begin{cases}\cos mx = |-\cos x|^m [(P_1\cos m\pi + Q_1\sin m\pi)\cos 2mn\pi\\ \qquad -(P_1\sin m\pi - Q_1\cos m\pi)\sin 2mn\pi],\\ \sin mx = |-\cos x|^m [-(P_1\sin m\pi - Q_1\cos m\pi)\cos 2mn\pi\\ \qquad -(P_1\cos m\pi + Q_1\sin m\pi)\sin 2mn\pi],\end{cases}\\
\text{IV.} & \begin{cases}\cos mx = |-\sin x|^m [(P_2\cos\frac{3}{2}m\pi - Q_2\sin\frac{3}{2}m\pi)\cos 2mn\pi\\ \qquad -(P_2\sin\frac{3}{2}m\pi + Q_2\cos\frac{3}{2}m\pi)\sin 2mn\pi],\\ \sin mx = |-\sin x|^m [-(P_2\sin\frac{3}{2}m\pi + Q_2\cos\frac{3}{2}m\pi)\cos 2mn\pi\\ \qquad -(P_2\cos\frac{3}{2}m\pi - Q_2\sin\frac{3}{2}m\pi)\sin 2mn\pi],\end{cases}\\
\text{V.} & \begin{cases}\cos mx = |+\cos x|^m [(P_1\cos 2m\pi + Q_1\sin 2m\pi)\cos 2mn\pi\\ \qquad +(-P_1\sin 2m\pi + Q_1\cos 2m\pi)\sin 2mn\pi],\\ \sin mx = |+\cos x|^m [(-P_1\sin 2m\pi + Q_1\cos 2m\pi)\cos 2mn\pi\\ \qquad -(P_1\cos 2m\pi + Q_1\sin 2m\pi)\sin 2mn\pi].\end{cases}
\end{cases}$$

Cela donne, en réduisant:

$$74.\quad \begin{cases}
\text{I.} & \begin{cases}\cos mx = |+\cos x|^m [+P_1\cos 2mn\pi + Q_1\sin 2mn\pi],\\ \sin mx = |+\cos x|^m [+Q_1\cos 2mn\pi - P_1\sin 2mn\pi],\end{cases}\\
\text{pour les arcs entre } 2n\pi \text{ et } (2n+\tfrac{1}{4})\pi;\\
\text{II.} & \begin{cases}\cos mx = |+\sin x|^m [+P_2\cos(2n+\frac{1}{2})m\pi - Q_2\sin(2n+\frac{1}{2})m\pi],\\ \sin mx = |+\sin x|^m [-Q_2\cos(2n+\frac{1}{2})m\pi - P_2\sin(2n+\frac{1}{2})m\pi],\end{cases}\\
\text{pour les arcs entre } (2n+\tfrac{1}{4})\pi \text{ et } (2n+\tfrac{3}{4})\pi;
\end{cases}$$

74.
$$\begin{cases}
\text{III.} \begin{cases} \cos mx = |-\cos x|^m [+P_1 \cos(2\dot{n}+1)m\pi + Q_1 \sin(2\dot{n}+1)m\pi], \\ \sin mx = |-\cos x|^m [+Q_1 \cos(2\dot{n}+1)m\pi - P_1 \sin(2\dot{n}+1)m\pi], \end{cases} \\
\text{pour les arcs entre } (2\dot{n}+\tfrac{3}{4})\pi \text{ et } (2\dot{n}+\tfrac{5}{4})\pi; \\
\text{IV.} \begin{cases} \cos mx = |-\sin x|^m [+P_2 \cos(2\dot{n}+\tfrac{3}{2})\pi - Q_2 \sin(2\dot{n}+\tfrac{3}{2})\pi], \\ \sin mx = |-\sin x|^m [-Q_2 \cos(2\dot{n}+\tfrac{3}{2})\pi - P_2 \sin(2\dot{n}+\tfrac{3}{2})\pi], \end{cases} \\
\text{pour les arcs entre } (2\dot{n}+\tfrac{5}{4})\pi \text{ et } (2\dot{n}+\tfrac{7}{4})\pi; \\
\text{V.} \begin{cases} \cos mx = |+\cos x|^m [+P_1 \cos 2(\dot{n}+1)\pi + Q_1 \sin 2(\dot{n}+1)\pi], \\ \sin mx = |+\cos x|^m [+Q_1 \cos 2(\dot{n}+1)\pi - P_1 \sin 2(\dot{n}+1)\pi], \end{cases} \\
\text{pour les arcs entre } (2\dot{n}+\tfrac{7}{4})\pi \text{ et } 2(\dot{n}+1)\pi.
\end{cases}$$

Si x est négatif, P_2, Q_2, $\sin x$ et $\sin mx$ changent de signes, mais P_1, Q_1, $\cos x$ et $\cos mx$ conservent les leurs; donc on trouve dans ce cas:

75.
$$\begin{cases}
\text{I.} \begin{cases} \cos mx = |+\cos x|^m [+P_1 \cos 2m\dot{n}\pi + Q_1 \sin 2m\dot{n}\pi], \\ \sin mx = |+\cos x|^m [-Q_1 \cos 2m\dot{n}\pi + P_1 \sin 2m\dot{n}\pi], \end{cases} \\
\text{pour les arcs entre } -2\dot{n}\pi \text{ et } -(2\dot{n}+\tfrac{1}{4})\pi; \\
\text{II.} \begin{cases} \cos mx = |-\sin x|^m [-P_2 \cos(2\dot{n}+\tfrac{1}{2})m\pi + Q_2 \sin(2\dot{n}+\tfrac{1}{2})m\pi], \\ \sin mx = |-\sin x|^m [-Q_2 \cos(2\dot{n}+\tfrac{1}{2})m\pi - P_2 \sin(2\dot{n}+\tfrac{1}{2})m\pi], \end{cases} \\
\text{pour les arcs entre } -(2\dot{n}+\tfrac{1}{4})\pi \text{ et } -(2\dot{n}+\tfrac{3}{4})\pi; \\
\text{III.} \begin{cases} \cos mx = |-\cos x|^m [+P_1 \cos(2\dot{n}+1)m\pi + Q_1 \sin(2\dot{n}+1)\pi], \\ \sin mx = |-\cos x|^m [-Q_1 \cos(2\dot{n}+1)m\pi + P_1 \sin(2\dot{n}+1)\pi], \end{cases} \\
\text{pour les arcs entre } -(2\dot{n}+\tfrac{3}{4})\pi \text{ et } -(2\dot{n}+\tfrac{5}{4})\pi; \\
\text{IV.} \begin{cases} \cos mx = |+\sin x|^m [-P_2 \cos(2\dot{n}+\tfrac{3}{2})\pi + Q_2 \sin(2\dot{n}+\tfrac{3}{2})\pi], \\ \sin mx = |+\sin x|^m [-Q_2 \cos(2\dot{n}+\tfrac{3}{2})\pi - P_2 \sin(2\dot{n}+\tfrac{3}{2})\pi], \end{cases} \\
\text{pour les arcs entre } -(2\dot{n}+\tfrac{5}{4})\pi \text{ et } -(2\dot{n}+\tfrac{7}{4})\pi; \\
\text{V.} \begin{cases} \cos mx = |+\cos x|^m [+P_1 \cos 2(\dot{n}+1)\pi + Q_1 \sin 2(\dot{n}+1)\pi], \\ \sin mx = |+\cos x|^m [-Q_1 \cos 2(\dot{n}+1)\pi + P_1 \sin 2(\dot{n}+1)\pi] \end{cases} \\
\text{pour les arcs entre } -(2\dot{n}+\tfrac{7}{4})\pi \text{ et } 2(\dot{n}+1)\pi.
\end{cases}$$

Les formules (74.) offrent le tableau complet des expressions des cosinus et sinus des arcs multiples positifs, et celles (75.) le tableau des expressions des cosinus et sinus des arcs multiples négatifs.

15.

En passant nous ferons remarquer les formules suivantes, qu'on tire aisément des expressions ci-dessus. En quarrant les expressions correspondantes de $\cos mx$ et $\sin mx$, et ajoutant les quarrés, on trouve respectivement

76. $$|\sec x|^{2m} = P_1^2 + Q_1^2 \quad \text{et} \quad |\operatorname{cosec} x|^{2m} = P_2^2 + Q_2^2,$$

c'est-à-dire:

77. $$|\sec x|^{2m} = (1 - m_2 \operatorname{tang} x^2 + m_4 \operatorname{tang} x^4 \ldots.)^2 + (m_1 \operatorname{tang} x - m_3 \operatorname{tang} x^3 \ldots.)^2,$$

pour les arcs entre $\pm 2\dot{n}\pi$ et $\pm(2\dot{n} + \frac{1}{4})\pi$, entre $\pm(2\dot{n} + \frac{3}{4})\pi$ et $\pm(2\dot{n} + \frac{5}{4})\pi$ et entre $\pm(2\dot{n} + \frac{7}{4})\pi$ et $\pm 2(\dot{n} + 1)\pi$, et

78. $$|\operatorname{cosec} x|^{2m} = (1 - m_2 \cot x^2 + m_4 \cot x^4 \ldots.)^2 + (m_1 \cot x - m_3 \cot x^3 \ldots.)^2$$

pour les arcs entre $\pm(2\dot{n} + \frac{1}{4})\pi$ et $\pm(2\dot{n} + \frac{3}{4})\pi$, et entre $\pm(2\dot{n} + \frac{5}{4})\pi$ et $\pm(2\dot{n} + \frac{7}{4})\pi$

Si $x = \pm\frac{1}{4}\pi$, ou $x = \pm\frac{7}{4}\pi$, on a $\operatorname{tang} x = \cot x = 1$ et $\sec x = \operatorname{cosec} x = \sqrt{2}$, donc ce cas donne:

79. $$2^m = (1 - m_2 + m_4 \ldots.)^2 + (m_1 - m_3 + m_5 \ldots.)^2,$$

pour un m quelconque réel et positif.

Les formules (46. et 47.) donnent séparément:

80. $$(1 - m_2 + m_4 \ldots.)^2 = 2^m (\cos \tfrac{1}{4} m\pi)^2, \quad (m_1 - m_3 + m_5 \ldots.)^2 = 2^m (\sin \tfrac{1}{4} m\pi)^2.$$

On peut tirer encore d'autres expressions remarquables des formules (74. et 75.), en calculant les valeurs de $\cos mx^2 - \sin mx^2 = \cos 2mx$, et de $2\cos mx \sin mx = \sin 2mx$. Nous ne nous y arrêterons pas.

16.

Les formules (74. et 75., §. 14.) expriment $\cos mx$ et $\sin mx$ par les cosinus et les sinus de l'arc x même. Si l'on veut y introduire un arc x compris entre $-\frac{1}{4}\pi$ et $+\frac{1}{4}\pi$, auquel les formules (46. et 47.) sont applicables, on trouvera les expressions suivantes:

I. Pour x même compris entre $-\frac{1}{4}\pi$ et $+\frac{1}{4}\pi$ les formules (46., 47. et 68.) donnent:

81. $$\cos mx = |\cos x|^m P \quad \text{et} \quad \sin mx = |\cos x|^m Q,$$

où

82. $$P = 1 - m_2 \operatorname{tang} x^2 + m_4 \operatorname{tang} x^4 - \ldots. \quad \text{et} \quad Q = m_1 \operatorname{tang} x - m_3 \operatorname{tang} x^3 \ldots.,$$

x étant désormais toujours compris entre $-\frac{1}{4}\pi$ et $+\frac{1}{4}\pi$, et les quantités P_1 et Q_1 étant désignées simplement par P et Q dans ce cas.

II. Si l'arc donné tombe entre $(2\dot{n} - \frac{1}{4})\pi$ et $(2\dot{n} + \frac{1}{4})\pi$ ou entre $(-2\dot{n} - \frac{1}{4})\pi$ et $(-2\dot{n} + \frac{1}{4})\pi$, on pourra l'exprimer par $x \pm 2\dot{n}\pi$. Mais

$$83.\quad \begin{cases}\cos m(x\pm 2\dot{n}\pi) = \cos mx\cos 2mn\dot{\pi} \mp \sin mx\sin 2mn\dot{\pi},\\ \sin m(x\pm 2\dot{n}\pi) = \sin mx\cos 2mn\dot{\pi} \pm \cos mx\sin 2mn\dot{\pi},\end{cases}$$

donc:

$$84.\quad \begin{cases}\cos m(x\pm 2\dot{n}\pi) = |\cos x|^m[P\cos 2mn\dot{\pi} \mp Q\sin 2mn\dot{\pi}],\\ \sin m(x\pm 2\dot{n}\pi) = |\cos x|^m[Q\cos 2mn\dot{\pi} \pm P\sin 2mn\dot{\pi}].\end{cases}$$

III. Si l'arc donné tombe entre $(2\dot{n}\pm\frac{1}{4})\pi$ et $(2\dot{n}\pm\frac{3}{4})\pi$, ou entre $(-2\dot{n}\pm\frac{1}{4})\pi$ et $(-2\dot{n}\pm\frac{3}{4})\pi$, on pourra l'exprimer par $x\pm(2\dot{n}+\frac{1}{2})\pi$, et l'on trouve d'une manière semblable:

$$85.\quad \begin{cases}\cos m(x\pm(2\dot{n}+\frac{1}{2})\pi) = |\cos x|^m[P\cos m(2\dot{n}+\frac{1}{2})\pi \mp Q\sin m(2\dot{n}+\frac{1}{2})\pi],\\ \sin m(x\pm(2\dot{n}+\frac{1}{2})\pi) = |\cos x|^m[Q\cos m(2\dot{n}+\frac{1}{2})\pi \pm P\sin m(2\dot{n}+\frac{1}{2})\pi].\end{cases}$$

IV. Si l'arc donné tombe entre $(2\dot{n}\pm\frac{3}{4})\pi$ et $(2\dot{n}\pm\frac{5}{4})\pi$, ou entre $(-2\dot{n}\pm\frac{3}{4})\pi$ et $(-2\dot{n}\pm\frac{5}{4})\pi$, on pourra l'exprimer par $x\pm(2\dot{n}+1)\pi$, et on aura:

$$86.\quad \begin{cases}\cos m(x\pm(2\dot{n}+1)\pi) = |\cos x|^m[P\cos m(2\dot{n}+1)\pi \mp Q\sin m(2\dot{n}+1)\pi],\\ \sin m(x\pm(2\dot{n}+1)\pi) = |\cos x|^m[Q\cos m(2\dot{n}+1)\pi \pm P\sin m(2\dot{n}+1)\pi].\end{cases}$$

V. Si l'arc donné tombe entre $(2\dot{n}\pm\frac{5}{4})\pi$ et $(2\dot{n}\pm\frac{7}{4})\pi$, ou entre $(-2\dot{n}\pm\frac{5}{4})\pi$ et $(-2\dot{n}\pm\frac{7}{4})\pi$, on pourra l'exprimer par $x\pm(2\dot{n}+\frac{3}{2})\pi$, et l'on aura:

$$87.\quad \begin{cases}\cos m(x\pm(2\dot{n}+\frac{3}{2})\pi) = |\cos x|^m[P\cos m(2\dot{n}+\frac{3}{2})\pi \mp Q\sin m(2\dot{n}+\frac{3}{2})\pi],\\ \sin m(x\pm(2\dot{n}+\frac{3}{2})\pi) = |\cos x|^m[Q\cos m(2\dot{n}+\frac{3}{2})\pi \pm P\sin m(2\dot{n}+\frac{3}{2})\pi].\end{cases}$$

Les quatre couples de formules (84. 85. 86. 87.) embrassent tous les cas, et il ne s'y présente que $\cos x$ et les quantités P et Q (82.), prises toutes les trois pour une valeur de x comprise entre $-\frac{1}{4}\pi$ et $+\frac{1}{4}\pi$.

17.

Les séries trouvées ci-dessus pour $\cos mx$ et $\sin mx$ vont en croissant suivant les puissances ascendentes des tangentes et des cotangentes de l'arc x. On peut demander des séries qui aillent suivant les puissances ascendentes ou descendantes des cosinus et des sinus. Cherchons ces séries, s'il en existe.

D'abord nous remarquerons qu'il ne s'agit que des séries:

$$88.\quad \begin{cases}P = 1 - m_2\operatorname{tang}x^2 + m_4\operatorname{tang}x^4 \ldots. \text{ et}\\ Q = m_1\operatorname{tang}x - m_3\operatorname{tang}x^3 + m_5\operatorname{tang}x^5 \ldots.\end{cases}$$

pour un x entre $-\frac{1}{4}\pi$ et $+\frac{1}{4}\pi$, car à l'aide de ces séries on peut, comme nous l'avons vu (§. 16.), exprimer $\cos mx$ et $\sin mx$ dans tous les cas.

18.

Les expressions (46. et 47.) donnent:

89. $\cos mx = \cos x^m\left(1+m_2\frac{\cos x^2-1}{\cos x^2}+m_4\frac{(\cos x^2-1)^2}{\cos x^4}+m_6\frac{(\cos x^2-1)^3}{\cos x^6}....\right)$ et

90. $\sin mx =$

$$\cos x^{m-1}\sin x\left(m_1+m_3\frac{\cos x^2-1}{\cos x^2}+m_5\frac{(\cos x^2-1)^2}{\cos x^4}+m_7\frac{(\cos x^2-1)^3}{\cos x^6}....\right).$$

Pour plus de simplicité nous avons écrit $\cos x^m$ au lieu de $|\cos x|^m$; la valeur absolue ou toute réelle $|\cos x|^m$ de $(\cos x)^m$ est sous-entendue. La forme des expressions (89. et 90.) semble annoncer que $\cos mx$ et $\sin mx$ peuvent être exprimés sous cette forme:

91. $\cos mx = a_1\cos x^m + a_2\cos x^{m-2} + a_3\cos x^{m-4}....$

92. $\sin mx = \sin x(b_1\cos x^{m-1} + b_2\cos x^{m-3} + b_3\cos x^{m-5}....).$

Cherchons les coëfficiens a_1, a_2 .... b_1, b_2 ....

En développant les expressions (89. et 90.), on trouve:

93.
$$\begin{aligned}\cos mx = \cos x^m(1 &+ m_2 + m_4 + m_6 + m_8 + m_{10}....)\\ -\cos x^{m-2}\ (&m_2 + 2_1 m_4 + 3_1 m_6 + 4_1 m_8 + 5_1 m_{10}....)\\ +\cos x^{m-4}\ (&\quad + m_4 + 3_2 m_6 + 4_2 m_8 + 5_2 m_{10}....)\\ -\cos x^{m-6}\ (&\quad\quad + m_6 + 4_3 m_8 + 5_3 m_{10}....)\\ +\cos x^{m-8}\ (&\quad\quad\quad m_8 + 5_4 m_{10}....)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

94.
$$\begin{aligned}\frac{\sin mx}{\sin x} = \cos x^{m-1}(m_1 &+ m_3 + m_5 + m_7 + m_9 + m_{11}....)\\ -\cos x^{m-3}(&\quad m_3 + 2_1 m_5 + 3_1 m_7 + 4_1 m_9 + 5_1 m_{11}....)\\ +\cos x^{m-5}(&\quad\quad m_5 + 3_2 m_7 + 4_2 m_9 + 5_2 m_{11}....)\\ -\cos x^{m-7}(&\quad\quad\quad m_7 + 4_3 m_9 + 5_3 m_{11}....)\\ +\cos x^{m-9}(&\quad\quad\quad\quad m_9 + 5_4 m_{11}....).\end{aligned}$$

Cela posé, soit z une variable quelconque, on a:

95.
$$\begin{cases}\frac{1}{2}\left((1+z^{\frac{1}{2}})^m+(1-z^{\frac{1}{2}})^m\right) = 1 + m_2 z + m_4 z^2 + m_6 z^3 .... \text{ et}\\ \frac{1}{2}\left(\frac{(1+z^{\frac{1}{2}})^m-(1-z^{\frac{1}{2}})^m}{z^{\frac{1}{2}}}\right) = m_1 + m_3 z + m_5 z^2 + m_7 z^3 ....\end{cases}$$

Si dans ces expressions on fait $z=1$, les séries à droite donnent les coëfficiens de $\cos x^m$ dans $\cos mx$ et de $\cos x^{m-1}$ dans $\frac{\sin mx}{\sin x}$ (93. et 94.), et il est aisé de voir que si l'on prend les différentielles du premier ordre et des ordres suivans des expressions (95.), qu'on y fait $z=1$, et qu'on les divise successivement par 1; 2; 3.2; 4.3.2 etc., elles donneront les coëfficiens de $\cos x^{m-2}$, $\cos x^{m-3}$ etc. de (93. et 94.). Mais on voit en même tems que

les différentielles des parties $(1-z^{\frac{1}{2}})^m$ et $\frac{(1-z^{\frac{1}{2}})^m}{z^{\frac{1}{2}}}$ des expressions (95.) conservent toujours la quantité $1-z^{\frac{1}{2}}$ comme facteur, et cette quantité est nulle pour $z=1$, tant que leur exposant est positif. Donc pour trouver les coëfficiens de (93. et 94.), il ne s'agit que des différentielles des premières parties $(1+z^{\frac{1}{2}})^m$ et $\frac{(1+z^{\frac{1}{2}})^m}{z^{\frac{1}{2}}}$ des expressions (95.). Soit $\frac{1}{2}(1+z^{\frac{1}{2}})^m=p$ et $\frac{(1+z^{\frac{1}{2}})^m}{2z^{\frac{1}{2}}}=q$, on a $\partial p=\frac{m(1+z^{\frac{1}{2}})^{m-1}}{2^2 z^{\frac{1}{2}}}$, et cela fait voir que ∂p donne q, si, après avoir divisé par m et multiplié par 2, on y met m au lieu de $m-1$. Donc aussi $\partial^2 p$, $\partial^3 p$, $\partial^4 p$ etc. donneront ∂q, $\partial^2 q$ .... sous la même condition, et il ne s'agit que des différentielles de p. Puisque $\partial p=\frac{m(1+z^{\frac{1}{2}})^{m-1}}{2^2 z^{\frac{1}{2}}}=\frac{mp}{2z^{\frac{1}{2}}(1+z^{\frac{1}{2}})}$, on a:

96.
I. $(2z^{\frac{1}{2}}+2z)\,\partial p = mp$, donc
$(z^{-\frac{1}{2}}+2)\partial p+(2z^{\frac{1}{2}}+2z)\partial^2 p=m\partial p$, ou bien
II. $(2z^{\frac{1}{2}}+2z)\,\partial^2 p=(m-2-z^{-\frac{1}{2}})\,\partial p$, et de là
$(z^{-\frac{1}{2}}+2)\partial^2 p+(2z^{\frac{1}{2}}+2z)\partial^3 p=\frac{1}{2}z^{-\frac{3}{2}}\partial p+(m-2-z^{-\frac{1}{2}})\partial^2 p$, ou bien
III. $(2z^{\frac{1}{2}}+2z)\,\partial^3 p=(m-4-2z^{-\frac{1}{2}})\,\partial^2 p+\frac{1}{2}z^{-\frac{3}{2}}\partial p$, et de là
$(z^{-\frac{1}{2}}+2)\partial^3 p+(2z^{\frac{1}{2}}+2z)\partial^4 p=z^{-\frac{3}{2}}\partial^2 p+(m-4-2z^{-\frac{1}{2}})\partial^3 p-\frac{3}{2.2}z^{-\frac{5}{2}}\partial p$
$+\frac{1}{2}z^{-\frac{3}{2}}\partial^2 p$, et de là
IV. $(2z^{\frac{1}{2}}+2z)\,\partial^4 p=(m-6-3z^{-\frac{1}{2}})\,\partial^3 p+\frac{3}{2}z^{-\frac{3}{2}}\partial^2 p-\frac{3}{2.2}z^{-\frac{5}{2}}\partial p$,
etc.

Si dans ces formules on fait $z=1$, elles donnent:

97.
I. $p=\frac{1}{2}z^m=2^{m-1}$,
II. $\partial p=\frac{m.2^{m-1}}{2.2}=m.2^{m-3}$,
$2^2\partial^2 p=(m-3)\,\partial p$, donc
III. $\partial^2 p=m.(m-3)2^{m-5}$,
$2^2\partial^3 p=(m-6)\,\partial^2 p+\frac{1}{2}\partial p=m(m-3)(m-6)2^{m-5}+m.2^{m-4}$
$=m(m-4)(m-5)2^{m-5}$, donc:
IV. $\partial^3 p=m(m-4)(m-5)2^{m-7}$,
$2^2\partial^4 p=(m-9)\,\partial^3 p+\frac{3}{2}\,\partial^2 p-\frac{3}{2.2}\partial p$
$=m(m-4)(m-5)(m-9)2^{m-7}+3m(m-3)2^{m-6}-3m2^{m-5}$,
V. $\partial^4 p=m(m-5)(m-6)(m-7)2^{m-9}$,
etc.

et de là on tire en vertu de la remarque ci-dessus, savoir: qu'après avoir divisé par m et multiplié par 2, il faut mettre m au lieu de $m-1$ dans

∂p, $\partial^2 p$ . . . .

$$98.\quad \begin{cases} \text{I.} & q = 2^{m-1}, \\ \text{II.} & \partial q = (m-2)2^{m-3}, \\ \text{III.} & \partial^2 q = (m-3)(m-4)2^{m-5}, \\ \text{IV.} & \partial^3 q = (m-4)(m-5)(m-6)\,2^{m-7}, \\ & \text{etc.} \end{cases}$$

En introduisant ces expressions dans (93. et 94.), on trouve

$$99.\quad 2\cos mx = (2\cos x)^m - m(2\cos x)^{m-2} + \frac{m(m-3)}{2}(2\cos x)^{m-4} - \frac{m(m-4)(m-5)}{2.3}(2\cos x)^{m-6} + \frac{m(m-5)(m-6)(m-7)}{2.3.4}(2\cos x)^{m-8} \ldots .$$

$$100.\quad \sin mx = \sin x\Big[(2\cos x)^{m-1} - (m-2)(2\cos x)^{m-3} + \frac{(m-3)(m-4)}{2}(2\cos x)^{m-5} - \frac{(m-4)(m-5)(m-6)}{2.3}(2\cos x)^{m-7} \ldots .\Big].$$

Voilà des expressions de $\cos mx$ et $\sin mx$ de la forme (91. et 92.), c'est à dire à puissances descendantes de $\cos x$. Mais il faut bien avoir attention que ces expressions n'ont pas lieu si m n'est un nombre entier. Car si m étoit une fraction ou irrationnel, la quantité $(1-z^2)^m$ dans (95.), en différentiant ces formules, entreroit dans le dénominateur, dès la n^{me} différentiation, si par exemple m est plus petit que n, donc si l'on y faisoit $z=1$, on auroit des valeurs infinies pour tous les coëfficiens, passé le $n-1^{\text{me}}$. Donc les séries (91. et 92.) sont divergentes toutes les fois que m n'est un nombre entier, c'est à dire, elles ne subsistent que dans ce dernier cas.

19.

D'ailleurs si l'on suppose que m soit un nombre entier, on peut trouver avec moins de peine les coëfficiens de (91. et 92.) de la manière suivante. D'abord les formules (74. et 75.) font voir que dans ce cas les expressions de $\cos mx$ et $\sin mx$ peuvent avoir effectivement la forme (91. et 92.) pour une valeur quelconque de x. Car si m est entier, une des deux parties du second facteur à droite dans les formules (74. et 75.) s'évanouit dans tous les cas et il ne reste que la seconde; donc en substituant les valeurs de P_1, P_2, Q_1, Q_2 (68. 69.), les formules prendront la forme:

$$101.\quad \begin{cases} \cos mx = \pm\cos x^m(1 - m_2\tan gx^2 + m_4\tan gx^4 \ldots .), \\ \sin mx = \pm\cos x^m(m_1\tan gx - m_3\tan gx^3 \ldots .), \end{cases}$$

ou celle-ci:

$$102.\quad \begin{cases} \cos mx = \pm \sin x^m (1 - m_2 \cot x^2 + m_4 \cot x^4 \ldots.), \\ \sin mx = \pm \sin x^m (m_1 \cot x - m_3 \cot x^3 \ldots.), \end{cases}$$

et cela fait voir que les expressions de $\cos mx$ et $\sin mx$ peuvent avoir toujours la forme (91. et 92.). Donc on peut supposer indifféremment, pour une valeur quelconque de x:

$$103.\quad \begin{cases} \cos mx = a_1 \cos x^m + a_2 \cos x^{m-2} + a_3 \cos x^{m-4} \ldots. \text{ et} \\ \sin mx = \sin x (b_1 \cos x^{m-1} + b_2 \cos x^{m-3} + b_3 \cos x^{m-5} \ldots.). \end{cases}$$

Cela posé, on trouve, en différentiant la première de ces formules:

$$104.\quad m \sin mx = m a_1 \cos x^{m-1} \sin x + (m-2) a_2 \cos x^{m-3} \sin x + (m-4) a_3 \cos x^{m-5} \sin x \ldots,$$

et en différentiant celle-ci:

$$\begin{aligned} 105.\quad m^2 \cos mx = {} & m a_1 \cos x^m + (m-2) a_2 \cos x^{m-2} + (m-4) a_3 \cos x^{m-4} \ldots. \\ & - m(m-1) a_1 \cos x^{m-2} \sin x^2 - (m-2)(m-3) a_2 \cos x^{m-4} \sin x^2 \\ & - (m-4)(m-5) a_3 \cos x^{m-6} \sin x^2 \ldots. \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} 106.\quad m^2 \cos mx = {} & (m + m(m-1)) a_1 \cos x^m \\ & + [(m-2 + (m-2)(m-3)) a_2 - m(m-1) a_1] \cos x^{m-2} \\ & + [(m-4 + (m-4)(m-5)) a_3 - (m-2)(m-3) a_2] \cos x^{m-4} \\ & + [(m-6 + (m-6)(m-7)) a_4 - (m-4)(m-5) a_3] \cos x^{m-6} \\ & \cdots\cdots\cdots\

Les coëfficiens de $\cos x^m$, $\cos x^{m-2}$ etc. dans les deux équations (106. et 107.) étant égaux, on trouve

$$108. \quad \begin{cases} m^2 a_1 = m^2 a_1, \\ (m-2)^2 a_2 - m(m-1) a_1 = m^2 a_2, \\ (m-4)^2 a_3 - (m-2)(m-3) a_2 = m^2 a_3, \\ (m-6)^2 a_4 - (m-4)(m-5) a_3 = m^2 a_4, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Ces équations donnent:

$$109. \quad \begin{cases} a_2 = -\frac{m}{4} a_1, \\ a_3 = -\frac{m-3}{8} a_2 = +\frac{m(m-3)}{2^5} a_1, \\ a_4 = -\frac{(m-4)(m-5)}{12(m-3)} a_3 = -\frac{m(m-4)(m-5)}{2^7 . 3} a_1, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Le premier coëfficient a_1 reste indéterminé, mais on le tire immédiatement de $\cos mx$ exprimé sous la forme (89.). Il est $1 + m_2 + m_4 + m_6 \ldots$. et cette quantité est comme on sait, $= 2^{m-1}$ (97. I.). Donc on a

$$110. \quad 2\cos mx = (2\cos x)^m - m(2\cos x)^{m-2} + \frac{m(m-3)}{2}(2\cos x)^{m-4} - \frac{m(m-4)(m-5)}{2.3}(2\cos x)^{m-6} \ldots,$$

et l'équation (104.) donne:

$$111. \quad \sin mx = \sin x \left[(2\cos x)^{m-1} - (m-2)(2\cos x)^{m-3} + \frac{(m-3)(m-4)}{2}(2\cos x)^{m-5} - \frac{(m-4)(m-5)(m-6)}{2.3}(2\cos x)^{m-7} \ldots \right].$$

Ces expressions s'accordent avec celles (103. et 104.) ci-dessus, et elles ont lieu pour tout m entier positif et pour un x quelconque.

20.

Les équations fondamentales (101. et 102.) donnent aussi sur le champ les expressions connues de $\cos mx$ et $\sin mx$ de la forme

$$112. \quad \begin{cases} \cos mx = a_1 \cos x^m + a_2 \cos x^{m-2} \sin x^2 + a_3 \cos x^{m-4} \sin x^4 \ldots. \\ \sin mx = (b_1 \cos x^{m-1} + b_2 \cos x^{m-3} \sin x^2 + b_3 \cos x^{m-5} \sin x^4 \ldots.) \sin x. \end{cases}$$

Nous ne nous y arrêterons pas.

21.

On peut aussi chercher des expressions de la forme:

$$113. \quad \begin{cases} \cos mx = (\alpha_1 \sin x^{m-1} + \alpha_2 \sin x^{m-2} \cos x^2 \ldots.) \cos x, \text{ et} \\ \sin mx = \beta_1 \sin x^m + \beta_2 \sin x^{m-2} \cos x^2 \ldots. \end{cases}$$

ou

114. $$\begin{cases}\cos mx = \alpha_1 \sin x^m + \alpha_1 \sin x^{m-2}\cos x^2 + \alpha_3 \sin x^{m-4}\cos x^4 \ldots . \\ \sin mx = (\beta_1 \sin x^{m-1} + \beta_2 \sin x^{m-3}\cos x^2 + \beta_3 \sin x^{m-5}\cos x^4 \ldots .)\cos x.\end{cases}$$

Mais les expressions (113.), de même que celles (112., 110. et 111.), ne subsistent que pour un m entier positif. Car les valeurs de x, pour lesquelles les expressions générales (74. et 75.) pourroient prendre cette forme à cause des facteurs $|\cos x|^m$ et $|\sin x|^m$, sont compris entre $\pm(2\dot{\tau}\pm\frac{1}{4})\pi$ et $\pm(2\dot{\tau}\pm\frac{3}{4})\pi$ et entre $\pm(2\dot{\tau}\pm\frac{5}{4})\pi$ et $\pm(2\dot{\tau}\pm\frac{7}{4})\pi$, et de toutes ces valeurs de x aucune n'a zéro pour sinus.

22.

Généralement les expressions (74. et 75. I. III. V.) et (74. II. IV.) ont respectivement les formes:

115. $$\begin{Bmatrix}\cos mx \\ \sin mx\end{Bmatrix} = \cos x^m \left[p_1\left(1 - m_2 \frac{\sin x^2}{\cos x^2} + m_2 \frac{\sin x^4}{\cos x^4} \ldots .\right) + q_1\left(m_1 \frac{\sin x}{\cos x} - m_3 \frac{\sin x^3}{\cos x^3} \ldots .\right)\right] \text{ et}$$

116. $$\begin{Bmatrix}\cos mx \\ \sin mx\end{Bmatrix} = \sin x^m \left[p_2\left(1 - m_2 \frac{\cos x^2}{\sin x^2} + m_4 \frac{\cos x^4}{\sin x^4} \ldots .\right) + q_2\left(m_1 \frac{\cos x}{\sin x} - m_3 \frac{\cos x^3}{\sin x^3} \ldots .\right)\right].$$

Mais $\cos x^m$, quel que soit m, peut être développé suivant les puissances ascendantes des sinus, et $\sin x^m$ suivant celles des cosinus. Donc $\cos mx$ et $\sin mx$ peuvent prendre la forme d'une série qui va en croissant suivant les puissances, respectivement de $\sin x$ et de $\cos x$, c'est à dire on peut supposer pour un m quelconque

117. $$\begin{cases}\cos mx = a_0 + a_1 \sin x + a_2 \sin x^2 + a_3 \sin x^3 + \ldots . \\ \sin mx = b_0 + b_1 \sin x + b_2 \sin x^2 + b_3 \sin x^3 + \ldots .\end{cases}$$

dans les cas (74. et 75. I. III. et V.) et

118. $$\begin{cases}\cos mx = \alpha_0 + \alpha_1 \cos x + \alpha_2 \cos x^2 + \alpha_3 \cos x^3 \ldots . \\ \sin mx = \beta_0 + \beta_1 \cos x + \beta_2 \cos x^2 + \beta_3 \cos x^3 \ldots .\end{cases}$$

dans les cas (74. et 75. II. et IV.), et il s'agit de trouver les valeurs de coëfficiens indéterminés de ces séries.

En différentiant la première des séries (117.), on a:

119. $$-m.\sin mx = a_1 \cos x + 2a_2 \sin x \cos x + 3a_3 \sin x^2 \cos x + 4a_4 \sin x^3 \cos x \ldots .$$

et en différentiant de nouveau, on trouve:

$$-m^2 \cos mx = -a_1 \sin x - 2a_2 \sin x^2 - 3a_3 \sin x^3 - 4a_4 \sin x^4 - 5a_5 \sin x^5 \ldots .$$
$$+ 2a_2 \cos x^2 + 3.2.a_3 \sin x \cos x^2 + 4.3.a_4 \sin x^2 \cos x^2 + 5.4.a_5 \sin x^3 \cos x^2 \ldots .$$

ou bien:

120. $$m^2\cos mx = a_1\sin x + 2a_2\sin x^2 + 3a_3\sin x^3 + 4a_4\sin x^4 \ldots.$$
$$+ 2a_2\sin x^2 + 3.2.a_3\sin x^3 + 4.3.a_4\sin x^4 \ldots.$$
$$-2a_2 - 3.2.a_3\sin x - 4.3.a_4\sin x^2 - 5.4.a_5\sin x^3 - 6.5.a_6\sin x^4 \ldots.$$

En égalant cette expression à celle

121. $$m^2\cos mx = m^2a_0 + m^2a_1\sin x + m^2a_2\sin x^2 + m^2a_3\sin x^3 + m^2a_4\sin x^4 \ldots.$$

que fournit la première des équations (117.), on trouve:

122.
$$\begin{cases} m^2a_0 = -2a_2, & \text{donc } a_2 = -\frac{m^2}{2}a_0, \\ m^2a_1 = a_1 - 3.2.a_3, & \text{donc } a_3 = -\frac{m^2-1}{2.3}a_1, \\ m^2a_2 = 4a_2 - 4.3.a_4, & \text{donc } a_4 = -\frac{m^2-4}{3.4}a_2 = +\frac{m^2(m^2-4)}{2.3.4}a_0, \\ m^2a_3 = 9a_3 - 5.4.a_5, & \text{donc } a_5 = -\frac{m^2-9}{4.5}a_3 = +\frac{(m^2-1)(m^2-9)}{2.3.4.5}a_1 \\ m^2a_4 = 16a_4 - 6.5.a_6, & \text{donc } a_6 = -\frac{m^2-16}{5.6}a_4 = -\frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)}{2.3.4.5.6}a_0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

ou la loi de la formation des coëfficiens est facile à saisir. Les deux premiers coëfficiens a_0 et a_1, qu'on n'a pas trouvés, peuvent être tirés des équations (117. 119.). En effet $\sin x$ est zéro pour $x = \pm\dot{\tau}\pi$, et x peut avoir cette valeur dans les cas (74. et 75. I. III. V.) pour lesquels les suppositions (117.) ont été faites. Donc en supposant $x = \pm\dot{\tau}\pi$, la première équation (117.) et celle (119.) donnent:

123.
$$\begin{cases} a_0 = \cos m\dot{\tau}\pi, \\ a_1 = -m.\frac{\sin m\dot{\tau}\pi}{\cos\dot{\tau}\pi} = \pm m\sin m\dot{\tau}\pi, \end{cases}$$

selon que $\dot{\tau}$ est impair ou pair.

En introduisant les valeurs trouvées des coëfficiens dans (117. et 119.), on a:

124. $$\cos mx =$$
$$\cos m\dot{\tau}\pi\left(1 - \frac{m^2}{2}\sin x^2 + \frac{m^2(m^2-4)}{2.3.4}\sin x^4 - \frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)}{2.3.4.5.6}\sin x^6 \ldots,\right)$$
$$\pm\sin m\dot{\tau}\pi\left(\sin x - \frac{m^2-1}{2.3}\sin x^3 + \frac{(m^2-1)(m^2-9)}{2.3.4.5}\sin x^5 \ldots.\right),$$

125. $$\sin mx =$$
$$\cos m\dot{\tau}\pi\left(m^2\sin x - \frac{m^2(m^2-4)}{2.3}\sin x^3 + \frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)}{2.3.4}\sin x^5 \ldots.\right)\cos x$$
$$\pm\sin m\dot{\tau}\pi\left(1 - \frac{m^2-1}{2}\sin x^2 + \frac{(m^2-1)(m^2-9)}{2.3.4}\sin x^4 \ldots.\right)\cos x.$$

Ces formules ont lieu pour les arcs compris entre $\pm(\dot{\tau}-\frac{1}{4})\pi$ et $(\dot{\tau}+\frac{1}{4})\pi$. Il reste à chercher les valeurs des coëfficiens α_0, α_1, α_2, ... β^0, β_1, β_1 .... des équations (118.). Si l'on y écrit $\frac{1}{2}\pi \pm x$, la forme des équations (118.) rentre dans celle des expressions (117.); donc les équations qui donnent ces coëfficiens coïncideront avec celles (122.). Seulement les valeurs des deux premiers coëfficiens α_0 et α_1 différeront de a_0 et a_1. Elles seront:

$$126. \quad \begin{cases} \alpha_0 = \cos m(\dot{\tau} \pm \frac{1}{2})\pi \text{ et} \\ \alpha_1 = m \pm m \sin m(\dot{\tau} \pm \frac{1}{2})\pi, \end{cases}$$

donc on aura:

$$127. \quad \cos mx =$$
$$\cos m(\dot{\tau} \pm \tfrac{1}{2})\pi \left(1 - \frac{m^2}{2}\cos x^2 + \frac{m^2(m^2-4)}{2.3.4}\cos x^4 - \frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)}{2.3.4.5.6}\cos x^6 \ldots.\right)$$
$$\pm \sin m(\dot{\tau} \pm \tfrac{1}{2})\pi \left(\cos x - \frac{m^2-1}{2.3}\cos x^3 + \frac{(m^2-1)(m^2-9)}{2.3.4.5}\cos^5 \ldots.\right),$$

$$128. \quad \sin mx =$$
$$\cos m(\dot{\tau} \pm \tfrac{1}{2})\pi \left(m^2 \cos x - \frac{m^2(m^2-4)}{2.3}\cos x^3 + \frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)}{2.3.4}\cos x^5 \ldots.\right)\cos x$$
$$\mp \sin m(\dot{\tau} \pm \tfrac{1}{2})\pi \left(1 - \frac{m^2-1}{2}\cos x^2 + \frac{(m^2-1)(m^2-9)}{2.3.4}\cos x^4 \ldots.\right)\cos x$$

Ces formules conviendront aux cas ou l'arc x est compris entre $\pm(\dot{\tau}+\frac{1}{4})\pi$ et $\pm(\dot{\tau}+\frac{3}{4})\pi$ et entre $\pm(\dot{\tau}+\frac{5}{4})\pi$ et $\pm(\dot{\tau}+\frac{7}{4})\pi$.

Voilà un tableau à peu près complet des points essentiels du développement des puissances des cosinus et sinus des arcs simples en cosinus et sinus des arcs multiples, et des expressions réciproques. Les résultats qu'on vient de trouver diffèrent comme on voit essentiellement de ceux auxquels on parvient ordinairement. Néanmoins ils ne semblent pas être défectueux. Les développemens des fonctions angulaires sont de ces parties de l'analyse qui appartiennent aux élémens, et il semble être de toute nécessité et de la plus grande importance de poser inébranlablement les principes et les théorèmes surtout dans les élémens, et de les éclaircir parfaitement; car on ne peut pas aller en avant avec sûreté sans avoir bien posé le fondemens. Donc il seroit beaucoup à désirer, que les géomètres éclairés, et surtout ceux qui autrefois ce sont occupés des problèmes que nous venons de traiter, voulussent bien accorder leur attention aux remarques ci-dessus et faire connoître leurs objections, s'il y en a.

Berlin le 15. Septembre 1829.

16.
Aufgabe.

Bekanntlich läfst sich, wenn fx eine beliebige Function der veränderlichen Gröfse x bezeichnet, und x und $x+a$ zwei um a von einander verschiedene Werthe von x sind, $f(x+a)$ durch folgende Reihe ausdrücken.

$$f(x+a) = fx + \frac{a}{\varepsilon}\Delta fx + \frac{a(a-\varepsilon)}{2\varepsilon^2}\Delta^2 fx + \frac{a(a-\varepsilon)(a-2\varepsilon)}{2.3.\varepsilon^3}\Delta^3 fx \ldots.$$

$$\ldots. + \frac{a(a-\varepsilon)(a-2\varepsilon)\ldots.(a-(n-1)\varepsilon)}{2.3\ldots.n.\varepsilon^n}\Delta^n fx \ldots.,$$

wo ε willkürlich ist, und Δfx, $\Delta^2 fx$ etc. die Differenzen von fx nach ε von den verschiedenen Ordnungen bedeuten, nemlich so, dafs $\Delta fx = f(x+\varepsilon)-fx$, $\Delta^2 fx = f(x+2\varepsilon)-2f(x+\varepsilon)+fx$ etc. ist.

Nun läfst sich aber auch die nemliche Gröfse $f(x+a)$ auf folgende andere Weise ausdrücken:

$$f(x+a) = fx + a.\frac{\partial fx}{\partial x} + \frac{a^2}{2}.\frac{\partial^2 fx}{\partial x^2} + \frac{a^3}{2.3}.\frac{\partial^3 fx}{\partial x^3}\ldots. + \frac{a^n}{2.3\ldots.n}.\frac{\partial^n fx}{\partial x^n}\ldots.,$$

wo $\frac{\partial fx}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 fx}{\partial x^2}$ .... die Differentiale von fx von den verschiedenen Ordnungen sind.

Da nun die Differentiale $\frac{\partial fx}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 fx}{\partial x^2}$ .... nichts Anderes sind, als $\frac{\Delta fx}{\varepsilon}$, $\frac{\Delta^2 fx}{\varepsilon^2}$ .... für ε gleich Null, so müfste die erste Reihe in die zweite übergehen, wenn man darin $\varepsilon = 0$ setzt. Man sieht aber nicht, auf welche Weise nothwendig $a(a-\varepsilon)(a-2\varepsilon)\ldots.(a-(n-1)\varepsilon)$ gleich a^n ist für $n=\infty$; denn wenn man z. B. das willkürliche ε gleich $\frac{a}{n-1}$ setzt, was auch Null ist für $n=\infty$, so ist der letzte Factor in $a(a-\varepsilon)(a-2\varepsilon)\ldots.(a-(n-1)\varepsilon)$ nicht a, sondern Null, und das Product kann also nicht a^n sein, so dafs es scheint, es müsse aufser der Bedingung $\varepsilon = 0$ noch eine andere Bedingung für diese Gröfse erfüllt werden, damit die Differenzen von fx in die Differentiale übergehen.

Die Aufgabe wäre, diesen Umstand zu erläutern und auf eine befriedigende Weise zu zeigen, wie die zweite Reihe aus der ersten in aller Strenge hergeleitet werden könne. Diese Nachweisung ist zu wünschen, weil die obigen Reihen die Grund-Formeln eines grofsen Theiles der Analysis sind.

17.

Du mouvement d'un corps sur un plan fixe, quand on a égard à la résistance du frottement, et qu'on ne suppose qu'un seul point de contact.

(Par Mr. *A. A. Cournot*, Dr. ès sciences à Paris.)

(Suite du mémoire No. 9. cah. precéd.)

---

1. Désignons, comme dans le N°. 1. du Mémoire N°. 9. cah. précéd., par M la masse du corps, et par A, B, C, ses moments d'inertie relatifs aux axes des x', y', z'; par ξ, η, ζ les coordonnées suivant les mêmes axes du point de contact entre le corps et le plan fixe; par α, β, γ les coordonnées du centre de gravité rapportées aux axes des x, y, z, fixes dans l'espace, le plan fixe étant pris pour celui des xy; par p, q, r les composantes du mouvement de rotation suivant les axes principaux des x' y', z'; par X, Y, Z, les composantes suivant les axes des x, y, z de la résultante des forces continues qui sollicitent le corps; par L', M', N' les sommes des moments de ces forces, estimés relativement aux axes des x', y', z'; par R la résistance du plan fixe, ou la pression qu'il supporte au point de contact. Désignons en outre par f la résistance due au frottement, qui s'exerce en sens contraire de la vitesse du point de contact; et par f_1, f_2, les composantes de cette résistance suivant les axes des x, y. Faisons enfin

$$\begin{aligned} a &= \cos zx', \quad b = \cos zy' \quad c = \cos zz', \\ a_1 &= \cos xx', \quad b_1 = \cos xy', \quad c_1 = \cos xz', \\ a_2 &= \cos yx', \quad b_2 = \cos yy', \quad c_2 = \cos yz' \end{aligned}$$

On aura, pour les six équations du mouvement:

$$1. \quad M\frac{d^2\alpha}{dt^2} = X + f_1, \quad M\frac{d^2\beta}{dt^2} = Y + f_2, \quad M\frac{d^2\gamma}{dt^2} = Z + R;$$

$$2. \quad \begin{cases} A\frac{dp}{dt} + (C-B)qr = L' + \eta(Rc + f_1c_1 + f_2c_2) - \zeta(Rb + f_1b_1 + f_2b_2), \\ B\frac{dq}{dt} + (A-C)pr = M' + \zeta(Ra + f_1a_1 + f_2a_2) - \xi(Rc + f_1c_1 + f_2c_2), \\ C\frac{dr}{dt} + (B-A)pq = N' + \xi(Rb + f_1b_1 + f_2b_2) - \eta(Ra + f_1a_1 + f_2a_2). \end{cases}$$

Les quantités $p, q, r; a, b, c; a_1$, etc. pouvant s'exprimer en fonction de trois angles θ, φ, ψ, ainsi qu'on le trouve expliqué dans les traités de mécanique, ces six équations ne renferment implicitement que neuf inconnues $\alpha, \beta, \gamma; \theta, \varphi, \psi; R, f_1, f_2$, dont il faudrait obtenir la valeur en fonction du temps t. Mais d'abord, au moyen de ce que la vitesse du point (ξ, η, ζ) suivant les z, doit être détruite par la résistance du plan, on aura (1er mém. N°. 7.):

$$\frac{d\gamma}{dt} + \xi(rb - qc) + \eta(pc - ra) + \zeta(qa - pb) = 0;$$

et comme la variation infiniment petite de cette vitesse, due à l'action des forces continues pendant l'instant dt, doit pareillement être détruite, on aura, en différentiant l'équation précédente:

$$3.\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2\gamma}{dt^2} + \frac{dp}{dt}(\eta c - \zeta b) + \frac{dq}{dt}(\zeta a - \xi c) + \frac{dr}{dt}(\xi b - \eta a) \\ &= -\left\{p\frac{d(\eta c - \zeta b)}{dt} + q\frac{d(\zeta a - \xi c)}{dt} + r\frac{d(\xi b - \eta a)}{dt}\right\}. \end{aligned}\right.$$

Maintenant deux cas se présentent, selon que la résistance due au frottement, sera ou ne sera pas suffisante pour anéantir la vitesse du point (ξ, η, ζ) parallèlement au plan fixe. Dans le premier cas il est clair qu'on aura, relativement aux axes des x, y, des équations analogues à celles que nous venons d'obtenir relativement à l'axe des z, c'est-à-dire:

$$4.\quad \begin{cases} \frac{d\alpha}{dt} + \xi(rb_1 - qc_1) + \eta(pc_1 - ra_1) + \xi(qa_1 - pb_1) = 0, \\ \frac{d\beta}{dt} + \xi(rb_2 - qc_2) + \eta(pc_2 - ra_2) + \xi(qa_2 - pb_2) = 0; \end{cases}$$

et par suite

$$5.\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{dp}{dt}(\eta c_1 - \zeta b_1) + \frac{dq}{dt}(\zeta a_1 - \xi c_1) + \frac{dr}{dt}(\xi b_1 - \eta a_1) \\ &= -\left\{p\frac{d(\eta c_1 - \zeta b_1)}{dt} + q\frac{d(\zeta a_1 - \xi c_1)}{dt} + r\frac{d(\xi b_1 - \eta a_1)}{dt}\right\}, \\ &\frac{d^2\beta}{dt^2} + \frac{dp}{dt}(\eta c_2 - \zeta b_2) + \frac{dq}{dt}(\zeta a_2 - \xi c_2) + \frac{dr}{dt}(\xi b_2 - \eta a_2) \\ &= -\left\{p\frac{d(\eta c_2 - \zeta b_2)}{dt} + q\frac{d(\zeta a_2 - \xi c_2)}{dt} + r\frac{d(\xi b_2 - \eta a_2)}{dt}\right\}. \end{aligned}\right.$$

Dès lors on conçoit, abstraction faite des difficultés de l'intégration, que les neuf équations (1., 2., 3. et 5.) suffisent pour déterminer complètement les neuf inconnues du problème, c'est-à-dire pour assigner

en chaque instant la position du corps, l'intensité de la pression et celle du frottement, ainsi que la tangente de l'angle que fait avec les x la droite suivant laquelle le frottement exerce son action: ces deux dernières quantités étant respectivement égales à $\sqrt{(f_1^2+f_2^2)}$ et $\frac{f_2}{f_1}$. Il faudra que la valeur de la pression soit positive, sans quoi le plan fixe cesserait de gêner le mouvement du corps au point (ξ, η, ζ), et ce point se détacherait. De même aussi, d'après la manière dont nous concevons le mode d'action du frottement, il faudra que celui qui a lieu en pareil cas, et qui suffit pour anéantir la vitesse du point de contact, soit moindre que celui qui aurait lieu, si ce point prenait un mouvement, et surmontait la résistance que le frottement lui oppose. On devra donc avoir

$$f_1^2+f_2^2<h^2,$$

h étant une quantité déterminée par l'observation et par la théorie physique du frottement, ainsi que nous allons l'expliquer.

Si le frottement ne suffit pas pour anéantir la vitesse du point de contact, les équations (4. et 5.) ne subsisteront plus, mais en revanche on aura

$$6.\quad f_1^2+f_2^2=h^2;$$

et comme alors le frottement ne peut s'exercer qu'en sens contraire de la vitesse du point (ξ, η, ζ), estimée parallèlement au plan fixe, il viendra

$$7.\quad \frac{f_1}{f_2}=\frac{\frac{d\alpha}{dt}+\xi(rb_1-qc_1)+\eta(pc_1-ra_1)+\zeta(qa_1-pb_1)}{\frac{d\beta}{dt}+\xi(rb_2-qc_2)+\eta(pc_2-ra_2)+\zeta(qa_2-pb_2)},$$

d'où, en faisant pour abréger:

$$\frac{d\alpha}{dt}+\xi(rb_1-qc_1)+\eta(pc_1-ra_1)+\zeta(qa_1-pb_1)=I,$$

$$\frac{d\beta}{dt}+\xi(rb_2-qc_2)+\eta(pc_2-ra_2)+\zeta(qa_2-pb_2)=J,$$

on tire

$$f_1=-\frac{hI}{\sqrt{(I^2+J^2)}},\quad f_2=-\frac{hJ}{\sqrt{(I^2+J^2)}}.$$

h et le radical $\sqrt{(I^2+J^2)}$ doivent être considérés comme des quantités essentiellement positives, afin que f_1, f_2 soient toujours respectivement de signes contraires à I et J. D'ailleurs la pression R ne doit pas cesser d'être positive.

2. D'après ce qui a été expliqué dans le mémoire précédent (N°. 5.), les formules qu'on vient d'écrire subsistent de même, soit que les coor-

données ξ, η, ζ aient des valeurs constantes ou variables; en autres termes: soit que le contact du corps avec le plan ait lieu par une pointe vive, ou par un point d'une surface continue. Dans le premier cas, et lorsque d'ailleurs la résistance du frottement n'est pas surmontée, il serait plus avantageux d'intégrer d'abord les formules par lesquelles on détermine d'ordinaire le mouvement d'un corps autour d'un point fixe, qui serait ici le point (ξ, η, ζ). Quand on aurait obtenu de cette manière les valeurs de α, β, γ en fonction de t, celles de f_1, f_2, R seraient données immédiatement par les équations (1.).

Si la surface du corps est continue, et que le contact ait lieu successivement par une suite de points de cette surface, les coordonnées variables ξ, η, ζ, seront déterminées 1° par l'équation de la surface; 2° par deux autres équations qui expriment que le plan tangent à cette surface, au point (ξ, η, ζ), se confond avec celui des xy. Lorsqu'en outre la résistance du frottement n'est par surmontée, ou que la vitesse du point de contact demeure nulle, on dit que le corps roule parfaitement, ou sans glisser; et au contraire il roule avec glissement, quand la vitesse du point de contact ne s'évanouit pas.

A la rigueur, on ne peut pas réaliser physiquement l'hypothèse d'une pointe parfaitement vive; et même il ne paraît pas qu'on ait déterminé par des expériences un peu précises, la nature du frottement des corps qui glissent en s'appuyant sur des aspérités anguleuses. On n'a étudié avec quelque soin que le frottement des corps qui glissent en s'appuyant sur une face plane, ce qu'on nomme le frottement de la première espèce; et encore en supposant que le corps se meut parallèlement à lui même, sans éprouver de rotation autour d'une droite perpendiculaire au plan fixe. En conséquence on pose sur un plan uniformément poli, un corps tel qu'un prisme ou un cylindre droit, construit et situé de manière à ce que le plan vertical, mené par le centre de gravité du corps perpendiculairement au plan de support, divise le corps en deux parties symétriques; puis l'on fait croître graduellement l'inclinaison du plan, jusqu'à ce que la résistanee du frottement soit vaincue par l'effort de la pesanteur, et que le corps commence à glisser. Il est clair qu'en cet instant l'énergie du frottement sera égale au poids du corps, multiplié par le sinus de l'angle que le plan fait avec l'horizon. On a été conduit ainsi à admettre que l'intensité du frottement surmonté, ou

la quantité désignée par h dans le N°. précédent était sensiblement indépendante de l'étendue des surfaces frottantes et de la vitesse du mobile; qu'on pouvait la supposer proportionnelle à la pression, et la représenter par εR; ε étant un nombre donné par l'observation, qui dans beaucoup de cas diffère peu de la fraction $\frac{1}{3}$, et qui paraît dépendre du degré de poli des surfaces frottantes, de leur contexture physique, peut-être aussi de leur nature chimique et de la durée du contact. On peut consulter à ce sujet le *Cours de Mathématiques* de Bezout, à l'usage de l'Artillerie, T. IV., N°. 734., et le *Précis élémentaire de Physique* de M. Biot, T. I., livre II., chap. 23.

Le frottement dit de la seconde espèce, c'est-à-dire celui des corps qui roulent en glissant, est encore moins bien connu; on admet par analogie que son intensité h peut aussi être représentée par une fonction de la forme εR, ε ayant, toutes circonstances égales d'ailleurs, une valeur moindre que pour le frottement de la première espèce. Au reste notre objet, dans cet article, n'est point d'exposer de nouvelles recherches sur la cause et la nature physique du frottement, mais de déduire les conséquences mathématiques des hypothèses communément admises. Pour étudier ces consequences, il faut encore ici, et à plus forte raison, recourir à des considérations indirectes, telles que celles que nous avons employées dans le mémoire précédent: car les équations du N°. 1. sont rebelles à toute intégration, hormis dans un si petit nombre de cas, qu'on ne pourrait se borner à les considérer, sans courir le risque de trop particulariser la question.

3. Examinons d'abord ce qui arrive à l'origine du mouvement, quand le corps, posé sur le plan fixe, est tiré de l'état de repos par l'action des forces continues X, Y, Z. Dans ce premier instant, les valeurs de p, q, r sont nulles; celles de a, b, c, a_1, etc. sont censées connues; les équations (2., 3. et 5.) se réduisent à

$$8.\quad \begin{cases} A\frac{dp}{dt} = L' + \eta(Rc + f_1 c_1 + f_2 c_2) - \zeta(Rb + f_1 b_1 + f_2 b_2), \\ B\frac{dq}{dt} = M' + \zeta(Ra + f_1 a_1 + f_2 a_2) - \xi(Rc + f_1 c_1 + f_2 c_2), \\ C\frac{dr}{dt} = N' + \xi(Rb + f_1 b_1 + f_2 b_2) - \eta(Ra + f_1 a_1 + f_2 a_2); \end{cases}$$

$$9.\quad \frac{d^2\gamma}{dt^2} + \frac{dp}{dt}(\eta c - \zeta b) + \frac{dq}{dt}(\zeta a - \xi c) + \frac{dr}{dt}(\xi b - \eta a) = 0,$$

$$10.\quad \begin{cases} \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{dp}{dt}(\eta c_1 - \zeta b_1) + \frac{dq}{dt}(\zeta a_1 - \xi c_1) + \frac{dr}{dt}(\xi b_1 - \eta a_1) = 0, \\ \frac{d^2\beta}{dt^2} + \frac{dp}{dt}(\eta c_2 - \zeta b_2) + \frac{dq}{dt}(\zeta a_2 - \xi c_2) + \frac{dr}{dt}(\xi b_2 - \eta a_2) = 0, \end{cases}$$

Si le frottement détruit la vitesse du point (ξ, η, ζ), les neuf équations (1., 8., 9. et 10.) détermineront les valeurs des neuf inconnues

$$11.\quad \frac{d^2\alpha}{dt^2},\ \frac{d^2\beta}{dt^2},\ \frac{d^2\gamma}{dt^2};\ \frac{dp}{dt},\ \frac{dq}{dt},\ \frac{dr}{dt};\ R,\ f_1,\ f_2,$$

relatives au premier instant du mouvement; et il faudra que ces valeurs satisfassent aux deux inégalités

$$12.\quad R > 0,\quad f_1^2 + f_2^2 < \varepsilon^2 R^2.$$

Si au contraire le frottement est surmonté, les équations (10.) ne subsisteront plus; on aura en leur place les équations (6. et 7.), dont la première devient, au moyen de la valeur adoptée pour h^2:

$$f_1^2 + f_2^2 = \varepsilon^2 R^2.$$

A l'égard de la seconde, son second membre prend dans ce cas la forme $\frac{0}{0}$, attendu que les quantités $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\beta}{dt}$, p, q, r s'évanouissent; mais en différentiant les numérateur et dénominateur de ce second membre par rapport à t, et faisant:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{dp}{dt}(\eta c_1 - \zeta b_1) + \frac{dq}{dt}(\zeta a_1 - \xi c_1) + \frac{dr}{dt}(\xi b_1 - \eta a_1) = I',$$

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} + \frac{dp}{dt}(\eta c_2 - \zeta b_2) + \frac{dq}{dt}(\zeta a_2 - \xi c_2) + \frac{dr}{dt}(\xi b_2 - \eta a_2) = J',$$

on a

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{I'}{J'},$$

d'où

$$13.\quad f_1 = -\frac{\varepsilon R I'}{\sqrt{(I'^2 + J'^2)}},\quad f_2 = -\frac{\varepsilon R J'}{\sqrt{(I'^2 + J'^2)}}.$$

Le nombre des équations nécessaires pour la détermination de toutes les inconnues, se trouvera ainsi complété; et quand on en aura déduit leurs valeurs, il n'y aura plus qu'à vérifier l'inégalité $R > 0$.

Avant d'aller plus loin, nous insisterons sur une remarque essentielle pour ce qui doit suivre. Admettons que le corps ne parte point de l'état de repos, mais qu'à l'origine du mouvement il subisse une percussion de la part d'un corps étranger, ou qu'il vienne choquer le plan fixe avec une vitesse connue: l'effet de cette impulsion ou de ce choc se produira dans un intervalle de temps inappréciable, durant lequel on

pourra négliger l'action des forces continues analogues à la pesanteur. Cet effet équivaudra à celui d'un certain système de forces, dont on peut assigner la résultante et le couple résultant, et qui agiraient sur le corps, aussi dans un intervalle de temps inappréciable: pour la commodité du langage, nous les désignerons sous le nom de forces instantanées. Désignons aussi par X_0, Y_0, Z_0, les projections de la résultante de ces forces, parallèlement aux axes des x, y, z; et par L'_0, M'_0, N'_0, les sommes de leurs moments relativement aux axes des x', y', z'. Les valeurs initiales des quantités

$$\frac{d\alpha}{dt},\ \frac{d\beta}{dt},\ \frac{d\gamma}{dt};\ p,\ q,\ r$$

ne seront plus nulles; et il faudra assigner ces valeurs pour déterminer celles des constantes arbitraires qui entreraient dans les équations du mouvement, après la première intégration. Pour cela il faut tenir compte de la résistance que le plan offre au point (ξ, η, ζ) dans le sens des z positives, résistance qui est la somme des pressions exercées pendant la durée inappréciable de l'action des forces instantanées: cette somme de pressions sera ce que l'on appèle d'ordinaire une percussion, et nous la désignerons par P. De même le frottement total, correspondant à la percussion P, sera la somme des frottements qui correspondent à chacune des pressions dont P se compose. Nous représenterons par F sa valeur numérique, par F_1, F_2, ses projections sur les axes des x, y; par H la valeur de F, quand le point (ξ, η, ζ) surmonte la résistance que le frottement lui oppose; et enfin nous admettrons que H est de la forme εP, ce qui résulte, si non d'expériences précises, au moins de l'analogie.

Cela posé, en vertu des principes connus de dynamique, les valeurs initiales des quantités

$$14.\quad \frac{d\alpha}{dt},\ \frac{d\beta}{dt},\ \frac{d\gamma}{dt};\ p,\ q,\ r;\ P,\ F_1,\ F_2,$$

seront données par les équations suivantes:

$$15.\quad M\frac{d\alpha}{dt} = X_0 + F_1,\quad M\frac{d\beta}{dt} = Y_0 + F_2,\quad M\frac{d\gamma}{dt} = Z_0 + P;$$

$$16.\quad \begin{cases} Ap = L'_0 + \eta(Pc + F_1c_1 + F_2c_2) - \zeta(Pb + F_1b_1 + F_2b_2), \\ Bq = M'_0 + \zeta(Pa + F_1a_1 + F_2a_2) - \xi(Pc + F_1c_1 + F_2c_2), \\ Cr = N'_0 + \xi(Pb + F_1b_1 + F_2b_2) - \eta(Pa + F_1a_1 + F_2a_2); \end{cases}$$

$$17.\quad \frac{d\gamma}{dt} + p(\eta c - \zeta b) + q(\zeta a - \xi c) + r(\xi b - \eta a) = 0;$$

auxquelles il faudra joindre, quand le frottement détruit la vitesse du point de contact:

$$18.\quad \begin{cases} \frac{d\alpha}{dt} + p(\eta c_1 - \zeta b_1) + q(\zeta a_1 - \xi c_1) + r(\xi b_1 - \eta a_1) = 0, \\ \frac{d\beta}{dt} + p(\eta c_2 - \zeta b_2) + q(\zeta a_2 - \xi c_2) + r(\xi b_2 - \eta a_2) = 0; \end{cases}$$

ce qui comportera les inégalités

$$19.\quad P > 0, \quad F_1^2 + F_2^2 < \varepsilon^2 P^2.$$

Si au contraire le point (ξ, η, ζ) prend une vitesse parallèle au plan fixe, on aura, en conservant aux lettres I, J, la signification qui leur a été attribuée précédemment:

$$20.\quad F_1 = -\frac{\varepsilon PI}{\sqrt{(I^2+J^2)}}, \quad F_2 = -\frac{\varepsilon PJ}{\sqrt{(I^2+J^2)}}.$$

Maintenant il est visible que les formules (15. — 20.) se changeront dans celles (1., 8. — 13.), si l'on écrit

$$X, Y, Z;\ L', M', N';\ R, f_1, f_2,$$

au lieu de

$$X_0, Y_0, Z_0;\ L'_0, M'_0, N'_0;\ P, F_1, F_2,$$

et qu'on substitue les inconnues (11.) aux inconnues (14.). Ainsi, lorsqu'on se borne à considérer les circonstances du premier instant du mouvement, la question est absolument la même, soit que les forces qui tirent le corps du repos, lui communiquent dans ce premier instant une vitesse finie ou infiniment petite. Ce point au reste semble assez évident, pour que nous n'ayons pas cru devoir y insister dans le précédent mémoire; mais en raison des difficultés que peut amener la considération du frottement, il n'était pas inutile d'y revenir ici avec plus de détails.

4. Reprenons l'hypothèse où le corps est tiré du repos par des forces continues. Si le frottement détruit la vitesse du point de contact, la résolution des neuf équations (1., 8., 9. et 10.) ne saurait offrir d'embarras, puisqu'il ne s'agira que d'éliminer entre des équations linéaires; mais dans le cas contraire, les équations (10.) étant remplacées par celles (13.), et les inconnues du problême, qui entrent dans I', J', se trouvant enveloppées d'un radical carré placé en dénominateur, on voit que l'élimination conduirait en général à des équations finales de degrés élevés, et susceptibles de plusieurs racines réelles. Cependant on conçoit que la question, de sa nature, ne peut comporter qu'une solution et qu'un seul système de valeurs pour chacune des inconnues. Il faut donc que

les équations finales n'aient qu'une seule racine réelle, ou, si elles en ont plusieurs, que toute soient exclues, hormis une, par des conditions d'inégalité telles que celle $R > 0$: c'est ce que nous aurons lieu de vérifier dans la suite.

Les formules se simplifieraient beaucoup, si l'on connaissait a priori la direction du mouvement que doit prendre le point (ξ, η, ζ); car en menant suivant cette direction l'axe des x dont la position sur le plan fixe est arbitraire, J' s'évanouirait ainsi que f_2; f_1 se réduirait à

$$-\frac{\varepsilon R I'}{\sqrt{(I'^2)}}$$

ou à $\mp \varepsilon R$, selon que I' serait positif ou négatif, à cause que le radical doit toujours être pris positivement. Toutes les équations redeviendraient linéaires, mais il en résulterait une ambiguité dans la valeur de f_1: car il faut bien remarquer que la valeur et le signe de f_1 dépendent de la valeur de R et du signe de I', qui peuvent varier à leur tour, selon qu'on a substitué pour f_1, dans les équations (1., 8., 9.), la valeur $-\varepsilon R$ ou celle $+\varepsilon R$.

Généralement on observe en analyse que lorsqu'un terme algébrique, affecté d'un signe radical, devient pour certaines valeurs particulières un carré parfait, il en résulte une discontinuité dans l'expression des fonctions qui en dépendent. C'est ainsi que les formules pour l'attraction des sphéroïdes, quand elles peuvent s'obtenir en termes finis, changent brusquement de forme, dans le passage des points intérieurs aux points extérieurs. C'est encore ainsi que, dans le mouvement d'un point matériel pesant, la direction de la vitesse varie d'une manière continue, si le point décrit une parabole, tandis qu'elle varie brusquement, quand le point, après s'être élevé en ligne droite, retombe verticalement en sens contraire; ce qui est dû à une circonstance semblable à celle qui nous occupe ici.

Désignons par I'_1, I'_2, les deux valeurs que prend I', selon qu'on substitue pour f_1 la valeur $-\varepsilon R$ ou celle $+\varepsilon R$, et par R_1, R_2, les valeurs correspondantes de R, il faudra que les deux systèmes d'inégalités

$$21. \quad \begin{cases} R_1 > 0, & I'_1 > 0, \\ R_2 > 0, & I'_2 < 0, \end{cases}$$

ne soient pas simultanément satisfaits; car autrement il s'en suivrait qu'on n'aurait aucune raison de décider si le point (ξ, η, ζ) se meut dans le sens des x positives ou dans celui des x négatives, ce qui serait absurde.

Par la même raison, s'il a été reconnu que le point ne peut, ni se détacher du plan fixe, ni être rendu immobile par la résistance du frottement, il faudra que l'un des deux systèmes (21.) soit nécessairement vérifié.

Quand on considère d'autres instants du mouvement, ou lorsqu'à l'origine de ce mouvement le corps a déjà pris une vitesse finie par l'action de forces instantanées, les mêmes difficultés ne se présentent plus: car alors les valeurs de f_1, f_2 sont données par les équations

$$f_1 = -\frac{\varepsilon RI}{\sqrt{(I^2+J^2)}}, \quad f_2 = -\frac{\varepsilon RJ}{\sqrt{(I^2+J^2)}},$$

dans les quelles I, J sont des nombres, censés connus pour l'instant que l'on considère. On n'a plus qu'à éliminer entre des équations linéaires; et si l'un de ces nombres, J par exemple, devient nul, le signe connu de I détermine immédiatement celui qu'il faut donner à f_1. On voit donc qu'il existe une différence essentielle entre les formules relatives au premier instant du mouvement, et celles qui se rapportent aux instants subséquents.

5. Il existe un cas où l'on peut être certain a priori que le mouvement du point de contact aura lieu constamment en ligne droite, et où par conséquant l'on peut choisir la direction de l'axe des x, de manière à ce que la composante f_2 du frottement soit constamment nulle. C'est celui où le plan des $x'z'$ est perpendiculaire au plan xy, et comprend le point de contact aussi bien que la résultante des forces qui sollicitent le corps. Il est clair qu'il n'y aurait aucune raison pour que le point de contact sortît de la ligne droite qui fait l'intersection des deux plans $x'z'$ et xy, et c'est d'ailleurs ce que le calcul montre. En effet, faisant alors coïncider le plan des xz avec celui des $x'z'$, on aura d'après les hypothèses admises:

22. $$0 = \eta = Y = L' = N' = b = b_1 = a_2 = c_2, \quad b_2 = 1,$$

ce qui réduira les équations (1. 8. et 9.) à

$$M\frac{d^2\alpha}{dt^2} = X + f_1, \quad M\frac{d^2\beta}{dt^2} = f_2, \quad M\frac{d^2\gamma}{dt^2} = Z + R;$$

$$A\frac{dp}{dt} = -\zeta f_2, \quad C\frac{dr}{dt} = \xi f_2, \quad B\frac{dq}{dt} = M' + \zeta(Ra + f_1 a_1) - \xi(Rc + f_1 c_1);$$

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} + \frac{dq}{dt}(\zeta a - \xi c) = 0.$$

On aura

$$J' = \frac{d^2\beta}{dt^2} - \zeta\frac{dp}{dt} + \xi\frac{dr}{dt} = f_2\left(\frac{1}{M} + \frac{\zeta^2}{A} + \frac{\xi^2}{B}\right);$$

il serait donc impossible que f_2 fut de signe contraire à J', et par conséquent ceci entraîne

$$0 = f_2 = \frac{d^2\beta}{dt^2} = \frac{dp}{dt} = \frac{dr}{dt}.$$

Le signe de f_1 se déterminera d'après ce qui a été dit précédemment.

Les mêmes conséquences pouvant se déduire de proche en proche pour tous les instants du mouvement, il en faut conclure que p et r demeureraient constamment nuls, ensorte que les équations à intégrer se réduiraient dans ce cas à

$$M\frac{d^2\alpha}{dt^2} = X + f_1, \quad M\frac{d^2\gamma}{dt^2} = Z + R;$$

$$B\frac{dq}{dt} = M' + \zeta(Ra + f_1 a_1) - \xi(Rc + f_1 c_1), \quad \frac{d\gamma}{dt} + q(\zeta a - \xi c) = 0;$$

dans lesquelles on aurait, d'après les formules connues:

$$q = \frac{d\theta}{dt}, \quad a = -\sin\theta, \quad c = \cos\theta, \quad a_1 = -\cos\theta, \quad c_1 = \sin\theta,$$

θ désignant l'angle des deux plans xy, $x'y'$. Il faudrait en outre y faire $f_1 = \mp\varepsilon R$, selon que I', ou

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{dq}{dt}(\zeta a_1 - \xi c_1)$$

serait, dans le premier instant du mouvement, une quantité positive ou négative. Ainsi dans ce cas, avant d'intégrer les formules du mouvement, il faudrait déterminer le signe de la vitesse du point de contact au premier instant. Quelquefois ce signe sera évident sans calcul; mais plus généralement on devra construire les deux systèmes d'inégalités (21.), et reconnaître lequel est vérifié.

6. Lorsque, dans un instant quelconque du mouvement, la vitesse du point de contact deviendra nulle, il faudra, selon l'observation déjà faite par Mr. Poisson *), examiner si, à partir de cet instant, une partie du frottement εR ne suffit pas pour maintenir nulle la vitesse du point; et, si cela est, employer les équations (5.) propres à ce cas. Autrement, et quand le point (ξ, η, ζ) doit continuer à se mouvoir, l'intensité et la direction de la vitesse se détermineront par des formules analogues à celles qui se rapportent au premier instant du

*) Voyez un Mémoire intitulé: *Formules relatives aux effets du tir d'un canon sur les différentes parties de son affût*, imprimé à Paris en 1826, et une note du même Géomètre, *sur le frottement des corps qui tournent*, insérée dans le *Bulletin des sciences mathématiques*, etc. T. IV. N°. 93.

mouvement, et sujettes aux mêmes observations. Dans le cas où le mouvement du point de contact a lieu constamment suivant la même droite, il pourra se faire que la vitesse change de signe, après avoir été nulle.

Enfin il peut arriver que la vitesse du point de contact, quand une fois elle est nulle, demeure nulle en suite sans qu'il y ait frottement; et dans ce cas il faudra que les valeurs de f_1, f_2, résultant des équations (5.), s'évanouissent. Cette circonstance se présente dans l'exemple traité par Mr. Poisson (*Bulletin des sc. math.* T. VI. p. 165.), où il s'agit d'une sphère homogène, pesante, qui roule sur un plan horizontal, en vertu d'une impulsion dirigée dans un plan vertical mené par le centre de gravité, abstraction faite d'ailleurs de la résistance de l'air. A partir de l'instant où la vitesse du point de contact se trouve nulle, les deux mouvements de translation et de rotation deviennent uniformes et dirigés en sens contraires, en sorte que la vitesse du point de contact reste nulle d'elle-même et sans l'action du frottement. Le savant auteur observe à cette occasion: „Que le frottement qui suffit pour ramener au repos les corps qui glissent sans tourner, ne fait donc que réduire à l'uniformité les mouvements de ceux qui tournent en glissant." Mais il est clair que cette remarque ne peut s'appliquer dans les mêmes termes, qu'aux cas très particuliers, où s'évanouissent les valeurs de f_1, f_2, données par les formules générales.

Nous ferons encore observer qu'il serait beaucoup plus commode pour le calcul, de supposer le frottement proportionnel à la vitesse du point de contact. Alors les valeurs de f_1, f_2 seraient de la forme $-\varepsilon I$, $-\varepsilon J$; toutes les équations redeviendraient linéaires, et quand J s'évanouirait, il n'y aurait pas d'ambiguité de signe dans la valeur de f_1. A la vérité, si le corps partait de l'état de repos, le frottement se trouverait nul dans le premier instant du mouvement, supposition qu'il semble peu naturel d'admettre. Pour échapper à cette conséquence, on pourrait supposer que f_1, f_2 deviennent alors égaux à $-\varepsilon I'$, $-\varepsilon J'$. L'hypothèse de la proportionnalité du frottement à la vitesse s'est présentée d'elle-même aux Géomètres qui se sont occupés les premiers d'introduire dans le calcul la considération du frottement. L'expérience montre qu'elles n'est pas admissible, quand il s'agit du frottement de la première espèce; mais il pourrait se faire qu'elle ne s'éloignât pas autant de la réalité physique, pour le frottement de la seconde espèce.

7. Reprenons plus specialement le cas où le corps est tiré du repos par l'action de forces instantanées, et pour simplifier, supprimons les indices qui affectent les lettres X'_0, L'_0, etc. Par la même raison faisons

$$\frac{d\alpha}{dt} = \alpha', \quad \frac{d\beta}{dt} = \beta', \quad \frac{d\gamma}{dt} = \gamma';$$

$$23. \quad \begin{cases} \eta c - \zeta b = \lambda, \quad \zeta a - \xi c = \mu, \quad \xi b - \eta a = \nu; \\ \eta c_1 - \zeta b_1 = \lambda_1, \quad \ldots \quad \eta c_2 - \zeta b_2 = \lambda_2, \text{ etc.} \end{cases}$$

les équations (15. — 18.) prendront la forme:

$$24. \quad M\alpha' = X + F_1, \quad M\beta' = Y + F_2, \quad M\gamma' = Z + P;$$

$$25. \quad \begin{cases} Ap = L' + P\lambda + F_1\lambda_1 + F_2\lambda_2, \\ Bq = M' + P\mu + F_1\mu_1 + F_2\mu_2, \\ Cr = N' + P\nu + F_1\nu_1 + F_2\nu_2; \end{cases}$$

$$26. \quad \gamma' + p\lambda + q\mu + r\nu = 0,$$

$$27. \quad \begin{cases} \alpha' + p\lambda_1 + q\mu_1 + r\nu_1 = 0, \\ \beta' + p\lambda_2 + q\mu_2 + r\nu_2 = 0. \end{cases}$$

Il est bien entendu, d'après tout ce qui précède, que les mêmes équations sont propres à déterminer les circonstances du premier instant du mouvement, quand le corps est tiré du repos par des forces continues; pourvu que X, Y, etc. représentent des forces de cette nature; α', β', γ' les valeurs initiales de $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$, $\frac{d^2\beta}{dt^2}$, $\frac{d^2\gamma}{dt^2}$; et pourvu enfin qu'on remplace p, q, r, F_1, F_2, P, par $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$, $\frac{dr}{dt}$, f_1, f_2, R.

Ainsi, dans le cas où le frottement détruit la vitesse du point de contact, en éliminant entre les neuf équations précédentes, et faisant pour abréger:

$$S = \frac{1}{M} + \frac{\lambda^2}{A} + \frac{\mu^2}{B} + \frac{\nu^2}{C}, \quad S_1 = \frac{1}{M} + \frac{\lambda_1^2}{A} + \frac{\mu_1^2}{B} + \frac{\nu_1^2}{C}, \text{ etc.}$$

$$T_{0,1} = \frac{\lambda\lambda_1}{A} + \frac{\mu\mu_1}{B} + \frac{\nu\nu_1}{C}, \quad T_{0,2} = \frac{\lambda\lambda_2}{A} + \frac{\mu\mu_2}{B} + \frac{\nu\nu_2}{C}, \text{ etc.}$$

$$U = \frac{Z}{M} + \frac{L'\lambda}{A} + \frac{M'\mu}{B} + \frac{N'\nu}{C}, \quad U_1 = \frac{X}{M} + \frac{L'\lambda_1}{A} + \ldots, \quad U_2 = \frac{Y}{M} + \frac{L'\lambda_2}{A} \ldots.$$

$$G = SS_1S_2 - ST_{1,2}^2 - S_1T_{0,2}^2 - S_2T_{0,1}^2 + 2T_{0,1}T_{0,2}T_{1,2},$$

il viendra:

$$P = -\frac{1}{G}\{U(S_1S_2 - T_{1,2}^2) + T_{0,2}(U_1T_{1,2} - S_1U_2) + T_{0,1}(U_2T_{1,2} - S_2U_1)\},$$

$$F_1 = -\frac{1}{G}\{U_1(SS_2 - T_{0,2}^2) + T_{0,1}(U_2T_{0,2} - S_2U) + T_{1,2}(UT_{0,2} - SU_2)\},$$

$$F_2 = -\frac{1}{G}\{U_2(SS_1 - T_{0,1}^2) + T_{0,2}(U_1T_{0,1} - S_1U) + T_{1,1}(UT_{0,2} - SU_1)\}.$$

Si les nombres $T_{0,1}$, $T_{0,2}$, $T_{1,2}$ venaient à s'évanouir, les valeurs de P, F_1, F_2 se réduiraient simplement à

$$-\frac{U}{S}, -\frac{U_1}{S_1}, -\frac{U_2}{S_2},$$

et elles seraient respectivement de signes contraires à U, U_1, U_2, attendu que S, S_1, S_2 sont des quantités positives de leur nature.

Lorsque la vitesse du point de contact n'est pas détruite, les deux équations (27.) ne subsistent plus, et l'on a en leur place;

$$F_1^2 + F_2^2 = \varepsilon^2 P^2, \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{U_1 + P T_{0,1} + F_1 S_1 + F_2 T_{1,2}}{U_2 + P T_{0,2} + F_1 T_{1,2} + F_2 S_2};$$

mais la détermination des valeurs générales de P, F_1, F_2 entraînerait un calcul pénible, en raison du degré auquel monteraient les équations finales.

8. Eclaircissons d'abord la question par quelques exemples fort simples; et pour considérer en premier lieu le plus simple de tous, admettons que le corps soit une sphère homogène, d'un rayon égal à ϱ. La direction des axes principaux devenant arbitraire, on pourra supposer qu'ils sont parallèles à l'origine du mouvement à ceux des x, y, z, et que celui des z' en particulier coïncide avec l'axe des z. La condition du parallélisme donne en général:

$$0 = a = b = b_1 = c_1 = a_2 = c_2, \quad 1 = c = a_1 = b_2,$$

et par suite

28. $\lambda = \eta$, $\mu = -\xi$, $\nu = 0$; $\lambda_1 = 0$, $\mu_1 = \zeta$, $\nu_1 = -\eta$; $\lambda_2 = -\zeta$, $\mu_2 = 0$, $\nu_2 = \xi$.

On a de plus, pour le cas particulier de la sphère:

29. $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = -\varrho$; $A = B = C$;

au moyen de quoi les équations (25., 26. et 27.) deviennent:

30. $$\begin{cases} Ap = L' + \varrho F_2, \quad Aq = M' - \varrho F_1, \quad Ar = N'; \\ \gamma' = 0; \quad \alpha' - \varrho q = 0, \quad \beta' + \varrho p = 0. \end{cases}$$

Attendu que γ' s'évanouit, la troisième équation (24.) donne $P = -Z$: cette valeur de P est la même, que la résistance du frottement soit surmontée ou non. Pour que la sphère ne se détache pas du plan, il faut qu'on ait $Z < 0$.

Quand la vitesse du point de contact est anéantie par le frottement, l'élimination entre les équations (24. et 30.) donne, en substituant pour M, A, leurs valeurs connues en fonction de ϱ:

$$F_1 = \frac{5M' - 2\varrho X}{7\varrho}, \quad F_2 = -\frac{5L' + 2\varrho Y}{7\varrho}.$$

Il faut qu'on ait

$$F_1^2 + F_2^2 < \varepsilon^2 P^2,$$

ou

$$31.\quad (5M' - 2\varrho X)^2 + (5L' + 2\varrho Y)^2 < 49\varrho^2\varepsilon^2 Z^2.$$

Si la vitesse du point de contact n'est pas détruite, les deux dernières équations (30.) n'auront plus lieu; elles seront remplacées par

$$32.\quad F_1^2 + F_2^2 = \varepsilon^2 P^2 = \varepsilon^2 Z^2,\quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{\alpha' - \varrho q}{\beta' + \varrho p}.$$

En substituant dans cette dernière équation les valeurs de α', β', p, q, tirées des équations (24. et 30.), il vient

$$33.\quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{\frac{X}{M} - \varrho\frac{M'}{A} + \left(\frac{1}{M} + \frac{\varrho^2}{A}\right)F_1}{\frac{Y}{M} + \varrho\frac{L'}{A} + \left(\frac{1}{M} + \frac{\varrho^2}{A}\right)F_2},$$

d'où l'on déduit immédiatement par la théorie des proportions:

$$34.\quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{\frac{X}{M} - \frac{\varrho M'}{A}}{\frac{Y}{M} + \frac{\varrho L'}{A}} = \frac{2\varrho X - 5M'}{2\varrho Y + 5L'}.$$

Observons maintenant que l'équation (33.) étant la même que la seconde équation (32.), les numérateur et dénominateur de son second membre expriment les composantes, suivant les axes des x et des y, de la vitesse prise par le point de contact. Dès lors, d'après la manière dont agit le frottement, il faut que F_1, F_2 soient respectivement de signes contraires aux numérateur et dénominateur de ce second membre, ce qui suppose 1°: que F_1, F_2 sont respectivement de signes contraires à

$$\frac{X}{M} - \frac{\varrho M'}{A},\quad \frac{Y}{M} + \frac{\varrho L'}{A};$$

2° que F_1, F_2 sont numériquement plus petits que

$$\frac{\frac{X}{M} - \frac{\varrho M'}{A}}{\frac{1}{M} + \frac{\varrho^2}{A}},\quad \frac{\frac{Y}{M} + \frac{\varrho L'}{A}}{\frac{1}{M} + \frac{\varrho^2}{A}},$$

ou que

$$\frac{2\varrho X - 5M'}{7\varrho},\quad \frac{2\varrho Y + 5L'}{7\varrho}.$$

En vertu des équations (32. et 34.), et au moyen de ce que Z doit être une quantité négative, on satisfait à la première condition, en prenant

$$F_1 = \frac{(2\varrho X - 5M')\varepsilon Z}{\sqrt{[(2\varrho X - 5M')^2 + (2\varrho Y + 5L')]^2}},$$

$$F_2 = \frac{(2\varrho Y + 5L')\varepsilon Z}{\sqrt{[(2\varrho X - 5M')^2 + (2\varrho Y + 5L')]^2}}.$$

La seconde condition se trouve alors satisfaite d'elle même. En effet, si elle ne l'était pas, et qu'on eût par exemple:

$$F_1^2\left(\frac{1}{M}+\frac{\varrho^2}{A}\right)^2 > \left(\frac{X}{M}-\frac{\varrho M'}{A}\right)^2,$$

ou

$$49\varrho^2 F_1^2 > (2\varrho X - 5M')^2,$$

F_1 se trouverait de même signe que le numérateur du second membre de l'équation (33.); il faudrait donc, pour que cette équation pût subsister, que F_2 fût aussi de même signe que le dénominateur de ce second membre, et par suite que l'on eût

$$49\varrho^2 F_2^2 > (2\varrho Y + 5L')^2.$$

Ajoutant ces deux dernières inégalités, et substituant pour $F_1^2+F_2^2$ sa valeur $\varepsilon^2 Z^2$, il viendrait

$$49\varrho^2\varepsilon^2 Z^2 > (2\varrho X - 5M')^2 + (2\varrho Y + 5L')^2;$$

mais puisque, par hypothèse, la vitesse du point de contact n'est pas détruite, cette inégalité, qui est la même que celle (31.) ne saurait être vérifiée.

Si maintenant nous comparons les équations (32. et 34.), nous en tirerons

$$35.\quad \frac{\alpha'-\varrho q}{\beta'+\varrho p} = \frac{\frac{X}{M}-\frac{\varrho M'}{A}}{\frac{Y}{M}+\frac{\varrho L'}{A}},$$

et comme le premier membre de cette dernière équation est la même chose que le second membre de l'équation (33.), il résultera de l'analyse précédente, que les numérateurs et dénominateurs des deux membres de l'équation (35.) seront respectivement de mêmes signes.

Or, dans le cas où l'on supposerait que la sphère vient choquer le plan fixe avec une vitesse connue, il faudrait, pour avoir les éléments de son mouvement après le choc, remplacer dans les formules qui précèdent, X, Y, L', M', par $M\alpha'_0$, $M\beta'_0$, Ap_0, Aq_0; α'_0 désignant la valeur de α' immédiatement avant le choc, et ainsi de suite. L'équation (35.) donnerait donc

$$\frac{\alpha'-\varrho q}{\beta'+\varrho p} = \frac{\alpha'_0-\varrho q_0}{\beta'_0+\varrho p_0};$$

on en devroit conclure „que la vitesse du point de contact, décomposée parallèlement au plan fixe, serait dirigée suivant la même droite, et dans le même sens, avant et après le choc:" propriété remarquable et particulière à la sphère.

En admettant, ce qui est le cas déjà traité par Mr. Poisson (*Bulletin*, T. VI. p. 172.), que Y, L', et par suite F_2 s'évanouissent, on a, quand la vitesse du point de contact est détruite, à la place de l'inégalité (31.), celle:

$$36. \quad \pm(5M' - 2\varrho X) < -7\varrho\varepsilon Z,$$

le signe $\pm$ étant choisi de manière à rendre le premier membre positif, et le second l'étant toujours, à cause de $Z < 0$. Si cette inégalité n'est pas satisfaite et que le frottement soit surmonté, on aura $F_1 = \pm\varepsilon Z$, selon que

$$\alpha' - \varrho q \gtrless 0.$$

Mais dans la première supposition

$$\alpha' - \varrho q = \frac{X}{M} - \frac{\varrho M'}{A} + \varepsilon Z\left(\frac{1}{M} + \frac{\varrho^2}{A}\right) = \frac{1}{2M\varrho}\cdot(2\varrho X - 5M' + 7\varrho\varepsilon Z),$$

et dans la seconde au contraire

$$\alpha' - \varrho q = \frac{1}{2M\varrho}\cdot(2\varrho X - 5M' - 7\varrho\varepsilon Z).$$

Il faut que les deux inégalités

$$37. \quad \begin{cases} 2\varrho X - 5M' + 7\varrho\varepsilon Z > 0, \\ 2\varrho X - 5M' - 7\varrho\varepsilon Z < 0, \end{cases}$$

ne puissent pas être satisfaites simultanément, et que l'une d'elles le soit toujours. Or supposons, pour fixer les idées:

$$2\varrho X - 5M' > 0,$$

l'inégalité (36.) pourra s'écrire

$$2\varrho X - 5M' + 7\varrho\varepsilon Z < 0,$$

et puisqu'elle n'est pas vérifiée, la première inégalité (37.) le sera nécessairement; tandis que la seconde ne saurait l'être, puisque son premier membre est la somme de deux nombres positifs: $2\varrho X - 5M'$ et $-7\varrho\varepsilon Z$. L'inverse aurait eu lieu, si l'on avait supposé $2\varrho X - 5M' < 0$.

9. Si la sphère venait choquer le plan fixe, et qu'elle fût douée d'élasticité, ainsi que cela arrive toujours dans la nature, la percussion au point de contact, au lieu d'être égale à $-Z$, ou à $-M\gamma'_0$ (γ'_0 désignant la valeur de γ' immédiatement avant le choc), prendrait pour valeur $-(1+\omega)M\gamma'_0$, en indiquant par ω le coëfficient de l'élasticité, qui deviendrait égal à 1, si l'élasticité était parfaite. Il semble naturel d'admettre, avec Mr. Poisson, que le frottement total F est toujours proportionnel dans ce cas à la percussion ou à la somme des pressions,

et de la forme εP. En partant de ce principe, qu'il serait bon toutefois de voir vérifier par l'expérience, la condition qui doit subsister pour que la vitesse du point de contact s'évanouisse après le choc, sera, au lieu de l'inégalité (31.):

$$(5q_0-2\varrho\alpha'_0)^2+(5p_0+2\varrho\beta'_0)^2<49\varrho^2\varepsilon^2(1+\omega)^2\gamma'^2_0.$$

On aura d'ailleurs, d'après ce qu'on a vu dans le N°. précédent:

$$F_1=\frac{5Aq_0-2\varrho M\alpha'_0}{7\varrho},\quad F_2=-\frac{5Ap_0+2\varrho M\beta'_0}{7\varrho};$$

et si l'on fait la substitution des valeurs de F_1, F_2, P dans les équations (24.) qui deviennent ici

$$38.\quad M\alpha'=M\alpha'_0+F_1,\quad M\beta'=M\beta'_0+F_2,\quad M\gamma'=M\gamma'_0+P,$$

puis qu'on remplace M et A par leurs valeurs en fonction de ϱ, il viendra, toutes réductions faites:

$$\alpha'=\tfrac{1}{7}(5\alpha'_0+2\varrho q_0),\quad \beta'=\tfrac{1}{7}(5\beta'_0-2\varrho p_0),\quad \gamma'=-\omega\gamma'_0.$$

Désignant par ϖ l'angle de réflexion du centre de la sphère, on aura

$$\operatorname{tang}\varpi=\frac{\gamma'}{\sqrt{(\alpha'^2+\beta'^2)}}=\frac{-7\omega\gamma'_0}{\sqrt{[(5\alpha'_0+2\varrho q_0)^2+(5\beta'_0-2\varrho p_0)^2]}}.$$

Au contraire, quand la vitesse du point de contact ne s'évanouit pas, on a, d'après ce qui a été dit précédemment:

$$F_1^2+F_2^2=\varepsilon^2P^2=\varepsilon^2(1+\omega)^2M^2\gamma'^2_0,\quad \frac{F_1}{F_2}=\frac{\alpha'_0-\varrho q_0}{\beta'_0+\varrho p_0};$$

ce qui, joint aux équations (38.), donne:

$$\alpha'-\alpha'_0=-\frac{\varepsilon(1+\omega)\gamma'_0(\alpha'_0-\varrho q_0)}{\sqrt{[(\alpha'_0-\varrho q_0)^2+(\beta'_0+\varrho p_0)^2]}},$$

$$\beta'-\beta'_0=-\frac{\varepsilon(1+\omega)\gamma'_0(\beta'_0+\varrho p_0)}{\sqrt{[(\alpha'_0-\varrho q_0)^2+(\beta'_0+\varrho p_0)^2]}}.$$

Dans le cas particulier où β'_0, p_0, et par suite β' et F_2 sont nuls, on en déduit:

$$\operatorname{tang}\varpi=\frac{\gamma'}{\alpha'}=-\frac{\omega\gamma'_0}{\alpha'_0-\varepsilon(1+\omega)\gamma'_0},$$

en sorte que l'angle de réflexion est alors indépendant de la vitesse de rotation de la sphère, comme Mr. Poisson en a fait la remarque dans le mémoire cité (p. 175.); mais ce résultat ne subsiste pas pour les valeurs générales de α', β', telles que nous venons de les écrire.

10. L'analyse du N°. 8. s'applique non seulement à la sphère, mais à tout corps de révolution homogène, dont l'axe de révolution est perpendiculaire au plan fixe. Considérons maintenant un ellipsoïde, dont l'un des axes principaux, celui des z', coïncide encore avec l'axe des z,

ensorte qu'on puisse prendre les x, y, respectivement parallèles aux x', y'. En désignant par 2ϱ la valeur numérique de l'axe des z', les équations (28.) et les trois premières (29.) subsisteront toujours; on en déduira de même $\gamma' = 0$, $P = -Z$, et $Z < 0$, condition pour que l'ellipsoïde ne soit pas soulevé, et qui doit avoir lieu, soit que la vitesse du point de contact s'évanouisse ou non.

Dans le premier de ces deux cas, on aura

$$39. \quad \begin{cases} Ap = L' + \varrho F_2, \quad Bq = M' - \varrho F_1, \quad Cr = N'; \\ \alpha' - \varrho q = 0, \quad \beta' + \varrho p = 0; \end{cases}$$

et ces équations, jointes à celles (24.), donneront:

$$F_1 = \frac{K'\varrho M' - X}{1 + K'\varrho^2}, \quad F_2 = -\frac{K\varrho L' + Y}{1 + K\varrho^2},$$

expressions dans les quelles on a fait, pour simplifier:

$$\frac{M}{A} = K, \quad \frac{M}{B} = K'.$$

Il faudra de plus que l'inégalité

$$40. \quad \left(\frac{K'\varrho M' - X}{1 + K'\varrho^2}\right)^2 + \left(\frac{K\varrho L' + Y}{1 + K\varrho^2}\right)^2 < \varepsilon^2 Z^2$$

se trouve vérifiée.

Si elle ne l'est pas, et que le frottement soit surmonté, on aura, au lieu des deux dernières équations (39.), celles (32.), dont la seconde devient, par la substitution des valeurs de α', β', p, q:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{X - K'\varrho M' + (1 + K'\varrho^2) F_1}{Y + K\varrho L' + (1 + K\varrho^2) F_2}.$$

Posons, pour un instant:

$$F_1 = x_{,}, \quad F_2 = y_{,}, \quad \varepsilon Z = h, \quad X - K'\varrho M' = m, \quad 1 + K'\varrho^2 = n,$$
$$Y + K\varrho L' = m', \quad 1 + K\varrho^2 = n',$$

on aura, pour déterminer $x_{,}$ et $y_{,}$, les deux équations:

$$41. \quad x_{,}^2 + y_{,}^2 = h^2, \quad \frac{x_{,}}{y_{,}} = \frac{m + nx_{,}}{m' + n'y_{,}}.$$

Le lieu de la première est un cercle, ayant son centre à l'origine des coordonnées rectangulaires $x_{,}$, $y_{,}$; la seconde peut s'écrire:

$$42. \quad (n' - n) x_{,} y_{,} + m' x_{,} - m y_{,} = 0,$$

et sous cette forme elle est évidemment celle d'une hyperbole équilatère, ayant ses asymptotes parallèles aux axes des coordonnées, et passant par l'origine. Le centre de cette hyperbole a pour coordonnées parallèles aux axes des $x_{,}$, $y_{,}$:

$$x_{,,} = \frac{m}{n' - n}, \quad y_{,,} = -\frac{m'}{n' - n}.$$

$x_{,,}$ et $y_{,,}$ sont les lignes représentées (Tab. III. Fig. 1.) par OP et PC; leurs signes dépendront de ceux des quantités m, m', $n'-n$. Pour fixer les idées, on peut supposer que le point C tombe dans l'angle $Y_{,}OX_{,,}$, ou que les coordonnées $x_{,,}$, $y_{,,}$ sont l'une et l'autre positives: les raisonnements seraient les mêmes dans tout autre supposition.

Maintenant il est clair 1° que le cercle (41.) et l'hyperbole (42.) ont en général quatre points d'intersection, désignés sur la figure par N, N', N'', N'''; 2° que, puisque la branche NON' passe par l'origine O, il y a au moins deux points d'intersection N, N', situés, l'un dans l'angle $Y_{,}OX_{,,}$, l'autre dans l'angle $X_{,}OY_{,,}$; 3° que les deux autres points d'intersection, s'ils existent, sont situés dans le même angle $Y_{,}OX_{,}$ qui comprend le centre C de l'hyperbole. On conçoit donc la possibilité que $x_{,}$, $y_{,}$, ou F_1, F_2, admettent quatre systèmes différents de valeurs reélles.

Mais en remontant à la seconde équation (41.), il faut observer que, par la nature de la question, $x_{,}$ et $y_{,}$ doivent être respectivement de signes contraires à $m+nx_{,}$ et $m'+n'y_{,}$; ce qui suppose: 1° que $x_{,}$ et $y_{,}$ sont respectivement de signes contraires à m, m'; 2° que $nx_{,}$, $n'y_{,}$ sont numériquement inférieurs à m, m', ensorte que

$$43. \quad \frac{m^2}{n^2} > x_{,}^2, \quad \frac{m'^2}{n'^2} > y_{,}^2.$$

La première condition suffit, d'après l'inspection de la figure, pour montrer que les points N', N'', N''' donnent des solutions étrangères à la question; il faut prouver qu'à l'égard du point N, la seconde condition, exprimée par inégalités (43.), est aussi satisfaite. Or si l'on avait, par exemple:

$$\frac{m^2}{n^2} < x_{,}^2,$$

m se trouvant de signe contraire a $nx_{,}$, et numériquement plus petit, tandis que m' est déjà de signe contraire à $n'y_{,}$, il résulterait de la seconde équation (41.) que m' serait aussi numériquement plus petit que $n'y_{,}$. On aurait donc

$$\frac{m'^2}{n'^2} < y_{,}^2,$$

et en conséquence

$$\frac{m^2}{n^2} + \frac{m'^2}{n'^2} < h^2,$$

ce qui serait la même chose que l'inégalité (40.) qui, par hypothèse, n'est pas vérifiée. Donc en définitive, il y a toujours un système de valeurs pour F_1, F_2, et il n'y en a qu'un seul qui satisfasse à la question.

11. Occupons nous maintenant de traiter d'une manière générale le cas où l'une des composantes du frottement, F_2, s'évanouit, en vertu des conditions (22.), expliquées au N°. 5. On aura d'abord

$$0 = \lambda = \nu = \lambda_1 = \nu_1 = \mu_2;$$

les équations (24. — 27.) se réduiront à

$$44. \quad \begin{cases} M\alpha' = X + F_1, \quad M\gamma' = Z + P; \quad Bq = M' + P\mu + F_1\mu_1; \\ \gamma' + q\mu = 0, \quad \alpha' + q\mu_1 = 0; \end{cases}$$

et si l'on fait

$$\frac{M}{B} = K', \quad S = 1 + K'\mu^2, \quad S_1 = 1 + K'\mu_1^2, \quad T = K'\mu\mu_1,$$
$$U = Z + K'\mu M', \quad U_1 = X + K'\mu_1 M',$$

on en tirera pour valeurs de $P_1 F_1$, dans le cas où la vitesse du point de contact est détruite:

$$P = \frac{U_1 T - S_1 U}{SS_1 - T^2}, \quad F_1 = \frac{UT - SU_1}{SS_1 - T^2}.$$

Il est très essentiel d'observer que

$$45. \quad SS_1 - T^2 = 1 + K'(\mu^2 + \mu_1^2),$$

en sorte que le dénominateur de ces valeurs de P, F_1 est essentiellement positif.

D'après ce qu'on a vu dans le précédent mémoire (N°. 8.), il faut que la quantité U soit négative, sans quoi le point (ξ, ζ) se détacherait du plan fixe. U exprime la vitesse que prendrait le point (ξ, ζ) par l'action des forces X, Y, Z, s'il n'y avait en ce point ni percussion ni frottement; ou bien, en supposant que le corps vienne choquer le plan fixe, U exprime la vitesse du point (ξ, ζ), immédiatement avant le choc. Or on a vu dans le mémoire qui précède, que lorsqu'on faisait abstraction du frottement, la condition $U < 0$ entraînait celle $P > 0$, et vice versa: mais ici il n'en est plus de même, et comme P doit toujours être une quantité positive, il faut poser, indépendamment de la condition $U < 0$, celle

$$U_1 T - S_1 U > 0.$$

Il faut en outre que le frottement F_1 soit numériquement inférieur à εP, d'où

$$\pm(UT - SU_1) < \varepsilon(U_1 T - S_1 U),$$

le signe $\pm$ étant choisi de manière à rendre le premier membre de l'inégalité positif.

Quand la résistance du frottement est surmontée, la dernière équation (44.) est remplacée par $F_1 = \mp \varepsilon P$, selon que

$$\alpha' + q\mu_1 \gtrless 0.$$

Or la supposition $F_1 = -\varepsilon P$ donne:

$$P = -\frac{U}{S-\varepsilon T}, \quad \alpha' + q\mu_1 = \frac{SU_1 - UT - \varepsilon(U_1 T - S_1 U)}{S-\varepsilon T};$$

et celle $F_1 = \varepsilon P$, donne par la même raison:

$$P = -\frac{U}{S+\varepsilon T}, \quad \alpha' + q\mu_1 = \frac{SU_1 - UT + \varepsilon(U_1 T - S_1 U)}{S+\varepsilon T}.$$

Ainsi, P devant toujours rester positif, les systèmes d'inégalités propres à chacune de ces deux hypothèses, seront:

$$-\frac{U}{S-\varepsilon T} > 0, \quad \frac{SU_1 - UT - \varepsilon(U_1 T - S_1 U)}{S-\varepsilon T} > 0,$$

$$-\frac{U}{S+\varepsilon T} > 0, \quad \frac{SU_1 - UT + \varepsilon(U_1 T - S_1 U)}{S+\varepsilon T} < 0.$$

Mais puisque U est négatif, sans quoi le corps se détacherait du plan, on peut remplacer la première et la troisième de ces inégalités par

$$S - \varepsilon T > 0, \quad S + \varepsilon T > 0$$

et dès lors la seconde et la quatrième peuvent s'écrire, en supprimant les dénominateurs positifs

$$SU_1 - UT - \varepsilon(U_1 T - S_1 U) > 0,$$
$$SU_1 - UT + \varepsilon(U_1 T - S_1 U) < 0.$$

12. Le cas où l'on a $U > 0$, et où le point (ξ, ζ) se détache du plan sans percussion ni frottement, exclut évidemment tous les autres. En le mettant à part, il faut prouver que les systèmes d'inégalités, relatifs aux trois autres hypothèses, sont de telle sorte que l'un d'entre eux est nécessairement vérifié, quel que soit le nombre empirique ε, et que la vérification d'un seul entraîne l'exclusion de tous les autres. Pour plus de clarté, grouppons ensemble ces divers systèmes, on aura:

1°. Si le frottement détruit la vitesse du point de contact:

$$(A) \quad \begin{cases} (a) & U_1 T - S_1 U > 0, \\ (a') & \pm(UT - SU_1) < \varepsilon(U_1 T - S_1 U), \end{cases}$$

le double signe ayant pour objet de rendre le premier membre de la dernière inégalité toujours positif.

2°. Si le frottement ne détruit pas la vitesse du point de contact, et que ce point se meuve dans le sens des x positives:

$$(B) \quad \begin{cases} (b) & S - \varepsilon T > 0, \\ (b') & SU_1 - UT - \varepsilon(U_1 T - S_1 U) > 0. \end{cases}$$

3°. Si le point de contact se meut dans le sens de x négatives:

$$(B_1)\quad \begin{cases} (b_1) & S+\varepsilon T>0, \\ (b'_1) & SU_1-UT+\varepsilon(U_1T-S_1U)<0. \end{cases}$$

D'abord les systèmes (A) et (B) sont incompatibles; car si $SU_1-UT>0$, l'inégalité (a') est l'opposée de (b'); et si au contraire $SU_1-UT<0$, au moyen de ce que l'inégalité (a) serait satisfaite, le premier membre de celle (b') serait formé par l'addition de deux termes négatifs, en sorte que cette dernière inégalité ne pourrait être vérifiée. Par une raison absolument semblable, les systèmes (A) et (B_1) ne peuvent subsister simultanément. Enfin on prouvera qu'il en est de même à l'égard des systèmes (B) et (B_1); car des inégalités (b'), (b'_1) on tire:

$$(S-\varepsilon T)U_1>(T-\varepsilon S_1)U,\quad (S+\varepsilon T)U_1<(T+\varepsilon S_1)U;$$

or, puisque (b) et (b_1) seraient vérifiées par hypothèse, on peut diviser les inégalités précédentes par les facteurs positifs $S-\varepsilon T$, $S+\varepsilon T$, ce qui donne

$$U_1>\frac{(T-\varepsilon S_1)U}{S-\varepsilon T},\quad U_1<\frac{(T+\varepsilon S_1)U}{S+\varepsilon T},$$

et par suite

$$\frac{(T+\varepsilon S_1)U}{S+\varepsilon T}>\frac{(T-\varepsilon S_1)U}{S-\varepsilon T},$$

ou en faisant disparaître les dénominateurs positifs, et réduisant:

$$2\varepsilon U(SS_1-T^2)>0.$$

Mais U est négatif, donc on devrait avoir $SS_1-T^2<0$, ce qui est absurde d'après l'équation (45.).

Il reste à prouver que l'un des trois systèmes (A), (B), (B_1) est nécessairement vérifié. Or, pour que cette proposition ne fût pas vraie, il faudrait qu'en assignant de certaines valeurs aux quantités ε, U, U_1, etc., l'une au moins des deux inégalités qui entrent dans chaque système, ne fût pas satisfaite. Formons donc toutes les combinaisons 3 à 3 qui peuvent avoir lieu, en prenant une inégalité dans chacun des systèmes, et indiquons les par la notation suivante:

$$[a,\ b,\ b_1],\quad [a',\ b,\ b_1],\quad [a,\ b',\ b'_1],\quad [a',\ b',\ b'_1],$$
$$[a,\ b,\ b'_1],\quad [a,\ b',\ b_1],\quad [a',\ b,\ b'_1],\quad [a',\ b',\ b_1];$$

en sorte, par exemple, que le symbole $[a,\ b,\ b_1]$ désigne la combinaison des trois inégalités (a), (b), (b_1), dont aucune ne serait satisfaite, afin que par suite aucun des trois systèmes (A), (B), (B_1) ne pût avoir lieu.

1° et 2°. Il est clair d'abord que les deux combinaisons $[a,\ b,\ b_1]$, $[a',\ b,\ b_1]$ sont superflues à considérer; car selon que l'on a $T>$ ou <0,

l'une des deux inégalités (b), (b_1) est nécessairement satisfaite, à cause que S et S_1 sont des quantités positives de leur nature.

3°. La combinaison $[a, b', b'_1]$ est impossible; car, des deux inégalités:

$$SU_1 - UT - \varepsilon(U_1T - S_1U) < 0, \quad SU_1 - UT + \varepsilon(U_1T - S_1U) > 0,$$

on tire, en éliminant $SU_1 - UT$:

$$U_1T - S_1U > 0;$$

et par conséquent si les deux inégalités (b'), (b'_1) ne sont pas satisfaites, celle (a) l'est nécessairement.

4°. La combinaison $[a', b', b'_1]$ répugne encore évidemment; car, selon que $SU_1 - UT >$ ou < 0, l'inégalité (a') sera directement l'opposée de (b') ou (b'_1); et dès lors, si l'une n'est pas vérifiée, l'autre doit l'être.

5° et 6°. La combinaison $[a, b, b'_1]$ suppose que l'on ait:

$$U_1T - S_1U < 0, \quad S - \varepsilon T < 0, \quad SU_1 - UT + \varepsilon(U_1T - S_1U) > 0.$$

En vertu de la seconde de ces inégalités, T est positif; la première et la troisième donnent alors:

$$U_1 < \frac{S_1U}{T}, \quad U_1 > \frac{(T + \varepsilon S_1)U}{S + \varepsilon T},$$

d'où

$$\frac{S_1U}{T} > \frac{(T + \varepsilon S_1)U}{S + \varepsilon T},$$

et en réduisant

$$U(SS_1 - T^2) > 0,$$

ce qui serait absurde, ainsi qu'on la vu plus haut. On démontrerait de même l'impossibilité de la combinaison $[a, b', b_1]$.

7° et 8°. Il est clair que la combinaison $[a', b, b'_1]$ implique contradiction, dans le cas où $UT - SU_1 > 0$, puisqu'alors $(a'.)$ est directement l'opposée de (b'_1). Si au contraire on a $UT - SU_1 < 0$, de ce que les inégalités (b), (a') ne sont pas vérifiées, il résulterait

$$S - \varepsilon T < 0, \quad SU_1 - UT > \varepsilon(U_1T - S_1U;$$

le premier membre de cette dernière inégalité étant positif par hypothèse, et le second l'étant aussi, sans quoi l'on retomberait sur la combinaison $[a, b, b'_1]$ qui vient d'être démontrée impossible. En vertu de la première inégalité, on peut mettre la seconde sous la forme

$$U_1 < \frac{(\varepsilon S_1 - T)U}{\varepsilon T - S};$$

et comme on a d'ailleurs, d'après la supposition $UT - SU_1 < 0$,

$$U_1 > \frac{UT}{S},$$

il en résulte

$$\frac{(\varepsilon S_1 - T)U}{\varepsilon T - S} > \frac{UT}{S},$$

ce qui conduit encore à la conséquence absurde $U(SS_1 - T^2) > 0$. Un raisonnement entièrement semblable ferait rejeter la combinaison $[a', b', b_1]$.

Ainsi en définitive, quelles que soient les valeurs de ε, U, U_1, etc. pourvu seulement que U soit négatif, un des trois systèmes (A), (B), (B_1) est nécessairement satisfait, et il n'y en a qu'un seul.

Mais si U était positif, il pourrait se faire que les systèmes relatifs aux autres hypothèses, par exemple le système (A) (qui ne changerait pas de forme), ou les systèmes (B), (B_1) (dans lesquels il faudrait changer les signes $>$ en $<$, et réciproquement), fussent encore satisfaits. Ceci fait voir que dans l'ordre du calcul, l'hypothèse qui consiste à supposer que le corps se détache du plan sans percussion ni frottement, doit avoir la priorité sur les autres; c'est-à-dire qu'elle exclut les autres hypothèses, même quand les conditions relatives à celles-ci se trouvent vérifiées: au lieu que cette première hypothèse une fois exclue par la relation $U < 0$, l'ordre dans lequel on essaiera les trois autres systèmes (A), (B), (B_1) est indifférent; puisque dès lors un seul de ces systèmes peut se trouver vérifié. Tous ces résultats n'ont rien que de conforme à l'ordre logique des idées; et si l'analyse qui sert à les établir, offre quelque chose de trop minutieux, nous pensons qu'on le pardonnera en raison de la nouveauté du sujet.

13. Lorsque T est nul, ce qui arrivait dans les cas de la sphère et de l'ellipsoïde, traités précédemment, la valeur de P se trouve égale à $-\frac{U}{S}$, que le frottement soit surmonté ou non. Ainsi, pourvu seulement que U soit négatif, les inégalités (a), (b'), (b_1) sont satisfaites d'elles-mêmes; celles (a'), (b'), (b'_1) se réduisent à

$$\pm SU_1 < -\varepsilon US_1, \quad SU_1 > -\varepsilon US_1, \quad -SU_1 > -\varepsilon US_1.$$

Si la première de ces inégalités n'est pas vérifiée, la seconde ou la troisième le seront, selon que $U_1 >$ ou < 0; d'où l'on conclut que la vitesse du point de contact au premier instant du mouvement sera de même signe que U_1; et comme, dans le cas où le corps vient frapper le plan fixe, U_1 exprime la vitesse du point de contact avant le choc, estimée

parallèlement aux x, il en faut conclure que sa vitesse après le choc, sera dirigée dans le même sens.

Mais dans le cas général, et lorsque la résitance du frottement est surmontée, le point de contact se mouvra dans le sens des x positives ou négatives, selon que les quantités $U_1T - S_1U$, $SU_1 - UT$ seront de mêmes signes ou de signes contraires: or de là ne dérive pas la nécessité que U_1 soit positif dans la première hypothèse, et négatif dans la seconde; les vitesses du point de contact, parallèles aux x, pourront donc être dirigées en sens contraires, avant et après le choc.

Mr. Poisson, à qui l'on doit d'avoir remarqué cette circonstance, dans les deux mémoires cités plus haut, en conclut la nécessité de partager en deux périodes distinctes, le temps extrêmement court, pendant lequel s'opère le choc du corps contre le plan. En effet, observe-t-il, une percussion n'étant qu'une somme de pressions qui se succèdent dans une durée très courte, et le frottement total la somme des frottements partiels, correspondants à chacune de ces pressions, il faut concevoir que la vitesse du point de contact, dirigée d'abord, par exemple, dans le sens des x positives, s'éteint graduellement jusqu'à ce qu'elle soit nulle; après quoi, la vitesse croissant de nouveau dans le sens des x négatives, le frottement s'exerce aussi dans une direction contraire: il faut donc calculer séparément les effets de la percussion et du frottement dans ces deux périodes, pendant lesquelles celui-ci s'exerce suivant deux directions opposées.

Mais nous ferons d'abord remarquer que cette opposition dans les signes de la vitesse, avant et après le choc, n'est qu'une application particulière des formules du N°. 7., d'après lesquelles la composante parallèle au plan fixe de la vitesse du point de contact, doit en général être dirigée suivant des droites différentes, avant et après le choc. Il faudrait donc, d'après le même principe, considérer la vitesse, et par conséquent le frottement, comme variant en direction par degrés insensibles, depuis celle qu'elle avait avant le choc jusqu'à celle qu'elle prend après le choc. Il faudrait donc distinguer dans la durée inappréciable de la percussion une infinité de périodes distinctes; ou plutôt, si l'on savait comment la pression élémentaire varie pendant la durée du choc, et quelle est cette durée, il faudrait intégrer des formules analogues à celles du N°. 1., et déduire de cette intégration toutes les circonstances du mouvement, relati-

ves à l'instant qui termine le choc. Mais on ne peut apprécier en aucune façon ni la durée du choc, ni la loi suivant laquelle la pression et le frottement varient pendant cette durée: les calculs que nous venons d'indiquer seraient donc inexécutables; et par la même raison, dans le cas particulier qui a donné matière à ces remarques, on n'aurait aucun moyen de connaître l'instant où la vitesse du point de contact a changé de signe, ni de calculer séparément les deux périodes du choc.

Nous observerons en outre que, si l'on a bien suivi les explications qui précèdent, on doit comprendre que les formules relatives au premier instant du mouvement sont les mêmes, soit que le corps vienne choquer le plan fixe, ou qu'il subisse lui-même une percussion, ou enfin qu'il soit tiré du repos par l'action d'une force continue telle que la pesanteur. Or dans ce dernier cas, les formules que nous venons de donner sont d'une exactitude rigoureuse; et l'on ne pourrait subdiviser un élément qui est, dans le sens absolu et mathématique du mot, infiniment petit. Concluons en donc que la même analyse doit s'appliquer également au choc, quand on en considère les effets comme sensiblement instantanés, ce qui est jusqu'ici le seul moyen connu de les soumettre au calcul: car d'ailleurs, si l'on a égard à la réalité physique, et si l'on parvient à réduire analytiquement la théorie de la percussion et du frottement à celle des actions à distance, il est clair que l'observation de Mr. Poisson est de toute justesse.

Si l'on adoptait tout autre hypothèse sur la nature du frottement, que celle de la proportionnalité à la pression, on aurait des relations de forme très différente, qui pourtant devraient toujours, par la nature de la question, entraîner des conséquences analogues à celles que nous avons développées. Mais il suffit à notre objet d'avoir indiqué cette nouvelle application du calcul des inégalités, en partant de l'hypothèse communément adoptée par les physiciens. On peut juger aussi par ce qu'on vient de lire, et d'après les détails donnés dans le mémoire précédent, de la complication que prendraient les calculs, si l'on avait à considérer l'action du frottement en plusieurs points de contact: les remarques que ce sujet comporte trouveront peut-être leur place dans un autre article.

Villiers, près Paris, le 8. juin 1829.

18.

Anwendung der elliptischen Transcendenten auf die sphärischen Polygone, welche zugleich einem kleinen Kreise der Kugel eingeschrieben und einem andern umgeschrieben sind.

(Von Herrn Stud. *Richelot* zu Königsberg in Pr.)

I.

In dem ersten Hefte des dritten Bandes dieses Journals hat der Herr Professor Jacobi das Problem: „die Relation zwischen der Distanz der Mittelpuncte und den Radien zweier Kreise zu finden, von denen der eine einem unregelmäfsigen Vielecke eingeschrieben, der andere demselben umgeschrieben ist" auf die Elemente der elliptischen Transcendenten zurückgeführt.

Wenn man auf diesem Wege die bekannten Relationen für das Dreieck u. s. w. ableitet, so wird dies durch folgende einfache Betrachtung sehr erleichtert, wonach aus der Bedingung für das n Eck ohne Weiteres sich die für das $2n$ Eck ergiebt. Nennt man nemlich, jener erwähnten Abhandlung gemäfs, R' und r' die Radien der Kreise für das $2n$ Eck, und a' die Distanz ihrer Mittelpuncte, während bei dem n Ecke diese Gröfsen respective durch R, a und r bezeichnet sein mögen; bezeichnet man ferner den ersten Winkel des $2n$ Ecks am Mittelpuncte C durch 2α und beim n Eck durch $2\alpha_2$, indem beide Polygone wieder von dem festen Puncte P aus, wo die durch die Mittelpuncte des grofsen und kleinen Kreises gezogene Linie die Peripherie des gröfsern Kreises schneidet, construirt sind, so ist der analytische Ausdruck für die Relation obiger Art bei einem $2n$ Eck, welches nur einmal die Peripherie durchmifst:

$$\frac{K}{n} = t',$$

wo K und t' nach der in obiger Abhandlung gebrauchten Bezeichnung aus folgenden Gleichungen sich bestimmen:

$$\mathrm{am}(K) = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \mathrm{am}(t') = \alpha,$$

so dafs die elliptischen Integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin\varphi^2)}} = K \quad \text{und} \quad \int_0^{\alpha} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin\varphi^2)}} = t'$$

gesetzt werden, worin c die in der oben erwähnten Abhandlung gebrauchte willkürliche Constante $\varkappa$ bedeutet.

Der analytische Ausdruck für das nEck wird hingegen:

$$\frac{2K}{n} = t,$$

worin:

$$\operatorname{am}(t) = \alpha_2,$$

und daher

$$\int_0^{\alpha_2} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin\varphi^2)}} = t$$

ist.

Hieraus folgt, dafs

$$2t' = t$$

ist, und folglich die Formeln für die Verdoppelung der elliptischen Transcendente gelten, welche Herr Legendre in seinen *Exercices p.* 25. gegeben hat, wenn man statt φ, α, und statt φ_2, α_2 schreibt.

So erhält man:

$$1.\quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha_2 = \operatorname{tang}\alpha\,\triangle(\alpha)$$

und

$$2.\quad \sin\alpha = \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha_2}{\sqrt{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\triangle\alpha_2)}}.$$

Aus (2.) folgt:

$$\sin\alpha^2 = \frac{2\sin\frac{1}{2}\alpha^2}{1+\triangle\frac{\alpha^2}{2}}, \quad \cos\alpha^2 = \frac{\cos\alpha_2+\triangle\alpha_2}{1+\triangle\frac{\alpha_2}{\alpha}}, \quad \operatorname{tang}\alpha^2 = \frac{2\sin\frac{1}{2}\alpha^2}{\cos\alpha_2+\triangle\alpha_2},$$

was in (1.) substituirt, giebt:

$$3.\quad (\triangle\alpha)^2 = \frac{\cos\alpha_2+\triangle\alpha_2}{\cos\alpha_2+1}.$$

Nach der oben angeführten Abhandlung ist aber:

$$4.\quad \triangle(\alpha_2) = \sqrt{(1-c^2\sin(\alpha_2)^2)} = \frac{R-a}{R+a}, \quad \cos(\alpha_2) = \frac{r}{R+a},$$

$$5.\quad 1-cc = 1-\varkappa\varkappa = \frac{(R-\alpha)^2-r^2}{(R+a)^2-r^2}.$$

Dieselben Formeln gelten für α, R', a' und r'.

$$6.\quad \triangle(\alpha_2) = \sqrt{(1-c^2\sin(\alpha_2)^2)} = \frac{R'-a'}{R'+a'}, \quad \cos(\alpha_2) = \frac{r'}{R'+a'},$$

$$7.\quad 1-cc = 1-\varkappa\varkappa = \frac{(R'-a')^2-r'^2}{(R'+a')^2-r'^2}.$$

Setzt man also:

18.

Anwendung der elliptischen Transcendenten auf die sphärischen Polygone, welche zugleich einem kleinen Kreise der Kugel eingeschrieben und einem andern umgeschrieben sind.

(Von Herrn Stud. *Richelot* zu Königsberg in Pr.)

I.

In dem ersten Hefte des dritten Bandes dieses Journals hat der Herr Professor Jacobi das Problem: „die Relation zwischen der Distanz der Mittelpuncte und den Radien zweier Kreise zu finden, von denen der eine einem unregelmäfsigen Vielecke eingeschrieben, der andere demselben umgeschrieben ist" auf die Elemente der elliptischen Transcendenten zurückgeführt.

Wenn man auf diesem Wege die bekannten Relationen für das Dreieck u. s. w. ableitet, so wird dies durch folgende einfache Betrachtung sehr erleichtert, wonach aus der Bedingung für das n Eck ohne Weiteres sich die für das $2n$ Eck ergiebt. Nennt man nemlich, jener erwähnten Abhandlung gemäfs, R' und r' die Radien der Kreise für das $2n$ Eck, und a' die Distanz ihrer Mittelpuncte, während bei dem n Ecke diese Gröfsen respective durch R, a und r bezeichnet sein mögen; bezeichnet man ferner den ersten Winkel des $2n$ Ecks am Mittelpuncte C durch 2α und beim n Eck durch $2\alpha_2$, indem beide Polygone wieder von dem festen Puncte P aus, wo die durch die Mittelpuncte des grofsen und kleinen Kreises gezogene Linie die Peripherie des gröfsern Kreises schneidet, construirt sind, so ist der analytische Ausdruck für die Relation obiger Art bei einem $2n$ Eck, welches nur einmal die Peripherie durchmifst:

$$\frac{K}{n} = t',$$

wo K und t' nach der in obiger Abhandlung gebrauchten Bezeichnung aus folgenden Gleichungen sich bestimmen:

$$\mathrm{am}(K) = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \mathrm{am}(t') = \alpha,$$

so dafs die elliptischen Integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin\varphi^2)}} = K \quad \text{und} \quad \int_0^{\alpha} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin\varphi^2)}} = t'$$

gesetzt werden, worin c die in der oben erwähnten Abhandlung gebrauchte willkürliche Constante $\varkappa$ bedeutet.

Der analytische Ausdruck für das nEck wird hingegen:

$$\frac{2K}{n} = t,$$

worin:

$$\mathrm{am}(t) = \alpha_2,$$

und daher

$$\int_0^{\alpha_2} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin\varphi^2)}} = t$$

ist.

Hieraus folgt, dafs

$$2t' = t$$

ist, und folglich die Formeln für die Verdoppelung der elliptischen Transcendente gelten, welche Herr Legendre in seinen *Exercices p.* 25. gegeben hat, wenn man statt φ, α, und statt φ_2, α_2 schreibt.

So erhält man:

$$1.\quad \mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\alpha_2 = \mathrm{tang}\,\alpha\,\triangle(\alpha)$$

und

$$2.\quad \sin\alpha = \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha_2}{\sqrt{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\triangle\alpha_2)}}.$$

Aus (2.) folgt:

$$\sin\alpha^2 = \frac{2\sin\frac{1}{2}\alpha^2}{1+\triangle\frac{\alpha^2}{2}}, \quad \cos\alpha^2 = \frac{\cos\alpha_2+\triangle\alpha_2}{1+\triangle\frac{\alpha_2}{\alpha}}, \quad \mathrm{tang}\,\alpha^2 = \frac{2\sin\frac{1}{2}\alpha^2}{\cos\alpha_2+\triangle\alpha_2},$$

was in (1.) substituirt, giebt:

$$3.\quad (\triangle\alpha)^2 = \frac{\cos\alpha_2+\triangle\alpha_2}{\cos\alpha_2+1}.$$

Nach der oben angeführten Abhandlung ist aber:

$$4.\quad \triangle(\alpha_2) = \sqrt{(1-c^2\sin(\alpha_2)^2)} = \frac{R-a}{R+a}, \quad \cos(\alpha_2) = \frac{r}{R+a},$$

$$5.\quad 1-cc = 1-\varkappa\varkappa = \frac{(R-a)^2-r^2}{(R+a)^2-r^2}.$$

Dieselben Formeln gelten für α, R', a' und r'.

$$6.\quad \triangle(\alpha_2) = \sqrt{(1-c^2\sin(\alpha_2)^2)} = \frac{R'-a'}{R'+a'}, \quad \cos(\alpha_2) = \frac{r'}{R'+a'},$$

$$7.\quad 1-cc = 1-\varkappa\varkappa = \frac{(R'-a')^2-r'^2}{(R'+a')^2-r'^2}.$$

Setzt man also:

$$\frac{R+a}{r} = p, \quad \frac{R-a}{r} = q,$$
$$\frac{R'+a'}{r'} = p', \quad \frac{R'-a'}{r'} = q',$$

so ist aus (5. und 7.):

$$\left(\frac{q^2-1}{p^2-1}\right) = \left(\frac{q'^2-1}{p'^2-1}\right).$$

Ferner giebt die Substitution von (4. und 6.) in (3.):

$$\frac{q+1}{p+1} = \frac{q'^2}{p'^2},$$

woraus folgt:

$$\frac{q-1}{p-1} = \frac{p'^2}{q'^2} \cdot \left(\frac{q'^2-1}{p'^2-1}\right).$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt:

$$qp'^2 - pq'^2 = q'^2 - p'^2, \quad qq'^2(p'^2-1) - pp'^2(q'^2-1) = p'^2 - q'^2,$$

woraus man ableitet:

$$8. \quad q = \frac{q'^2+q'^2p'^2-p'^2}{q'^2-q'^2p'^2+p'^2},$$

$$9. \quad p = \frac{p'^2+p'^2q'^2-q'^2}{p'^2-q'^2p'^2+q'^2}.$$

Setzt man diese Werthe von q und p in die Bedingungsgleichung für das nEck, so erhält man die für das $2n$Eck.

Es ist die Eulersche Bedingungsgleichung für das Dreieck:

$$(R+a-r)(R-a-r) = r^2,$$

und für das Viereck:

$$(R+a-r)(R-a-r)(R+a+r)(R-a+r) = r^4,$$

welche nach Einführung per Gröfsen p und q,

$$p = \frac{R+a}{r} \quad \text{und} \quad q = \frac{R-a}{r},$$

folgende Form bekommen:

$$(p-1)(q-1) = 1 \quad \text{und} \quad (p^2-1)(q^2-1) = 1.$$

Für das Fünfeck findet man folgende sehr einfache Formel, welche auf die längeren Bedingungsgleichungen der Herren Steiner und Fufs nach einigen Reductionen gebracht werden kann:

$$4p^2q^2(p-1)(q-1) = (p^2+q^2-p^2.q^2)^2.$$

Wenn man nun in diesen 3 letzten Formeln die Werthe von p und q aus (8.) und (9.) substituirt, so erhält man nach Fortlassung der Striche bei den Buchstaben p' und q':

für das Sechseck:

$$4p^2q^2(p^2-1)(q^2-1) = (p^2+q^2-p^2q^2)^2,$$

für das Achteck:

$$16p^4q^4(p^2-1)(q^2-1) = (p^2+q^2-p^2q^2)^4,$$

für das Zehneck:

$$16p^2q^2(p^2-1)(q^2-1)$$
$$= \left(\frac{[p^4-(p^2q^2-q^2)^2]^2+[q^4-(p^2q^2-p^2)^2]^2+[p^4q^4-(p^2-q^2)^2]^2}{p^4q^4-(p^2-q^2)^2}\right)^2.$$

Die hier aufgestellten Formeln für das Sechseck und Achteck lassen sich, nach einigen Reductionen, auf die von Herrn Steiner und Fufs angegebenen bringen.

Substituirt man in die Formeln für das Sechseck und Achteck die Werthe von p und q aus (8. und 9.), so erhält man nach Weglassung der Striche bei p' und q' folgende Formeln:

für das Zwölfeck:

$$64p^4q^4(p^2-1)(q^2-1)$$
$$= \left(\frac{[p^4-(p^2q^2-q^2)^2]^2+[q^4-(p^2q^2-p^2)^2]^2+[p^4q^4-(p^2-q^2)^2]^2}{p^4q^4-(p^2-q^2)^2}\right)^2,$$

für das Sechszehneck:

$$256p^4q^4(p^2-1)(q^2-1)$$
$$= \left(\frac{[p^4-(p^2q^2-q^2)^2]^2+[q^4-(p^2q^2-p^2)^2]^2+[p^4q^4-(p^2-q^2)^2]}{[p^4q^4-(p^2-q^2)^2](p^2+q^2-p^2q^2)}\right)^4.$$

II.

Die Bedingungsgleichungen für das sphärische Dreieck und Viereck findet man auf folgendem geometrischen Wege.

Es seien (Taf. III. Fig. 2.) auf der Kugel-Oberfläche zwei kleine Kreise gegeben, von denen der eine, mit dem Pole C und dem Abstande der Peripherie von dem Pole $= R$, den andern mit dem Pole c und dem Abstande der Peripherie vom Pole $= r$, umschliefsen möge. Die Distanz der beiden Pole, eben so wie R und r, Bogen eines gröfsten Kreises, heifse a. Aus irgend einem Puncte A des Kreises C lege man den Bogen eines gröfsten Kreises als Tangente an den Kreis c, und zwar am Puncte M, welche den ersten wieder in A' schneidet; auf gleiche Weise ziehe man an den Kreis c die Tangenten $A'A''$, $A''A'''$ u. s. w., wo A, A', A'' u. s. w. in der Peripherie des gröfsern Kreises C liegen, und $AA'A''\ldots$ ein umschlossenes sphärisches Polygon ist, das dem Kreise C eingeschrieben und dem Kreise c umgeschrieben ist. Man lege durch cC einen gröfsten Kreis, welcher die Peripherie des Kreises C, rechts in P und links

in Q schneidet, so dafs

$$CP = R, \quad cP = R - a \quad \text{und} \quad cQ = R + a$$

ist.

Man nenne ferner die Winkel

$$ACP = 2\varphi, \quad A'CP = 2\varphi', \quad A''CP = 2\varphi'' \quad \text{u. s. w.}$$

Wenn man aber in der Figur von P aus eine Tangente obiger Art an die Peripherie des Kreises c legt und sie den Kreis C in P' schneidet, so sei $PCP' = 2\beta$.

Es gelten für die rechtwinkligen sphärischen Dreiecke AMc und $A'Mc$ folgende zwei Formeln:

$$\cos AM = \frac{\cos Ac}{\cos r} = \frac{\cos R\cos a + \sin R\sin a\cos 2\varphi}{\cos r},$$

und

$$\cos A'M = \frac{\cos A'c}{\cos r} = \frac{\cos R\cos a + \sin R\sin a\cos 2\varphi'}{\cos r}.$$

Nun ist:

$$\sin\frac{AM}{2}\cos\frac{A'M}{2} + \sin\frac{A'M}{2}\cos\frac{AM}{2} = \sin\frac{AA'}{2}.$$

Wenn man folglich setzt:

$$\varkappa = \frac{\cos R\cos a}{\cos r} \quad \text{und} \quad \varkappa' = \frac{\sin R\sin a}{\cos r},$$

so erhält man:

$$10. \quad 2\sin R\sin(\varphi' - \varphi) =$$
$$\sqrt{\{[1-(\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi)][1+(\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi')]\}} + \sqrt{\{[1+(\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi)][1-(\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi')]\}}.$$

Wenn man hierin $2\varphi = 0$ und $2\varphi' = 2\beta$ setzt, so erhält man eine Relation zwischen R, a, r und β; welche nach Einführung der Werthe von $\varkappa$ und $\varkappa'$ wird:

$$\left.\begin{aligned}&\sqrt{\{[\cos r - \cos(R-a)][\cos r + \cos R\cos a + \sin R\sin a\cos 2\beta]\}}\\ &+\sqrt{\{[\cos r + \cos(R-a)][\cos r - \cos R\cos a - \sin R\sin a\cos 2\beta]\}}\end{aligned}\right\} = 2\sin R\cos r\sin\beta.$$

Wenn man statt $\cos 2\beta$ und $\sin\beta$ die Werthe durch $\operatorname{tang}\beta^2$ ausgedrückt schreibt, nemlich:

$$\cos 2\beta = \frac{1-\operatorname{tang}\beta^2}{1+\operatorname{tang}\beta^2} \quad \text{und} \quad \sin\beta = \frac{\operatorname{tang}\beta}{\sqrt{(1+\operatorname{tang}\beta^2)}},$$

so erhält man nach einiger Reduction:

$$\left.\begin{aligned}&\sqrt{\{[\cos r - \cos(R-a)]^2 + \operatorname{tang}\beta^2[\cos r + \cos(R+a)][\cos r - \cos(R-a)]\}}\\ &+\sqrt{\{[\cos r - \cos(R-a)]^2 + \operatorname{tang}\beta^2[\cos r - \cos(R+a)][\cos r + \cos(R-a)]\}}\end{aligned}\right\} = 2\sin R\cos r\operatorname{tang}\beta.$$

Hieraus erhält man nach einigen Reductionen folgende einfache Formel:

$$11. \quad \operatorname{tang}\beta^2 = \frac{\sin(R-a)^2 - \sin r^2}{\cos R^2\sin r^2}.$$

Wenn man nun von allen sich schliefsenden n Ecken, welche um den Kreis c beschrieben und dem Kreise C eingeschrieben sind, dasjenige nimmt, dessen eine Ecke in P liegt, und man die Ecken der Reihe nach P', P'' u. s. w. $P^{(n-1)}$ nennt, so ist es klar, dafs in diesem speciellen Falle der gröfste Bogen Cc das n Eck in zwei gleiche und ähnliche Theile theilt.

Hieraus folgt, dafs wenn man die Winkel alle von CP an nach einer Richtung rechnet und P^m eine beliebige der Ecken ist:

$$\angle PCP^{(m)} + \angle PCP^{(n-m)} = 2\pi \text{ ist.}$$

Ist daher $n = 2h$, so ist:

$$\angle PCP^{(h)} + \angle PCP^{(h)} = 2\pi, \quad \angle PCP^{(h)} = \pi,$$

so dafs also die Ecke $P^{(h)}$ in Q fällt.

Ist $n = 2h+1$, so ist:

$$\angle PCP^{(h)} + PCP^{(h+1)} = 2\pi,$$

woraus folgt:

$$\operatorname{arc} P^{(h)}Q = \operatorname{arc} P^{(h+1)}Q;$$

also steht der Bogen $P^{\left(\frac{n+1}{2}\right)}P^{\left(\frac{n+3}{2}\right)}$ auf PP' senkrecht.

Wenn man ferner die Berührungspuncte der Tangenten PP', $P'P''$ u. s. w. M', M'' u. s. w. nennt, so fällt für $n = 2h+1$, $M^{(h)}$ in den Bogen Cc.

Für das sphärische Dreieck ist also:

$$\angle P'CM'' = \pi - 2\beta,$$

und daher:

$$\cos P'CM'' = \frac{\operatorname{tang} M''C}{\operatorname{tang} P'C},$$

oder, da

$$M''C = M''C - Cc = r - a,$$

so ist:

$$\cos 2\beta = \frac{\operatorname{tang}(a-r)}{\operatorname{tang} R},$$

woraus folgt:

$$\frac{1-\cos 2\beta}{1+\cos 2\beta} = \frac{\operatorname{tang} R - \operatorname{tang}(a-r)}{\operatorname{tang} R + \operatorname{tang}(a-r)},$$

oder

$$\operatorname{tang}\beta^2 = \frac{\sin(R+r-a)}{\sin(R-r+a)}.$$

Dies mit der obigen Formel (11.)

$$\operatorname{tang}\beta^2 = \frac{\sin(R-a)^2 - \sin r^2}{\cos R^2 \sin r^2} = \frac{\sin(R+a-r)\sin(R-a-r)}{\cos R^2 \sin r^2}$$

gleich gesetzt, giebt:

$$\frac{\sin(R+r-a)}{\sin(R+a-r)} = \frac{\sin(R+a-r)\sin(R-a-r)}{\cos R^2 \sin r^2},$$

oder

$$12. \quad \sin(R-a-r)\sin(R+a-r) = \cos R^2 \sin r^2.$$

Setzt man den Radius der Kugel ∞, und behält die Gröfsen der 2ten Ordnung, so erhält man:

$$(R-a-r)(R+a-r) = r^2,$$

welches die bekannte Relation für das Dreieck in der Ebene ist.

In dem Falle, dafs $a=0$ ist, haben beide Kreise einen Pol, welcher Fall der Concentricität der zwei Kreise in der Ebene correspondirt. Es gilt daher die Bedingung:

$$\operatorname{tang} R = 2\operatorname{tang} r,$$

für ein gleichseitiges sphärisches Dreieck.

Beim Vierecke ist:

$$\angle PCP' + \angle P'CP'' = 2\pi \quad \text{und} \quad \angle PCP'' = \pi, \quad \angle PCP' = 2\beta.$$

Folglich, setzt man in der allgemeinen Formel

$$2\varphi = 2\beta \quad \text{und} \quad 2\varphi' = \pi,$$

so ist:

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{\{[\cos r-(\cos R\cos a+\sin R\sin a\cos 2\beta)][\cos r+\cos(R+a)]\}}\\ +\sqrt{\{[\cos r+\cos R\cos a+\sin R\sin a\cos 2\beta][\cos r-\cos(R+a)]\}}\end{array}\right\}=2\sin R\cos r\cos\beta.$$

Setzt man

$$\frac{1-\operatorname{tang}\beta^2}{1+\operatorname{tang}\beta^2} = \cos 2\beta \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{(1+\operatorname{tang}\beta^2)}} = \cos\beta,$$

so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{\{[\cos r-\cos(R-a)][\cos r+\cos(R+a)]+\operatorname{tang}\beta^2[\cos r^2-\cos(R+a)^2]\}}\\ +\sqrt{\{[\cos r+\cos(R-a)][\cos r-\cos(R+a)]+\operatorname{tang}\beta^2[\cos r^2-\cos(R+a)^2]\}}\end{array}\right\}=2\sin R\cos r,$$

woraus man nach einiger Reduction erhält:

$$\operatorname{tang}\beta^2 = \frac{\cos R^2\sin r^2}{\sin(R+a)^2-\sin r^2};$$

dies der obigen Formel (11.)

$$\operatorname{tang}\beta^2 = \frac{\sin(R-a)^2-\sin r^2}{\cos R^2\sin r^2}$$

gleich gesetzt, giebt:

$$[\sin(R+a)^2-\sin r^2][\sin(R-a)^2-\sin r^2] = \cos R^2\sin r^4,$$

oder

13. $$\sin(R+a+r)\sin(R+a-r)\sin(R-a+r)\sin(R-a-r) = \cos R^2\sin r^4,$$

welche Formel Herr Steiner im 3ten Hefte des 2ten Bandes ohne Beweis mittheilt.

Setzt man den Radius der Kugel $=\infty$, und behält nur die Gröfse der 4ten Ordnung bei, so erhält man die bekannte Formel für die Ebene:

$$(R+a+r)(R+a-r)(R-a+r)(R-a-r) = r'^4.$$

Setzt man $a=0$, so ist

$$\operatorname{tang} R^2 = 2\operatorname{tang} r^2:$$

die Bedingungsgleichung bei einem gleichseitigen sphärischen Viereck, welches dem Kreise R eingeschrieben und dem kleinen, zu demselben Pole C gehörigen Kreise r umschrieben ist.

Obgleich endlich beide Formeln, die für das sphärische Dreieck und Viereck, nur für den speciellen Fall berechnet sind, dafs eine Ecke derselben in P liegt, so wird es sich später zeigen, dafs sie auch für jedes beliebig liegende Dreieck und Viereck gelten; indem allgemein der Satz bewiesen wird:

„Wenn zwischen zwei kleinen Kugelkreisen, von irgend einem Puncte des gröfseren aus, sich ein geschlossenes sphärisches Vieleck von der Art beschreiben läfst, dafs die Seiten Tangenten des kleinen Kreises werden, und der gröfsere ihm umgeschrieben sei, so läfst sich von jedem andern Puncte des gröfsern Kreises ein geschlossenes sphärisches Vieleck von obiger Beschaffenheit und mit eben so viel Seiten beschreiben."

III.

Vermittelst der elliptischen Transcendenten kann man die vorgelegte Aufgabe in aller Allgemeinheit lösen, indem man sie auf die Theilung dieser Transcendenten zurückführt.

Nimmt man in (Taf. III. Fig. 2.) eine an AA' unendlich nahe Tangente DD' an, so dafs DA und $D'A'$ unendlich kleine Gröfsen sind, so ist:

$$\angle ADM = 180^\circ - \angle MD'A' \quad \text{und} \quad \angle AMD = \angle A'MD'.$$

Wenn man sich aber der früher angegebenen Bezeichnung bedient, so ist:

$$AD = \sin R\,\partial(2\Phi), \qquad A'D' = \sin R\,\partial(2\Phi'),$$
$$\sin AD : \sin AM = \sin AMD : \sin ADM,$$
$$\sin A'D' : \sin A'M = \sin A'MD' : \sin MD'A',$$

also

$$\frac{\partial(2\varphi)}{\partial(2\varphi')} = \frac{\sqrt{\left(1-\frac{[\cos R\cos a+\sin R\sin a\cos(2\varphi)]^2}{\cos r^2}\right)}}{\sqrt{\left(1-\frac{[\cos R\cos a+\sin R\sin a\cos(2\varphi')]^2}{\cos r^2}\right)}},$$

oder, wenn man $\varkappa$ und $\varkappa'$ wieder einführt, nemlich:

$$\varkappa = \frac{\cos R\cos a}{\cos r} \quad \text{und} \quad \varkappa' = \frac{\sin R\sin a}{\cos r},$$

so erhält man:

$$14. \quad \frac{\partial(2\varphi)}{\sqrt{[1-(\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi)^2]}} = \frac{\partial(2\varphi')}{\sqrt{[1-(\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi')^2]}}.$$

Setzt man nun:

$$\int_0^{2\varphi} \frac{\partial(2\varphi)}{\sqrt{[1-(\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi)]}} = \Pi(2\varphi), \quad \int_0^{2\varphi'} \frac{\partial(2\varphi)}{\sqrt{[1-(\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi)]}} = \Pi(2\varphi'),$$
$$\int_0^{2\beta} \frac{\partial(2\varphi)}{\sqrt{[1-(\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi)]}} = \Pi(2\beta);$$

so ist

$$\Pi(2\varphi') = \Pi(2\varphi) + \Pi(2\beta)$$

das vollständige Integral, indem die der Differentialgleichung (14.) willkürliche Constante desselben dadurch bestimmt wird, dafs sie, da für $\varphi = 0$, $\varphi' = \beta$ ist, $= \Pi(2\beta)$ wird.

Nach einer, der von Herrn Professor Jacobi gegebenen analogen Bezeichnung ist:

$$\Pi(2\varphi') = U', \quad \Pi(2\varphi) = U, \quad \Pi(2\beta) = T,$$

und

$$2\varphi' = AM(U'), \quad 2\varphi = AM(U), \quad 2\beta = AM(T),$$

und daher

$$U' = U + T$$

das vollständige Integral der Differential-Gleichung (14.).

Das algebraische Integral derselben aber ist die Formel (10.):

$$2\sin R \sin(\varphi'-\varphi) = \sqrt{\{[1-(\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi)][1+(\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi')]\}} + \sqrt{\{[1+(\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi)][1-(\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi')]\}}.$$

Aber wenn

$$m = \varkappa + \varkappa'\cos 2\varphi \quad \text{und} \quad m' = \varkappa + \varkappa'\cos 2\varphi'$$

ist, so wird das algebraische Integral:

$$\sqrt{((1-m)(1+m'))} + \sqrt{((1+m)(1-m'))} = 2\sin R \sin(\varphi'-\varphi).$$

Hier ist $\sin R$ die Constante, welche aus der letzten Formel und dem Differential derselben:

$$\varkappa'\{\sqrt{((1-m)(1-m'))} - \sqrt{((1+m)(1+m'))}\} \cdot \left\{\frac{\sin 2\varphi' \,\partial(2\varphi')}{2\sqrt{(1-m'^2)}} + \frac{\sin 2\varphi \,\partial(2\varphi)}{2\sqrt{(1-m^2)}}\right\} = \sin R \cos(\varphi'-\varphi)(\partial 2\varphi - \partial 2\varphi'),$$

eliminirt,

$$\frac{\partial 2\varphi}{\sqrt{(1-(\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi)^2)}} = \frac{\partial 2\varphi'}{\sqrt{(1-(\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi')^2)}}$$

giebt.

IV.

Die Constanten $\varkappa$ und $\varkappa'$ geben folgendes constante Verhältnifs:

$$\cos R \cos a : \sin R \sin a : \cos r = \varkappa : \varkappa' : 1,$$

oder

$$\cos(R-a) : \cos(R+a) : \cos r = (\varkappa+\varkappa') : (\varkappa-\varkappa') : 1,$$

welches in unserer Figur ist:

$$\cos Pc : \cos QC : \cos r = (\varkappa+\varkappa') : (\varkappa-\varkappa') : 1.$$

Man kann dies anwenden um die Multiplication obiger Transcendente für jeden beliebigen Winkel 2β zu construiren.

Da nun aus (11.) die Relation zwischen R, a, r und β gegeben ist, nemlich:

$$\operatorname{tang}\beta^2 = \frac{\sin(R-a)^2 - \sin r^2}{\cos R^2 \sin r^2},$$

so kann man hieraus und durch die zwei Gleichungen

$$\varkappa = \frac{\cos R \cos a}{\cos r}, \quad \varkappa' = \frac{\sin R \sin a}{\cos r},$$

für jedes β, $\varkappa$ und $\varkappa'$, R, a und r bestimmen.

Während nemlich in der Ebene r und a für jedes beliebige α und ein festes R bestimmt werden kann, ist hier r und a schon durch R allein gegeben, und folglich β für jedes R constant, da es ja auch nur einen kleinen Kreis giebt der zu dem gröfsern um C eine solche Lage hat, dafs

$$\cos(R-a) : \cos(R+a) : \cos r$$

ein constantes Verhältnifs wird.

Es ändert sich also mit dem jedesmaligen β auch das R, und zwar nach folgender Gleichung, welche man erhält wenn man in (10.) $\varphi = 0$ und $\varphi' = \beta$ macht:

$$15. \quad \frac{\sqrt{[1-(\varkappa+\varkappa')]}.\sqrt{[1+\varkappa+\varkappa'\cos 2\beta]} + \sqrt{[1+\varkappa+\varkappa']}.\sqrt{[1-\varkappa-\varkappa'\cos 2\beta]}}{2\sin\beta} = \sin R.$$

a und r bestimmt man dann aus den Gleichungen für $\varkappa$ und $\varkappa'$, nemlich:

$$16. \quad \operatorname{tang} a = \frac{\varkappa'}{\varkappa} \operatorname{cotang} R,$$

und

$$17. \quad \cos r^2 = \frac{\cos R^2 \sin R^2}{\varkappa^2 \sin R^2 + \varkappa' \cos R^2}.$$

Um also den Winkel $2\varphi'$ zu finden, der die Eigenschaft hat dafs

$$\Pi(2\varphi') = \Pi(2\varphi) + \Pi(2\beta) \quad \text{oder} \quad U' = U + T$$

ist, beschreibe man zwei kleine Kreise um einen beliebigen Punct C, deren Lage und Gröfse durch die Gleichungen (15., 16. und 17.) bestimmt sind, mache $PCA = 2\varphi$ (Taf. III. Fig. 2.), und lege AA' als Tangente an den Kreis c, so wird $PCA' = 2\varphi'$ sein.

Legt man von A' eine 2te Tangente $A'A''$ an den Kreis c, so ist, da

$$PCA'' = 2\varphi''$$

ist:

$$\Pi(2\varphi'') = \Pi(2\varphi') + \Pi(2\beta) = \Pi(2\varphi) + 2\Pi(2\beta),$$

oder, wenn nach der vorigen Bezeichnung

$$(2\varphi'') = AM(U'')$$

ist:

$$U'' = U' + T' = U + 2T.$$

Schneidet die nach einer Richtung gelegte $n$te Tangente den Kreis C in $A^{(n)}$, und ist $PCA^{(n)}$, nach derselben Richtung genommen, $= 2\varphi^{(n)}$, so ist:

18. $\Pi(2\varphi^{(n)}) = \Pi(2\varphi^{(n-1)}) + \Pi(2\beta) = \Pi(2\varphi^{(n-2)}) + 2\Pi 2\beta \ldots = \Pi 2\varphi + n\Pi 2\beta,$

oder wenn

$$2\varphi^n = AM(U^{(n)}),$$

ist:

$$U^{(n)} = U + mT'.$$

Um einen Winkel $\varphi^{(n)}$ zu finden, von der Eigenschaft dafs

$$\Pi(2\varphi^{(n)}) = \Pi(2\varphi) + n\Pi(2\beta) \quad \text{oder} \quad U^{(n)} = U + nT$$

sei, lege man von A' eine zweite Tangente an den Kreis c, aus A'', wo diese den gröfsern Kreis schneidet, eine dritte u. s. w., alle nach einer Richtung. Es wird dann $A^{(n)}$, wo die $n$te Tangente den gröfsern Kreis schneidet, so beschaffen sein, dafs man erhält:

$$\angle PCA^{(n)} = 2\varphi^{(n)},$$

nach derselben Richtung gemessen.

Um endlich einen Winkel $2\beta_{n)}$ von der Beschaffenheit zu finden, dafs folgende Gleichung Statt findet:

19. $\Pi(2\beta_n) = n\Pi(2\beta) \quad \text{oder} \quad T_{(n)} = nT,$

worin

$$2\beta_n = AM(T_n)$$

ist, darf man in der obigen Construction nur $\varphi = 0$ machen, oder die n Tangenten von P aus zu legen anfangen.

V.

Die analytische Bedingungsgleichung für die Lage und Gröfse zweier Kreise ist, damit von einem beliebigen Puncte A aus ein umgeschlossenes sphärisches n Eck von obiger Beschaffenheit den Bogen $2\varphi_n - 2\varphi$ in der Peripherie des grofsen Kreises von A aus durchmesse, die Formel (18.):

$$\Pi 2\varphi_{(n)} = \Pi 2\varphi + n\Pi 2\beta \quad \text{oder} \quad U^{(n)} = U + nT.$$

Wenn man K' durch die Gleichung

$$AM(K') = 2\pi,$$

bestimmt, d. h.

$$\Pi(2\pi) = K',$$

setzt, so ist, wenn i eine ganze Zahl ist,

$$20.\quad \begin{cases} \Pi(2i\pi+2\varphi) = \Pi(2i\pi)+\Pi(2\varphi), \\ \text{oder, von beiden Seiten } AM \text{ genommen,} \\ 2i\pi + AM.U = AM(iK'+U), \end{cases}$$

denn Beides folgt aus der trigonometrischen Natur des Integrals Π, welwelches mit 2π periodisch ist.

Setzt man also in (18.):

$$2\varphi_n - 2\varphi = 2i\pi,$$

in welchem Falle das von A aus construirte Vieleck sich in A schliefst, so ist, da nach (20.)

$$\Pi(2\varphi_n) - \Pi 2\varphi = \Pi 2i\pi$$

ist,

$$21.\quad \Pi 2i\pi = n.\Pi 2\beta,$$

die Bedingungsgleichung für das sich in A schliefsende Vieleck.

Da in dieser Formel φ gar nicht vorkommt, so kommt es auf den Ort des Anfangspunctes A nicht an. Es ist hierdurch der Lehrsatz von (III.) bewiesen, und die Einschränkung erlaubt, von P aus das Vieleck zu construiren.

So ist das vorgelegte Problem über die sphärischen Vielecke auf die Theilung der elliptischen Transcendente $\Pi(2\pi)$ oder K' in n Theile zurückgeführt, und es ergiebt sich folgendes Theorem:

Theorem 1. Wenn R und r die gröfsten Bogen sind, mit denen zwei kleine Kreise auf der Kugel um C und c beschrieben sind, von denen der eine einem sphärischen nEck umschrieben, der zweite ihm eingeschrieben ist, und man den Bogen eines gröfsten Kreises $Cc = a$ setzt, so ist immer

$$\int_0^{2\beta} \frac{\partial(2\varphi)}{\sqrt{[1-(\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi)^2]}} = \frac{i}{n}\int_0^{2\pi} \frac{\partial(2\varphi)}{\sqrt{[1-(\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi)^2]}},$$

wo i die Anzahl der Umläufe des Vielecks durch die ganze Peripherie bedeutet, und β, $\varkappa$ und $\varkappa'$ durch folgende Gleichungen bestimmt werden:

$$\operatorname{tang}\beta^2 = \frac{\sin(R-a+r)\sin(R-a-r)}{\cos R^2 \sin r^2}, \quad \varkappa = \frac{\cos R\cos a}{\cos r}, \quad \varkappa' = \frac{\sin R\sin a}{\cos r}.$$

Hieraus erhält man zugleich die analytische Bedingungsgleichung zwischen R, a und r; will man sie algebraisch ausdrücken, so geschieht dies mit Hinzuziehung des algebraischen Integrals (10.) unserer Differential-Gleichung:

$$\left.\begin{array}{r} \sqrt{(1-(\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi))}\,\sqrt{(1+\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi')} \\ +\sqrt{(1+\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi)}\,\sqrt{(1-(\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi'))} \end{array}\right\} = 2\sin R\sin(\varphi'-\varphi).$$

VI.

Es ist wünschenswerth das obige elliptische Differential in die gewöhnliche Form der elliptischen Transcendente zu transformiren, um dann die Aufgabe von der Kugel auf die bei der Ebene im Allgemeinen zurückzuführen.

Hiezu dient folgende Transformation: Die gewöhnliche Form der elliptischen Transcendente, welche auch bei der correspondirenden Aufgabe in der Ebene vorkommt, ist

$$\frac{\partial\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin\psi^2)}}.$$

Unsere war (14.)

$$\frac{\partial(2\varphi)}{\sqrt{[1-(\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi)^2]}}.$$

Um letztere in erstere zu transformiren, setze man:

$$\operatorname{tang}\varphi = \sqrt{\left(\frac{1-\varkappa+\varkappa'}{1-\varkappa+\varkappa'}\right)}\operatorname{tang}\psi,$$

so dafs φ und ψ zu gleicher Zeit $=0$ und $=\frac{\pi}{2}$ werden.

Setzt man den Factor von $\operatorname{tang}\psi$, $=g$, so ist

$$\partial(2\varphi) = \frac{2g\,\partial\psi}{(1+g^2\operatorname{tang}\psi^2)\cos\psi^2}.$$

Ferner ist

$$\sqrt{(1-(\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi))} = \sqrt{(1+(\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi))}\,\sqrt{(1-(\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi))}.$$

Setzt man nun:

$$\cos 2\varphi = \frac{1-\operatorname{tang}\varphi^2}{1+\operatorname{tang}\varphi^2} = \frac{1-g^2\operatorname{tang}\psi^2}{1+g^2\operatorname{tang}\psi^2},$$

so ist

$$\sqrt{(1-(\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi))} = \sqrt{\left(\frac{1-(\varkappa+\varkappa')+g^2\operatorname{tang}\psi^2(1-(\varkappa-\varkappa'))}{1+g^2\operatorname{tang}\psi^2}\right)}$$
$$= \cos\psi\sqrt{\left(\frac{1-(\varkappa+\varkappa')}{1+g^2\operatorname{tang}\psi^2}\right)},$$

Ferner erhält man:

$$\sqrt{(1+\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi)} = \sqrt{\left(\frac{1+\varkappa+\varkappa'+g^2\operatorname{tang}\psi^2(1+\varkappa-\varkappa')}{1+g^2\operatorname{tang}\psi^2}\right)}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{1+\varkappa+\varkappa'}{1+g^2\operatorname{tang}\psi^2}\right)}\cdot\sqrt{\left(1+\operatorname{tang}\psi^2\frac{(1+(\varkappa-\varkappa'))(1-(\varkappa+\varkappa'))}{(1-(\varkappa-\varkappa'))(1+(\varkappa+\varkappa'))}\right)}.$$

Aus den drei letzten Formeln folgt:

$$\frac{\partial(2\varphi)}{\sqrt{(1-(\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi)^2)}} = \frac{2}{\sqrt{((1+\varkappa')^2-\varkappa^2)}}\cdot\frac{\partial\psi}{\sqrt{\left(\cos\psi^2-\sin\psi^2\left(\frac{(1-\varkappa')^2-\varkappa^2}{(1+\varkappa')^2-\varkappa^2}\right)\right)}}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{((1+\varkappa')^2-\varkappa^2)}}\cdot\frac{\partial\psi}{\sqrt{\left(1-\frac{4\varkappa'}{(1+\varkappa')^2-\varkappa^2}\cdot\sin\psi^2\right)}}.$$

Da dies die Form des gewöhnlichen elliptischen Differentials ist, und die Construction der Multiplication und Addition desselben in der No. 1. erwähnten Abhandlung angegeben ist, so hat man auch die Construction unseres obigen Differentials auf jene frühere zurückgeführt.

Wir haben oben für das sphärische n Eck obiger Beschaffenheit die Bedingungsgleichung (21.) gehabt:

$$\Pi(2\pi) = n\Pi(2\beta), \quad \text{oder} \quad K' = n.T, \quad \text{oder}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial(2\varphi)}{\sqrt{(1-(\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi)^2)}} = n\int_0^{2\beta} \frac{\partial(2\varphi)}{\sqrt{(1-(\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi)^2)}}.$$

Hieraus wird jetzt

$$\int_0^{\pi} \frac{\partial\psi}{\sqrt{\left(1-\frac{4\varkappa'}{(1+\varkappa')^2-\varkappa^2}\sin\psi^2\right)}} = n\int_0^{\alpha} \frac{\partial\psi}{\sqrt{\left(1-\frac{4\varkappa'}{(1+\varkappa')^2-\varkappa^2}\sin\psi^2\right)}},$$

so dafs zwischen β und α die aus der Transformation abgeleitete Bedingungsgleichung statt findet:

$$\operatorname{tang}\beta = \sqrt{\left(\frac{1-(\varkappa+\varkappa')}{1-(\varkappa-\varkappa')}\right)}\operatorname{tang}\alpha.$$

Wenn man aber

$$\frac{4\varkappa'}{(1+\varkappa')^2-\varkappa^2} = c^2$$

setzt, und die Bedingungen von I. wieder angewendet werden, nemlich:

$$t = \int_0^{\alpha} \frac{\partial\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin\psi^2)}} = F\alpha, \quad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin\psi^2)}} = F\frac{\pi}{2},$$

und

$$\operatorname{am} t = \alpha, \quad \operatorname{am} K = \frac{\pi}{2},$$

so ist das letzte Integral:

$$F\pi = nF\alpha \quad \text{oder} \quad 2K = nt.$$

Dieses ist aber die Bedingung für ein n Eck in der Ebene, und daher folgendes Theorem aufzustellen:

Theorem 2. „Die analytische Bedingungsgleichung für ein n Eck in der Ebene, damit es einem Kreise ein- und dem andern umgeschrieben sei, welche

$$2K = nt$$

ist, für den Modul genommen:

$$c^2 = \frac{4\varkappa'}{(1+\varkappa')^2-\varkappa^2},$$

giebt, verbunden mit der Formel:

$$\operatorname{tang}\beta = \sqrt{\left(\frac{1-(\varkappa+\varkappa')}{1-(\varkappa-\varkappa')}\right)}\operatorname{tang}\alpha,$$

den ersten Polarwinkel $2\beta = PCP'$ von einem sphärischen Vieleck mit eben so vielen Seiten, welches zu 2 kleinen Kugelkreisen dasselbe Verhalten hat, deren Gröfse und Lage durch die Formeln (15., 16. und 17.)

$$\frac{\sqrt{[1-(x+x')]}.\sqrt{[1+x+x'\cos 2\beta]}+\sqrt{[1+x+x']}.\sqrt{[1-x-x'\cos 2\beta]}}{2\sin\beta} = \sin R,$$

$$\operatorname{tang} a = \frac{x'}{x}\operatorname{cotang} R, \quad \cos r^2 = \frac{\cos R^2 \sin R^2}{x^2 \sin R^2 + x' \cos R^2}$$

bestimmt wird.

VII.

Wenn man statt der Gröfsen x und x' ihre Werthe zurück setzt:

$$x = \frac{\cos R \cos a}{\cos r}, \quad x' = \frac{\sin R \sin a}{\cos r},$$

so erhält man:

$$g^2 = \frac{1-(x+x')}{1-(x-x')} = \frac{\sin\frac{(R-a+r)}{2}\sin\frac{(R-a-r)}{2}}{\sin\frac{(R+a+r)}{2}\sin\frac{(R+a-r)}{2}}.$$

Ferner wird:

$$\frac{2}{\sqrt{(1+x')^2-x^2}} = \frac{\cos r}{\sqrt{\left(\sin\frac{R+a+r}{2}\sin\frac{(R+a-r)}{2}\cos\frac{R-a-r}{2}\cos\frac{R-a+r}{2}\right)}};$$

endlich wird:

$$c^2 = \frac{4x'}{(1+x+x')1-(x-x')} = \frac{\sin R \sin a \cos r}{\sqrt{\left(\sin\frac{R+a+r}{2}\sin\frac{(R+a-r)}{2}\cos\frac{R-a-r}{2}\cos\frac{R-a+r}{2}\right)}},$$

woraus folgt:

$$1-c^2 = \frac{\operatorname{tang}\left(\frac{R-a-r}{2}\right)\operatorname{tang}\left(\frac{R-a+r}{2}\right)}{\operatorname{tang}\frac{R+a+r}{2}\operatorname{tang}\frac{R+a-r}{2}}.$$

Hienach wird das allgemeine Differential:

$$\left\{\frac{\cos r}{\cos\frac{R-a+r}{2}\cos\frac{R-a-r}{2}\sin\frac{R+a+r}{2}\sin\frac{R+a-r}{2}}\right\},$$

$$\frac{\partial\psi}{\sqrt{\left(1-\frac{\cos r \sin R \sin a \sin\psi^2}{\cos\frac{R-a+r}{2}\cos\frac{R-a-r}{2}\sin\frac{R+a+r}{2}\sin\frac{R+a-r}{2}}\right)}}.$$

Die Formeln aus No. I. für $\cos\alpha$ und $1-cc$ mögen jetzt verglichen werden mit den Ausdrücken für diese Gröfsen auf der Kugel. Es war:

$$\cos\alpha = \frac{r}{R+a}, \qquad 1-cc = \frac{\left(\frac{R-a}{r}\right)^2-1}{\left(\frac{R+a}{r}\right)^2-1},$$

und für die Kugel-Oberfläche:

$$\tan\beta^2 = \frac{\sin(R-a)^2-\sin r^2}{\cos R^2 \sin r^2}, \qquad 1-cc = \frac{\operatorname{tang}\left(\frac{R-a+r}{2}\right)\operatorname{tang}\frac{R-a-r}{2}}{\operatorname{tang}\frac{R+a+r}{2}\operatorname{tang}\left(\frac{R+a-r}{2}\right)}.$$

Mit Anwendung der Formel:

$$\operatorname{tang}\beta = \sqrt{\left(\frac{\sin\frac{R-a-r}{2}\sin\frac{R-a+r}{2}}{\sin\frac{R+a-r}{2}\sin\frac{R+a+r}{2}}\right)}\operatorname{tang}\alpha$$

erhält man endlich folgende Gleichungen:

$$\frac{\operatorname{tang}\left(\frac{R-a+r}{2}\right)\operatorname{tang}\left(\frac{R-a-r}{2}\right)}{\operatorname{tang}\frac{R+a+r}{2}\operatorname{tang}\frac{R+a-r}{2}} = \frac{\left(\frac{R-a}{r}\right)^2-1}{\left(\frac{R+a}{r}\right)^2-1}$$

und

$$\frac{4\sin\frac{R-a+r}{2}\sin\frac{R-a-r}{2}\cos\frac{R-a+r}{2}\cos\frac{R-a-r}{2}}{\operatorname{coc} R^2\sin r^2}$$

$$= \left(\frac{\sin\frac{R-a+r}{2}\sin\frac{R-a-r}{2}}{\sin\frac{R+a+r}{2}\sin\frac{R+a-r}{2}}\right)\cdot\left\{\left(\frac{R+a}{r}\right)^2-1\right\},$$

woraus folgt:

22. $$\frac{R+a+r}{r} = \frac{2\sin\frac{R+a+r}{2}\cos\frac{R-a+r}{2}}{\cos R\sin r} = \frac{\sin(R+r)+\sin a}{\cos R\sin r},$$

23. $$\frac{R+a-r}{r} = \frac{2\sin\frac{R+a-r}{2}\cos\frac{R-a-r}{2}}{\cos R\sin r} = \frac{\sin(R-r)+\sin a}{\cos R\sin r},$$

24. $$\frac{R-a+r}{r} = \frac{2\sin\frac{R-a+r}{2}\cos\frac{R+a+r}{2}}{\cos R\sin r} = \frac{\sin(R+r)-\sin a}{\cos R\sin r},$$

25. $$\frac{R-a-r}{r} = \frac{2\sin\frac{R-a-r}{2}\cos\frac{R+a-r}{2}}{\cos R\sin r} = \frac{\sin(R-r)-\sin a}{\cos R\sin r}.$$

Es folgt hieraus:

$$\frac{R}{r} = \frac{\operatorname{tang} R}{\operatorname{tang} r} \quad \text{und} \quad \frac{a}{r} = \frac{\sin a}{\cos R\sin r}.$$

Es finden sich diese Formeln alle beim Dreieck und Viereck bestätigt, und im Allgemeinen gilt daher folgendes Theorem:

Thorem 3. „Wenn man eine Bedingungs-Gleichung zwischen R, a und r für ein n Eck in der Ebene hat, welche dem Kreise R ein- und dem Kreise r umgeschrieben ist, und man folgende Substitution anstellt:

$$\frac{R}{r} = \frac{\operatorname{tang} R}{\operatorname{tang} r}, \qquad \frac{a}{r} = \frac{\sin a}{\cos R \sin r},$$

so erhält man unmittelbar die correspondirende Bedingungs-Gleichung zwischen R, r und a auf der Kugel-Oberfläche für ein sphärisches Polygon von gleich vielen Seiten."

VIII.

Wir wollen dies Theorem am sphärischen Dreieck und Viereck obiger Beschaffenheit prüfen, wofür in No. III. die Formeln (12. und 13.) auf geometrischem Wege abgeleitet sind.

Die Formel für das Dreieck in der Ebene ist:

$$(R+a-r)(R-a-r) = r^2,$$

hieraus folgt aus (23. und 25.) für das sphärische Dreieck:

$$\sin(R+a-r)\sin(R-a-r) = \cos R^2 \sin r^2.$$

Die Formel für das Viereck in der Ebene ist:

$$(R+a-r)(R-a-r)(R+a+r)(R-a+r) = r^4;$$

hieraus folgt aus (22., 23., 24. und 25.) für das spärische Viereck:

$$\sin(R+a+r)\sin(R+a-r)\sin(R-a+r)\sin(R-a-r) = \cos R^4 \sin r^4.$$

Beide stimmen mit den obigen völlig überein.

Die Formel für das Fünfeck in der Ebene war:

$$4p^2q^2(p-1)(q-1) = (p^2+q^2-p^2.q^2)^2$$

oder

$$4p^2q^2(p-1)(q-1) = [1-(p^2-1)(q^2-1)]^2.$$

Dieses giebt, wenn man für p und q die Werthe setzt,

$$p = \frac{R+a}{r} \quad \text{und} \quad q = \frac{R-a}{r}:$$

$$\frac{4(R+a)^2}{r^2}\cdot\frac{(R-a)^2}{r^2}\cdot\left(\frac{R+a-r}{r}\right)\cdot\left(\frac{R-a-r}{r}\right) = \left[1-\left(\frac{(R+a)^2-r^2}{r^2}\right)\cdot\left(\frac{(R-a)^2-r^2}{r^2}\right)\right]^2.$$

Da nun aus den Transformationsformeln (22., 23., 24. und 25.)

$$\frac{(R+a)^2}{r^2}\cdot\frac{(R-a)^2}{r^2} = \left(\frac{\sin R^2\cos r^2 - \sin a^2}{\cos R^2 \sin r^2}\right)^2,$$

so folgt für das sphärische Fünfeck folgende Bedingungs-Gleichung:

$$4(\sin R^2\cos r^2 - \sin a^2)^2 \sin(R+a-r)\sin(R-a-r)\cos R^2 \sin r^2$$
$$= [\cos R^4 \sin r^4 - \sin(R+a+r)\sin(R+a-r)\sin(R-a+r)\sin(R-a-r)]^2.$$

Die Formel für das Sechseck in der Ebene ist:

$$\frac{4(R+a)^2}{r^2}\cdot\frac{(R-a)^2}{r^2}\cdot\left(\frac{(R+a)^2-r^2}{r^2}\right)\cdot\left(\frac{(R-a)^2-r^2}{r^2}\right)$$
$$=\left[1-\left(\frac{(R+a)^2-r^2}{r^2}\right)\cdot\left(\frac{(R-a)^2-r^2}{r^2}\right)\right]^2.$$

Auf ähnlichem Wege als beim Fünfeck erhält man für das sphärische Sechseck folgende Formel:

$$4(\sin R^2\cos r^2-\sin a^2)^2\sin(R+a+r)\sin(R+a-r)\sin(R-a+r)\sin(R-a-r)$$
$$=[\cos R^4\sin r^4-\sin(R+a+r)\sin(R+a-r)\sin(R-a+r)\sin(R-a-r)]^2.$$

Die Formel für das Achteck in der Ebene ist:

$$16.\quad\frac{(R+a)^4}{r^4}\cdot\frac{(R-a)^4}{r^4}\cdot\left(\frac{(R+a)^2-r^2}{r^2}\right)\cdot\left(\frac{(R-a)^2-r^2}{r^2}\right)$$
$$=\left[1-\left(\frac{(R+a)^2-r^2}{r^2}\right)\cdot\left(\frac{(R-a)^2-r^2}{r^2}\right)\right]^4.$$

Aus denselben obigen Transformationsformeln (22., 23., 24. und 25.) folgt:

$$16(\sin R^2\cos r^2-\sin a^2)^4\cos R^4\sin r^4\sin(R+a+r)\sin(R+a-r)\sin(R-a+r)\sin(R-a-r)$$
$$=[\cos R^4\sin r^4-\sin(R+a+r)\sin(R+a-r)\sin(R-a+r)\sin(R-a-r)]^4.$$

Königsberg, den 1. Mai 1829.

19.

Über ein neues Princip der Geometrie und den Gebrauch allgemeiner Symbole und unbestimmter Coëfficienten.

(Von Herrn Prof. *Plücker* zu Bonn.)

---

1. In neuester Zeit ist die eine grofse Hälfte der Geometrie, die von Gröfsen-Bestimmungen unabhängig ist, und die H. Gergonne aus diesem Grunde *Géométrie de situation* genannt hat, mit besonderer Vorliebe ausgebildet worden. Hier ist es, wo die verschiedenen Projections-Methoden, vereint mit dem *principe de continuité*, auf eine überraschend leichte Art zu einer unzähligen Menge von Resultaten führen. Hier ist aber auch das Feld, wo die Vortheile der allgemeinen analytischen Methode sich am augenscheinlichsten darstellen. Ein Symbol, das die allgemeine Gleichung der Linie irgend einer Ordnung bezeichnet, stellt mithin auch alle möglichen einzelnen ebenen Curven dar, die man durch irgend eine Projections-Art einer, als gegeben betrachteten Curve dieser Ordnung erhalten kann. Wir brauchen also hier nicht zu projiciren. Die reinen Situations-Beziehungen gegebener Curven oder Flächen zu einander sind durch Gleichungen zwischen den, diese Curven oder Flächen vertretenden Symbolen und unbestimmten Coëfficienten gegeben: wir brauchen also hier nichts von der Proportionen-Geometrie (nicht die harmonische Theilung, nicht die Theorie der Transversalen) zu entlehnen; auch nicht in den einfachern Fällen, die das Projections-Verfahren nachher zu verallgemeinern lehrt. Und endlich die Theorie der idealen Chorden, die Hauptgrundlage des fruchtbaren *principe de continuité*, ist nach meiner Ansicht nichts Anders als eine geometrische Umschreibung der algebraischen Theorie der imaginären Wurzeln solcher Gleichungen, zu denen man gelangt, wenn man die Coordinaten zwischen den Gleichungen zweier Curven eliminirt: das Princip ist also schon von selbst in der allgemeinen analytischen Behandlung enthalten, und hat hier nichts Gewagtes, wie in der rein geometrischen Behandlung, für welche mir

dasselbe, dessen ungeachtet, die schönste und eine nothwendige Erweiterung däucht.

Das, was die beiden in Rede stehenden Methoden mit einander gemein haben und wovon bei den alten Geometern, die mit ängstlicher Gewissenhaftigkeit alles Einzelne zusammenreihen, fast keine Spur vorkommt, sind jene allgemeinen Gesichtspuncte oder Principien, unter denen sie die Sätze zusammenfassen und dadurch aus einzelnen bewiesenen Sätzen sogleich viele ableiten. Hierhin gehören zunächst die Theorie des Projicirens und das *principe de continuité*, deren Vortheile, nach dem oben Bemerkten, in der Verbindung allgemeiner Symbole vermittelst unbestimmter Coëfficienten einschliefslich enthalten sind. Hierhin gehört die Poncelet-, Gergonnesche *Théorie des polaires réciproques* (*principe de dualité*), die jeden Satz verdoppeln lehrt und die nur ein specieller Fall des Princips der Variation der Constanten ist, über das ich bereits schon an einem andern Orte einige Andeutungen gegeben habe und das ich später mit aller Ausführlichkeit behandeln werde. Hieran reiht sich endlich auch dasjenige neue Princip, von dem am Ende dieses Aufsatzes kurz die Rede sein wird, nach welchen man sogleich alle Sätze der linearen Situations-Geometrie auf die Curven irgend einer beliebigen Ordnung im Allgemeinen, und insbesondere auch auf Kreise etc. übertragen kann.

Zuvörderst ist es aber nothwendig zu zeigen, wie solche Sätze, die sich auf den Durchschnitt von geraden Linien beziehen, sich, indem man sie direct angreift, vermittelst allgemeiner Symbole und unbestimmter Coëfficienten heweisen lassen. Hier mufs ich mich auf ein Paar Beispiele beschränken, die einen Theil einer gröfsern Abhandlung bilden. Neue Sätze zu beweisen, liegt hier natürlich nicht in meiner Absicht, wohl aber, nebenher wenigstens, durch ein passendes Beispiel zu belegen, wie jeder hierher gehörige Satz, auch der zusammengesetzteste, sich ohne Mühe der Methode schmiegt. Hiernach wendete sich meine Aufmerksamkeit auf eine Gruppe von Sätzen die im Maihefte des Jahres 1828 der zu Montpellier erscheinenden *Annales des mathématiques* zum Beweise vorgelegt worden ist, und die mir vorzugsweise elegant schien. Diese Auswahl mufste mir um so passender scheinen, als seitdem durchaus nichts weiter über diese Gruppe von Sätzen erfolgt ist, und wie ich jetzt glauben mufs, auch ihr Urheber dieselbe nicht bewiesen hat, da sie zum Theil falsch sind.

§. 1.

Beispiele des Gebrauchs allgemeiner Symbole und unbestimmter Coëfficienten.

2. „Wenn die Seiten zweier Dreiecke sich, paarweise genommen, in solchen drei Puncten schneiden, die in gerader Linie liegen, so erhält man aufserdem noch sechs Durchschnittspuncte. Wenn man je zwei dieser sechs Puncte durch gerade Linien verbindet, so erhält man fünf und vierzig neue Durchschnittspuncte, von denen (die obigen drei in gerader Linie liegenden mitgerechnet) sechszig mal drei in gerader Linie liegen."

Wir wollen die Seiten der beiden Dreiecke durch die Gleichungen:

$$a = 0,\quad b = 0,\quad c = 0;\quad a' = 0,\quad b' = 0,\quad c' = 0$$

und diejenige gerade Linie, auf welcher die drei Durchschnitte derselben liegen, durch:

$$d = 0$$

darstellen. Alsdann sind die Bedingungen des vorstehenden Satzes durch folgende Gleichungen ausgedrückt:

$$a + a' = d,^{*})\quad b + b' = d,\quad c + c' = d,$$

oder auch, da über die gerade Linie d (deren Gleichung: $d = 0$) durchaus keine nähere Bestimmung im Satze vorkommt, durch folgende:

$$a + a' = b + b' = c + c'.$$

Wir erhalten alsdann, als einzelnen Fall des obigen Satzes, folgende drei Puncte:

$$[a,\ (b, c';\ b', c)],\quad [b,\ (a, c';\ a', c)],\quad [c,\ (a, b';\ a', b)],^{**})$$

die in gerader Linie liegen.

---

*) Wenn wir durch a, a' und d lineare Ausdrücke von der Form $(y + Ax + B)$ bezeichnen, so erhalten wir, wie bekannt, wenn die drei geraden Linien:

$$a = 0,\quad a' = 0,\quad d = 0,$$

durch denselben Punct gehen sollen, folgende Bedingungs-Gleichung:

$$\mu a + \mu' a' = d,$$

in welcher μ und μ' zwei Coëfficienten bezeichnen. Statt dieser Gleichung können wir offenbar auch die Gleichung des Textes nehmen, wenn wir unter a und a' Ausdrücke von der allgemeinern Form $(Ay + Bx + C)$ verstehen.

**) Wenn (a) und (b) zwei Puncte bezeichnen, so stellen wir diejenige gerade Linie, die durch diese beiden Puncte geht, durch (a, b) dar; wenn (a) und (b) zwei gerade Linien bezeichnen, so stellen wir durch (a, b) ihren Durchschnittspunct dar. Hiernach ist $[(a, b), (c, d)]$, oder, was wir hiermit für identisch nehmen, $[a, b; c, d]$, wenn (a), (b), (c) und (d) Puncte bedeuten, der Durchschnitt der geraden Linien (a, b) und (c, d); wenn aber jene Buchstaben gerade Linien bedeuten, diejenige neue gerade Linie, welche die beiden Puncte (a, b) und (c, d) verbindet.

Nach unserer Methode greifen wir diesen Satz ganz direct, oder, wie man sich hier auch ausdrücken kann, rein synthetisch an. Wir bilden zunächst die Gleichung für die geraden Linien (b, c') und (b', c), dann für (a, c') und (a', c), dann die Gleichung für die gerade Linie:

$$\{[a, (b, c'; b'c)], [b, (a, c'; a'c)]\},$$

und zeigen endlich, dafs diese Linie auch durch den dritten Punct

$$[c, (a, b'; a', b)]$$

geht. Wir kommen hierzu ungemein leicht auf folgende Weise:

Aus der Bedingungs-Gleichung:

$$b + b' = c + c'$$

folgt:

$$b - c' = c - b'.$$

Da also die beiden Theile dieser Gleichung identisch sind, stellen

$$1. \quad b - c' = 0, \quad c - b' = 0,$$

dieselbe gerade Linie dar, und diese Linie geht, wie die Form der ersten dieser beiden Gleichungen (die eine algebraische Folge aus den Gleichungen $b = 0$ und $c' = 0$ ist) zeigt, einerseits durch den Punct (b, c'), und, wie die Form der zweiten Gleichung zeigt, andrerseits durch den Punct (b', c); ist also keine andere als die gerade Linie $(b, c'; b', c)$. Diese Linie wird also durch jede der beiden identischen Gleichungen (1.) dargestellt.

Ganz auf ähnliche Weise, oder auch durch blofse Buchstaben-Vertauschung, erhalten wir für die geraden Linien $(a, c'; a'c)$ und $(a, b'; a', b)$ folgende Gleichungen:

$$2. \quad a - c' = 0, \quad c - a' = 0;$$
$$3. \quad a - b' = 0, \quad b - a' = 0.$$

Hiernach sehen wir sogleich, dafs die drei geraden Linien $(b, c'; b', c)$, $(a, c'; a', c)$ und $(a, b'; a'b)$:

$$c - b' = 0, \quad a - c' = 0, \quad b - a' = 0,$$

respective von den geraden Linien:

$$a = 0, \qquad b = 0, \qquad c = 0,$$

in solchen drei Puncten geschnitten werden, die in gerader Linie liegen. Denn, wenn wir die bezüglichen Gleichungen addiren, so kommt:

$$a + c - b' = 0, \quad a + b - c' = 0, \quad b + c - a' = 0:$$

Gleichungen, deren erste Theile unter sich identisch sind und identisch mit dem ersten Theile folgender Gleichung:

$$4. \quad a + b + c - d = 0.$$

3. Auf ganz ähnliche Weise können wir den Beweis führen, dafs folgende drei Puncte

$$[a'(b, c'; b'c)], \quad [b'(a, c'; a'c)], \quad [c'(a, b'; a', b)],$$

in gerader Linie liegen, was auch sogleich aus der Symmetrie der Bedingungs-Gleichungen in Beziehung auf a, b, c und a', b', c' hervorgeht. Und zugleich erhalten wir hiernach auf der Stelle für die Gleichung dieser geraden Linie aus (4.) folgende:

$$5. \quad a' + b' + c' - d = 0.$$

Wenn wir die beiden Gleichungen (4. und 5.) addiren, so ergiebt sich, mit Berücksichtigung der Bedingungs-Gleichungen:

$$6. \quad d = 0.$$

Es gehen also die drei geraden Linien (4., 5. und 6.), mithin drei von den sechszig im Satze der vorigen Nummer bezeichneten geraden Linien, durch einen und denselben Punct. In der 5. Nummer werden wir einen zweiten Beweis desselben Satzes geben.

4. Es ist bekannt, dafs diejenigen sechs Durchschnitte der Seiten des Dreiecks $a'b'c'$, die nicht schon in die gerade Linie d fallen, auf einer Linie zweiter Ordnung liegen, und somit folgt der Satz der 2. Nummer unmittelbar aus dem Pascalschen Satze vom eingeschriebenen Sechseck. Mir kam es hier, indem ich den Schlufs dieses Aufsatzes im Auge hatte, darauf an, einen solchen Satz zu beweisen, der sich blofs auf den Durchschnitt von geraden Linien bezieht, und den Beweis blofs durch allgemeine Symbole und unbestimmte Coëfficienten zu führen.

Der Kürze wegen wollen wir die sechs Puncte (Winkelpuncte des eingeschriebenen Sechsecks):

$$(b, a'), \quad (b, c'), \quad (c, b'), \quad (c, a'), \quad (a, c'), \quad (a, b'),$$

durch:

$$(1), \quad (2), \quad (3), \quad (4), \quad (5), \quad (6),$$

bezeichnen, so dafs also die geraden Linien:

$$(a), \quad (b), \quad (c), \quad (a'), \quad (b'), \quad (c'),$$

durch

$$(5, 6), \quad (1, 2), \quad (3, 4), \quad (1, 4) \quad (3, 6) \quad (2, 5),$$

dargestellt werden. Hiernach stellt z. B. die Gleichung (4.) diejenige gerade Linie dar, welche durch diejenigen drei Puncte geht, in welchen die im nachstehenden Schema untereinander gestellten Linien sich schneiden:

$$7.\quad \begin{cases}(1,2) & (2,3) & (3,4)\\ (4,5) & (5,6) & (6,1),\end{cases}$$

denn der Punct (1, 2) ist kein anderer als: $[b, (c, a'; a, c')]$ u. s. w. Indem wir die Aufeinanderfolge der Winkelpuncte des Sechsecks auf alle mögliche Weise ändern, erhalten wir $6.5.4.3.2.1 = 720$ solcher verschiedenen Schemata, von denen aber zwölf und zwölf dieselben drei Puncte bezeichnen, so dafs wir nur sechszig solcher verschiedenen Linien erhalten. Der Kürze halber wollen wir die diese Linien darstellenden Schemata durch die Aufeinanderfolge der in diesen vorkommenden Ziffern bezeichnen, so dafs z. B. das vorstehende Schema (7.) durch 1 2 3 4 5 6 bezeichnet wird. Auf diese Weise erhalten wir für jene sechszig gerade Linien, die wir, der Kürze halber, Pascalsche nennen wollen, folgende sechszig Symbole, die wir, mit Rücksicht auf das Folgende, sogleich in zwanzig Gruppen zu drei ordnen.

142536 162435 152634	I,	123456 163254 143652	VI,	162534 142635 152436	XI,	163452 123654 143256	XVI,
132546 162345 152643	II,	123465 153264 143562	VII,	162543 132645 152346	XII,	153462 123564 143265	XVII,
132456 162354 142653	III,	124356 164253 134652	VIII,	162453 132654 142356	XIII,	164352 124653 134256	XVIII,
132465 152364 142563	IV,	124365 154263 134562	IX,	152463 132564 142365	XIV,	154362 124563 134265	XIX,
123546 163245 153642	V,	125364 145263 135462	X,	163542 123645 153246	XV,	145362 125463 135264	XX.

5. „Wenn die Seiten zweier Dreiecke, paarweise genommen, sich in solchen drei Puncten schneiden, die in gerader Linie liegen, so gehen diejenigen drei geraden Linien, welche die diesen Seiten gegenüberliegenden Spitzen der beiden Dreiecke verbinden, durch einen und denselben Punct."

Bei derselben Bezeichnung, als in der 2. Nummer, sind diese drei sich in demselben Puncte schneidenden geraden Linien folgende:

$$(a, b; a', b'),\quad (a, c; a' c'),\quad (b, c; b' c');$$

für deren Gleichungen wir, ganz ähnlich wie in der eben genannten

Nummer, aus den Bedingungs-Gleichungen:

$$a + a' = b + b' = c + c'$$

folgende erhalten:

8. $a - b = 0$, oder $-(a' - b') = 0$;
9. $a - c = 0$, - $-(a' - c') = 0$;
10. $b - c = 0$, - $-(b' - c') = 0$.

Ziehen wir die Gleichungen (8.) von den Gleichungen (9.) ab, so erhalten wir die Gleichungen (10.). Es gehen also die drei bezüglichen geraden Linien durch denselben Punct, und somit ist der vorstehende Satz bewiesen.

6. Wenn wir wieder von dem einschreibbaren Sechseck ausgehen, so sind die drei geraden Linien (8.), (9.) und (10.) keine anderen als diejenigen, denen folgende Schemata entsprechen:

11. $$\left\{\begin{matrix} 2,1 & 1,4 & [4,5] & \quad 3,4 & 4,1 & [1,6] & \quad 1,2 & 2,5 & [5,4] \\ 5,6 & 6,3 & [3,2] & \quad 6,5 & 5,2 & [2,3] & \quad 4,3 & 3,6 & [6,1] \end{matrix}\right\},$$

mithin die zweite, dritte und erste Pascalsche Linie der XVI. Gruppe. Hiernach finden wir durch Ziffern-Vertauschung, dafs auch die drei Linien jeder der übrigen 19 Gruppen in demselben Puncte sich schneiden.

Dasselbe können wir auch direct für jede dieser Gruppen auf folgende Weise zeigen. Nehmen wir z. B. die drei Linien der I. Gruppe, denen folgende Schemata entsprechen:

$$\begin{matrix} 1,4 & 4,2 & [2,5] & \quad [1,6] & 6,2 & 2,4 & \quad 1,5 & [5,2] & 2,6 \\ 5,3 & 3,6 & [6,1] & \quad [4,3] & 3,5 & 5,1 & \quad 6,3 & [3,4] & 4,1 \end{matrix}$$

so können wir diese Linien, indem wir von den eingeklammerten Linien-Symbolen abstrahiren, durch die Durchschnitte der drei Linien (1,4), (4,2) und (2,6) mit den drei Linien (6,3), (3,5) und (5,1) construiren. Es liegen aber die übrigen drei Durchschnitte dieser beiden Linien-Systeme in gerader Linie, denn das Schema:

12. $$\left\{\begin{matrix} 1,4 & 4,2 & 2,6 \\ 6,3 & 3,5 & 5,1 \end{matrix}\right\}$$

entspricht der 2. Linie der XI. Gruppe. Und somit ist nach der 5. Nummer das zu Beweisende dargethan. (Wenn wir durch andere Durchschnitte die drei Schemata (11.) construirt hätten, so hätten wir statt (12.) zwei solche Schemata erhalten, die den beiden übrigen Linien der XI. Gruppe entsprechen.)

Man kann hiernach den allgemeinen Pascalschen Satz mit dem eben bewiesenen in folgende Aussage zusammenfassen:

Wenn in eine Linie zweiter Ordnung ein beliebiges Sechseck beschrieben ist, und man bildet drei Dreiecke, zwei aus den zweimal drei gegenüberliegenden Seiten, und das dritte aus den drei Diagonalen desselben, so liegen die neun Spitzen dieser drei Dreiecke auf solchen drei geraden Linien, die in demselben Puncte sich schneiden.

Solcher Durchschnittspuncte erhält man für dieselben sechs, auf dem Umfange einer Linie zweiter Ordnung beliebig angenommenen Puncte, zwanzig verschiedene. Diesen zwanzig Puncten entsprechen die zwanzig Gruppen der 4. Nummer.

7. Von den zwanzig Durchschnittspuncten dreier und dreier Pascalscher Linien liegen funfzehn mal vier in gerader Linie, so dafs solcher gerader Linien durch jeden Durchschnittspunct drei verschiedene gehen.

So liegen z. B. die vier Puncte, in welchen sich die drei Linien jeder von den folgenden vier Gruppen schneiden, in gerader Linie:

123456		123465		124356		124365	
163254	VI,	153264	VII,	164253	VIII,	154263	IX.
143652		143562		134652		134562	

Um diesen Satz zu beweisen, brauchen wir wiederum keinen andern Satz zu Hülfe zu nehmen als den Pascalschen. Der Kürze wegen wollen wir denjenigen Punct, in welchem sich drei Pascalsche Linien schneiden, durch die dieser Linien-Gruppe beigesetzte römische Ziffer bezeichnen, so dafs also z. B. die vier Puncte VI, VII, VIII und IX nach dem Vorstehenden in gerader Linie liegen. Wir wollen ferner die drei durch den Punct I. gehenden Pascalschen Linien in derjenigen Ordnung, wie sie sich in der ersten Gruppe finden, durch I_1, I_2, I_3 mit den beigefügten Ziffern 1, 2, 3 bezeichnen und dem entsprechend alle übrigen, so dafs z. B. die gerade Linie 134652 durch VIII_3 bezeichnet wird.

Hiernach liegen auf der Pascalschen Linie VI_1 die drei Puncte:

13. (1,2; 4,5), (2,3; 5,6), (3,4; 6,1).

Durch den ersten dieser drei Puncte geht auch die Pascalsche Linie:

134562 oder IX_3,

durch den zweiten Punct die Linie:

123465 oder VII_1,

und endlich durch den dritten Punct:

$$124356 \text{ oder } VIII_1.$$

Wir können also die drei Puncte bei (13.) auch auf folgende Weise bezeichnen:

$$((1,2), IX_3) \quad ((5,6), VII_1) \quad ((3,4), VIII_1).$$

Weil diese drei Durchschnittspuncte in gerader Linie liegen, so liegen die Durchschnitte von

$$\begin{aligned} (1,2) &\text{ mit } VII_1 \text{ und } VIII_1, \\ (5,6) &\text{ - } IX_3 \text{ - } VIII_1, \\ (3,4) &\text{ - } IX_3 \text{ - } VII_1, \end{aligned}$$

alle sechs auf einer Linie zweiter Ordnung. Nun ist aber sogleich aus unserer Bezeichnung ersichtlich, dafs

VII_1 und VIII_3 *) so wie VIII_1 und VII_3 sich auf (1,2),
IX_3 - VIII_3 - - VIII_1 - IX_1 - - (5,6),
IX_3 - VII_3 - - VII_1 - IX_1 - - (3,4)

schneiden; so dafs mithin jene sechs auf einer Linie zweiter Ordnung liegenden Puncte sechs der neun Durchschnittspuncte der beiden Linien-Systeme:

$$VII_1, VIII_1, IX_3 \text{ und } VII_3, VIII_3, IX_1$$

sind. Die drei übrigen Durchschnitte, nemlich

$$(VII_1, VII_3), \quad (VIII_1, VIII_3), \quad (IX_1, IX_3),$$

welche keine andere sind, als die drei Puncte VII, VIII und IX, liegen also in gerader Linie.

Wenn wir die Ziffern 5 und 6 mit einander vertauschen, so verwandelt sich die VIII. Gruppe in die IX., und diese gegenseitig in jene, die VI. Gruppe in die VII., und diese in jene. Es liegen also auch die drei Puncte VI, VIII und IX, und mithin alle vier Puncte: VI, VII, VIII und IX, in gerader Linie.

8. Es bleibt uns jetzt nur noch zu zeigen übrig, wie die in Rede stehenden zwanzig Puncte sich zu solchen vier, die in gerader Linie liegen, zusammenordnen, und wie viele solcher Linien, die vier jener Puncte enthalten.

---

*) VII_1 und VIII_3 sind die durch folgende beiden Schemata bezeichneten Linien:

$$\begin{matrix} 1,2 & 2,3 & 3,4 \\ 4,6 & 6,5 & 5,1 \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} 1,3 & 3,4 & 4,6 \\ 6,5 & 5,2 & 2,1. \end{matrix}$$

Beide Linien gehen also durch den Punct ((1,2), (4,6)), der, wie seine Bezeichnung anzeigt, auf der geraden Linie (1,2) liegt.

In der combinatorischen Zusammenstellung der in zwanzig Gruppen geordneten sechszig Symbole (4. Nummer) ist Folgendes beobachtet worden. Sechs Elemente lassen sich auf $\frac{6.5.4}{1.2.3} = 20$ verschiedene Arten zu drei combiniren, und also auf zehnfache Weise in zweimal drei Elemente theilen. So erhält man z. B. 1, 2, 3 und 4, 5, 6. Schreibt man nun die drei ersten Elemente in die erste, dritte und fünfte Stelle, und die drei andern, nach einander, in die zweite, vierte und sechste, in die vierte, sechste und zweite, und endlich in die sechste, zweite und vierte Stelle, so erhält man die erste Gruppe:

$$\left.\begin{matrix} 1\,4\,2\,5\,3\,6 \\ 1\,6\,2\,4\,3\,5 \\ 1\,5\,2\,6\,3\,4 \end{matrix}\right\} \quad \text{I.}$$

Diese Gruppe können wir also durch das Schema $\binom{123}{456}$, mit welchem folgendes $\binom{456}{123}$, gleichbedeutend ist, darstellen. Indem man die drei ersten Elemente, statt in der Aufeinanderfolge 123, in der Ordnung 231 oder 312, und die drei letzten Elemente, statt in der Aufeinanderfolge 456, in der Ordnung 564 oder 645 nimmt, bekommt man keine neuen Linien. Man erhält ebenfalls keine neuen Linien, wenn man die Permutationen 123, 231, 312, und zugleich die Permutationen 456, 564, 645 in umgekehrter Ordnung nimmt. Hiernach wird also die I. Gruppe z. B. durch folgende gleichbedeutende Symbole dargestellt:

$$\binom{123}{456}, \quad \binom{231}{456}, \quad \binom{132}{546}.$$

Man erhält aber eine neue Gruppe, wenn man die Permutationen 123, 231, 312 umkehrt und die Permutationen 456, 564, 645 nicht umkehrt. Diese neue Gruppe, die XI., wird z. B. durch folgende gleichbedeutende Symbole dargestellt:

$$\binom{123}{654}, \quad \binom{132}{456}, \quad \binom{321}{456}.$$

Auf diese Weise erhalten wir die obigen $2.10 = 20$ verschiedenen Gruppen.

Denjenigen vier Puncten VI, VII, VIII und IX, die, wie wir in der vorigen Nummer bewiesen haben, in gerader Linie liegen, entsprechen also folgende Symbole:

$$\binom{135}{246}, \quad \binom{136}{245}, \quad \binom{145}{236}, \quad \binom{146}{235}.$$

Es giebt also so oft mal vier Puncte, die in gerader Linie liegen, als

wir durch Ziffern-Vertauschung in dem letzten Schema, Schemata für neue Gruppen erhalten.

Wir wollen zunächst untersuchen, wie viel neue Schemata wir auf diese Weise erhalten, in denen die Gruppe $\binom{135}{246}$, also die VI. Gruppe, vorkommt, oder, was dasselbe heifst, mit wie viel mal drei Puncten der Punct (VI) in gerader Linie liegt.

Wenn wir das letzte Schema ansehen, so ist klar, dafs wir dasselbe unmittelbar hinschreiben können, wenn wir eine Gruppe desselben mit dem ihr in jenem Schema zugehörigen Ziffern-Symbol, und die Stelle, die diese Gruppe einnimmt, kennen. Überdies ist leicht ersichtlich, dafs jenes Schema dieselben Gruppen umfafst, welche Stelle wir jenem Ziffern-Symbol auch anweisen mögen. Nun wird aber die VI. Gruppe durch folgende 18 verschiedene Ziffern-Symbole:

$$\binom{135}{246}, \binom{351}{246}, \binom{513}{246}, \binom{135}{462}, \binom{351}{462}, \binom{513}{462}, \binom{135}{624}, \binom{351}{624}, \binom{513}{624},$$

$$\binom{531}{642}, \binom{315}{642}, \binom{153}{642}, \binom{531}{426}, \binom{315}{426}, \binom{153}{426}, \binom{531}{264}, \binom{315}{264}, \binom{153}{264},$$

dargestellt, und noch durch eben so viele andere, indem man $\binom{135}{246}$ mit $\binom{246}{135}$ vertauscht u. s. w. Jedem dieser Ziffern-Symbole entspricht ein Schema, das wir nach dem eben Bemerkten sogleich bilden können. Unter allen diesen Schematen sind aber nur drei verschiedene. Um diese zu bilden, braucht man nur die drei ersten der vorstehenden Symbole zum Grunde zu legen. Man erhält alsdann, indem man denselben die ersten Stellen giebt, die drei ersten Schemata der dieser Nummer am Ende beigefügten Tafel.

Wir sehen hieraus, dafs jeder der zwanzig Puncte, in welchen drei Pascalsche Linien sich schneiden, mit dreimal drei andern auf drei geraden Linien liegen. Wir erhalten also im Ganzen $\frac{20.3}{4} = 15$ solcher geraden Linien, auf deren jeder vier von jenen zwanzig Durchschnittspuncten liegen. Hiernach erhalten wir folgende Tafel, in der wir die Klammern fortgelassen haben.

135	136	145	146	}	VI,	VII,	VIII,	IX.
246	245	236	235	}				
351	356	341	346	}	VI,	II,	V,	III.
246	245	256	251	}				
513	516	543	546	}	VI,	X,	IV,	I.
246	243	216	213	}				
365	361	345	341	}	XII,	VII,	IV,	XV.
241	245	213	215	}				
615	613	645	643	}	XX,	VII,	XI,	III.
243	245	213	215	}				
431	436	451	456	}	XV,	XIII,	VIII,	I.
256	251	236	231	}				
534	536	514	516	}	XIV,	II,	VIII,	XX.
216	214	236	234	}				
435	431	465	461	}	XIV,	V,	IX,	IX.
261	265	231	235	}				
635	634	615	614	}	XII,	XIII,	X,	IX.
214	215	234	235	}				
563	564	513	514	}	XII,	XI,	XIV,	XVIII.
214	213	264	263	}				
163	165	143	145	}	XVII,	X,	V,	XVIII.
245	243	265	263	}				
463	461	453	451	}	III,	XIX,	IV,	XVIII.
251	253	261	263	}				
613	614	653	654	}	XVII,	XIX,	II,	I.
254	253	261	263	}				
143	146	153	156	}	XV,	XIX,	XVI,	XX.
256	253	246	243	}				
345	346	315	316	}	XIV,	XIII,	XVI,	XVII.
216	215	246	245	}				

9. Der im Eingange schon erwähnte, in Gergonne's Annalen *) zum Beweise vorgelegte Satz ist wörtlich folgender:

Six points, pris arbitrairement sur le périmètre d'une conique quelconque, sont les sommets de soixante hexagones inscrits et les points de contact de soixante hexagones circonscrits (Carnot, Géométrie de position) lesquels jouissent des propriétés suivantes.

*) Théorèmes sur *l'Hexagrammum mysticum*, proposés à démontrer par M. J. Steiner, de Berlin. Gerg. Ann. vol. XVIII. p. 339.

1°. Dans chacun des hexagones inscrits les points de concours des directions des cotés opposés appartiennent tous trois à une même droite D (Pascal), de sorte qu'on obtient ainsi soixante droites D.

2°. Ces soixante droites D concourent, trois à trois, en un même point p, de sorte qu'on obtient ainsi vingt points p.

3°. Ces vingt points p appartiennent, quatre à quatre, à une même droite δ, de sorte qu'on obtient ainsi cinq droites δ.

4°. Ces cinq droites concourent en un même point ϖ'.

1°. Dans chacun des hexagones circonscrits, les droites qui joignent les sommets opposés concourent toutes trois en un même point P (Brianchon), de sorte qu'on obtient ainsi soixante points P.

2°. Ces soixante points P appartiennent, trois à trois, à une même droite d, de sorte qu'on obtient ainsi vingt droites d.

3°. Ces vingt droites d concourent, quatre à quatre, en un même point ϖ, de sorte qu'on obtient ainsi cinq points ϖ.

4°. Ces cinq points ϖ appartiennent à une même droite δ'.

5°. Les soixante points P sont les pôles respectifs des soixante droites D.

6°. Les vingt points p sont les pôles respectifs des vingt droites d.

7°. Les cinq points ϖ sont les pôles respectifs des cinq droites δ.

8°. Enfin, le point ϖ' est le pôle de la droite δ.

Nach dem Vorhergehenden sind 3° und 4° und mithin 7° und 8° nicht richtig, und von 3° an müssen wir Folgendes substituiren:

3° Ces vingt points appartiennent à quinze droites δ, dont chacune en contient quatre, de sorte que par chacun des vingt points passent trois de ces quinze droites.

3°. Ces vingt droites concourent en quinze points ϖ, par chacun desquels en passent quatre, de sorte que chacune des vingt droites contient trois de ces quinze points.

4°. Les soixante points P sont les pôles respectifs des soixante droites D.

5°. Les vingt points p sont les pôles respectifs des vingt droites d.

6°. Les quinze points ϖ sont les pôles respectifs des quinze droites δ.

Der zweite Theil der doppelten Colonnen folgt aus dem erstern unmittelbar nach der *Théorie des polaires réciproques*.

§. 2.

Neues Princip der Situations-Geometrie.

10. Die in der 2. und 5. Nummer angewendete Beweis-Art, die sich auf alle Sätze über den Durchschnitt von geraden Linien ausdeh-

nen läfst, können wir allgemein auf folgende Weise näher bezeichnen. Wir stellen alle gegebenen geraden Linien durch Gleichungen wie folgende dar:

$$a = 0, \quad b = 0, \quad \text{etc.}$$

Alsdann erhalten wir die Bedingungen, auf welchen ein solcher Satz beruht, durch Gleichungen von folgender Form ausgedrückt:

$$1. \quad F(a, b, \ldots \mu, \nu, \ldots) = 0,$$

in denen $\mu, \nu, \ldots$ unbestimmte Coëfficienten bedeuten, oder, richtiger ausgedrückt, solche Coëfficienten, die wir nicht zu bestimmen brauchen. In den Fällen der beiden angezogenen Nummern könnten wir solche Coëfficienten ganz entbehren, und die entsprechenden Gleichungen wären:

$$a + a' = b + b' = c + c'.$$

Alsdann sind also die Beziehungen der gegebenen geraden Linien zu einander vollkommen ausgedrückt, und wir können alle andern geraden Linien, die durch die Durchschnitte der gegebenen bestimmt sind, durch Gleichungen von der Form:

$$F(a, b, \ldots \mu, \nu, \ldots) = 0,$$

ausdrücken, in welchen $\mu, \nu, \ldots$ dieselben oben vorkommenden Coëfficienten bedeuten. Wir erhalten also auf diese Weise direct die Gleichungen derjenigen geraden Linien, auf welche sich die Aussage des Satzes bezieht, welche wir alsdann unmittelbar aus der Form dieser Gleichungen erkennen. Die in der 2. und 4. Nummer ausgeführten Beispiele machen dies hinlänglich klar. Ein anderes Beispiel hat schon früher Herr Heinen im 3. Hefte des 3. Bandes dieses Journals mitgetheilt.

11. Indem wir auf die angezeigte Weise den Beweis für einen Satz über gerade Linien führen, haben wir eine unzählige Menge von Sätzen bewiesen. Denn, wenn wir durch $a, b, \ldots$ nicht mehr lineare Ausdrücke, sondern allgemeine Functionen desselben beliebigen Grades zwischen zwei veränderlichen Gröfsen darstellen, so behalten die Bedingungs-Gleichungen (1) ihre Bedeutung, so wie auch alle Gleichungen bis zu den Endgleichungen hin. Das Einzige fast, was sich ändert, ist die Anzahl der Durchschnitte. Wenn ein solches Beweis-Schema vorliegt, so können wir dasselbe auf Linien jeder beliebigen Ordnung beziehen. Wir können hiernach, die Möglichkeit eines solchen Schema vorausgesetzt, auch ohne dafs ein solches vorliegt, aber allerdings mit einiger Vorsicht, jeden Satz der linearen Situations-Geometrie auf Linien jedes beliebigen Grades übertragen.

12. Machen wir eine Anwendung hiervon auf die in §. 1. bewiesenen Sätze, so erhalten wir auf der Stelle folgende:

Wenn auf einer gegebenen Linie $m$ter Ordnung (d) sich drei Paare von Linien derselben Ordnung, a und a', b und b', c und c' schneiden, so schneiden sich a, b, c und a', b', c' aufserdem noch in sechs Gruppen von m^2 Puncten, die auf einer Linie der $2m$ten Ordnung liegen. Aus der 2. und 3. Nummer ergeben sich alsdann folgende Sätze. Durch drei mal zwei der sechs Gruppen von m^2 Durchschnittspuncten lassen sich drei neue Linien der $m$ten Ordnung legen, die wir, ähnlich wie bei Linien erster Ordnung, durch

$$2. \quad (a, b'; a', b), \quad (a, c'; a', c), \quad (b\, c'; b', c),$$

bezeichnen können. Diese werden, respective, von den gegebenen Linien $m$ter Ordnung:

$$c, \quad b, \quad a,$$

in dreimal m^2 Puncten geschnitten, die alle auf einer und derselben neuen Linie $m$ter Ordnung (g) liegen. Dieselben Curven (2.) werden, respective, von den drei übrigen gegebenen:

$$c', \quad b', \quad a',$$

ebenfalls in solchen $3m^2$ Puncten geschnitten, die auf einer Curve der $m$ten Ordnung (h) liegen. Die beiden Curven (g) und (h) schneiden die gegebene (d) in denselben m^2 Puncten.

In der Beweisführung der 5. Nummer ist folgender allgemeiner Satz enthalten. Diejenigen drei Curven $m$ter Ordnung, die durch folgendes Schema dargestellt werden:

$$(3.) \quad (a, b; a', b'), \quad (a, c; a', c'), \quad (b, c; b', c'),$$

gehen alle drei durch dieselben m^2 Puncte. Solcher Curven, die durch dieselben m^2 Puncte gehen, erhalten wir aufserdem noch dreimal drei, nemlich jedesmal zwei der Curven (2.) und eine der Curven (3.); was sogleich aus Accent-Vertauschung sich ergiebt *).

---

*) Den ganzen Satz der 9. Nummer über sechs Puncte, durch welche sich eine Linie zweiter Ordnung legen läfst, können wir nicht, ohne Weiteres, auf Curven einer beliebigen Ordnung ausdehnen. Denn durch die beiden Durchschnitte von zwei Paaren gerader Linien läfst sich immer eine neue gerade Linie legen; nicht aber, im Allgemeinen, eine Linie $m$ter Ordnung durch die $2m^2$ Durchschnitte zweier Paare von Linien $m$ter Ordnung. So läfst sich z. B., wenn wir auch hier die Bezeichnung der 4. Nummer beibehalten, im Allgemeinen keine Linie $m$ter Ordnung durch die beiden Gruppen von m^2 Durchschnitten (1.) und (3.) legen. Wir können aber, und dies ist wohl zu bemerken, auch für den Fall linearer Gleichungen die Gleichung der geraden Linie (1. 3.)

Wenn wir die Gergonnesche Eintheilung der Curven in Classen adoptiren wollen, so können wir unmittelbar nach der bekannten *Théorie des polaires réciproques* die vorstehenden Sätze verdoppeln.

13. Was wir in der 11. Nummer von den Curven jedes beliebigen Grades im Allgemeinen gesagt haben, gilt mit gleichem Rechte auch von allen speciellen Arten der Curven eines beliebigen Grades, die durch die allgemeine Gleichung dieses Grades, in welcher zwischen den Constanten beliebige lineare Bedingungs-Gleichungen Statt finden, oder in welchen insbesondere gewisse Constanten Null oder ein für allemal bestimmt sind, dargestellt werden. Wenn in diesen Fällen

$$a = 0, \quad b = 0$$

zwei solche Curven darstellen, so stellt auch die Gleichung

$$\mu a + \nu b = 0$$

eine Curve derselben Art dar, worauf es hier eigentlich allein ankommt.

Durch diese Betrachtungen gewinnt das in Rede stehende Princip der Situations-Geometrie sehr an Fruchtbarkeit. So können wir z. B. durch a, b, . . . Ausdrücke von der Form

$$\mu[(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2-\varrho^2]$$

oder von folgender Form:

$$\beta y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon$$

darstellen, mithin (bei der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten) auf Kreise oder auf gleichseitige Hyperbeln alle Sätze über den Durchschnitt von geraden Linien übertragen.

14. Für den Kreis z. B. erhalten wir hiernach aus dem Vorhergehenden folgende Sätze:

Wenn auf einem gegebenen Kreise (oder einer gegebenen geraden Linie) sich sechs Kreise, paarweise genommen, schneiden, so schneiden die zweimal drei Kreise sich überdies noch in sechs Paaren von Puncten. Durch diese sechs Puncten-Paare, zu zweien genommen, lassen sich noch drei Kreise legen. Von den neun Kreisen, die wir auf diese Weise, den gegebenen nicht mitgerechnet, erhalten, schneiden sich zwei-

---

auf keine bestimmte Weise ausdrücken, wenn wir über die Symbole a, b u. s. w. keine andere Bestimmungen machen, als in der 2. Nummer. — Eine Gleichung wie folgende:

$$\mu a + \mu' a' = \nu b + \nu' b',$$

drückt, allein für sich, wenn a, b, a' und b' linear sind, keine Beziehungen zwischen den bezüglichen geraden Linien aus: wohl aber, wenn a, b, a' und b' von höherm Grade sind, Beziehungen zwischen den bezüglichen Linien höherer Ordnung.

mal drei Paare in zweimal sechs solchen Puncten, die auf zwei neuen Kreisen liegen (Nro. 2.). Diese beiden neuen Kreise haben mit dem gegebenen dieselbe Chorde (Nro. 3.).

Wenn auf einem gegebenen Kreise sich drei Paare von Kreisen schneiden, so lassen sich im Ganzen sechs neue Kreise durch die zweimal zwei Durchschnitte von zweimal zwei derselben legen. Von diesen sechs Kreisen schneiden sich viermal drei in denselben beiden Puncten (Nr. 5.).

Es ist klar, dafs wir theilweise auch gerade Linien an die Stelle von Kreisen, wie überhaupt an die Stelle von Linien einer beliebigen Ordnung, deren Asymptoten parallel sind, Linien der $(m-1)$ten Ordnung setzen können.

15. Man sieht leicht ein, dafs man nach dem in Rede stehenden Princip auf diese Weise eine grofse Menge von Sätzen über die Durchschnitte (reelle oder ideale, oder über Berührungen) von Kreisen erhält, wenn wir nach einander von allen bekannten, namentlich auch von den einfachern Sätzen über die Durchschnitte von geraden Linien ausgehen und alle einzelnen Fälle discutiren. Und dann erhalten wir nach der *Théorie des polaires réciproques* eben so viele Sätze über solche Linien zweiter Ordnung, die einen gemeinschaftlichen Brennpunct haben (confocale Linien zweiter Ordnung, Confocalen).

16. Wir wollen mit einem letzten hierher gehörigen Beispiele schliefsen. Folgender Satz ist bekannt.

Wenn zwei feste gerade Linien gegeben sind, und man durch einen festen Punct P, nach beliebigen Richtungen, zwei gerade Linien zieht und die Durchschnitte dieser beiden Linien mit den beiden gegebenen noch durch zwei neue gerade Linien verbindet, so liegt der Durchschnitt Q dieser beiden letztgezogenen geraden Linien immer, wie wir auch die Richtungen der beiden durch den festen Punct P gehenden geraden Linien bestimmen mögen, auf einer festen geraden Linie, die durch den Durchschnitt der beiden gegebenen geht. Diese Linie bleibt auch dann noch dieselbe, wenn der bisher als fest betrachtete Punct P auf einer geraden Linie fortrückt, die durch den Durchschnitt der beiden gegebenen Linien geht *).

*) Wir können diesen Satz nach unserer Methode leicht folgendergestalt beweisen. Seien

$$a = 0, \quad b = 0,$$

Die beiden gegebenen Linien und die beiden andern, welche die Puncte P und Q enthalten, nennt man Harmonicalen (*faisceau harmonique*).

Durch Übertragung erhalten wir hiernach folgenden Satz:

Wenn zwei feste Kreise gegeben sind, und man legt durch irgend zwei Puncte, die mit den Durchschnitten dieser beiden Kreise auf demselben dritten Kreise liegen, irgend zwei neue beliebige Kreise, so schneiden diese die beiden festen gegebenen Kreise in solchen viermal zwei Puncten, die sich noch durch zwei Kreise verbinden lassen. Die so bestimmten zwei Kreise schneiden sich in solchen zwei Puncten, die auf dem Umfange eines und desselben Kreises bleiben, wie wir auch durch jene beiden Puncte zwei beliebige Kreise legen, und wie wir auch diese Puncte selbst auf dem Umfange des dritten Kreises annehmen mögen. Dieser so bestimmte vierte feste Kreis geht durch die Durchschnitte der beiden gegebenen.

17. Nach der *Théorie des polaires réciproques* erhalten wir aus dem letzten Satze folgenden:

Wenn drei confocale Linien zweiter Ordnung gegeben sind, welche dieselben beiden geraden Linien berühren, und man beschreibt irgend zwei beliebige Confocalen, die beide mit der dritten gegebenen dieselben beiden gemeinschaftlichen Tangenten haben, so haben diese beiden Confocalen mit den beiden ersten gegebenen und festen viermal zwei gemeinschaftliche Tangenten, und es giebt noch zwei neue Confocalen, die

---

die Gleichungen der beiden gegebenen geraden Linien, und

$$m = 0, \quad n = 0,$$

die Gleichungen der beiden andern Linien, die sich in P schneiden, und endlich sei

$$d = 0$$

die Gleichung derjenigen Linie, die den Punct P mit dem Durchschnitte von (a) und (b) verbindet. Alsdann erhalten wir folgende Bedingungs-Gleichungen:

$$a + b = m + n = d,$$

und hiernach für die Gleichungen der beiden Linien $[(a, m), (b, n)]$ und $[(b, m), (a, n)]$, die sich in Q schneiden:

$$a - m = n - b = 0, \quad b - m = n - a = 0.$$

Wenn wir diese beiden Gleichungen von einander abziehen, kommt:

$$a - b = 0,$$

eine Gleichung die unabhängig ist von m und n und eine gerade Linie darstellt, die durch den Durchschnitt der beiden gegebenen Linien a und b geht. Vier Harmonicalen sind demnach durch Gleichungen von folgenden Formen dargestellt:

$$a = 0, \quad b = 0, \quad a + b = 0, \quad a - b = 0.$$

vier und vier dieser gemeinschaftlichen Tangenten berühren. Die beiden gemeinschaftlichen Tangenten dieser beiden neuen Confocalen umhüllen eine vierte feste Confocale, die mit den drei gegebenen dieselben beiden gemeinschaftlichen Tangenten hat, wenn wir unter den angegebenen Bedingungen für die beiden beliebigen Curven alle möglichen nehmen.

18. Es drängt sich uns hier noch eine Bemerkung auf, die wir nicht ganz unberührt lassen können. Die vier festen Kreise des Satzes der 16. Nummer treten an die Stelle der vier Harmonicalen des an die Spitze dieser Nummer gestellten Satzes. Sie sind durch das System von vier Gleichungen:

$$1. \quad a = 0, \quad b = 0, \quad a + b = 0, \quad a - b = 0$$

gegeben, deren Beziehung zu einander gerade dieselbe ist, als für den Fall gerader Linien. Neben den vier Harmonicalen stehen nach der *Théorie des polaires réciproques* vier harmonische Theilungspuncte einer geraden Linie: neben jenen vier Kreis-Harmonicalen, um mich so auszudrücken, jenen vier harmonischen Theilungspuncten entsprechend, die vier festen Confocalen der 17. Nummer.

Es ist nach dem Princip, das der Gegenstand dieses Paragraphen ist, klar, dafs vier Curven einer beliebigen Ordnung, die durch das System von Gleichungen (1.) sich ausdrücken lassen, und also auch alle vier durch dieselben m^2 Puncte gehen, den vier linearen Harmonicalen entsprechen, und dafs es in jeder Classe (Gergonne) Curven mit m^2 gemeinschaftlichen Tangenten giebt, die den vier harmonischen Theilungspuncten entsprechen. Was für andere Eigenschaften sonst noch solchen Curven-Systemen entsprechen, kann uns hier nicht angehn; es liegt uns blofs ob, anzudeuten, wie die Theorie der harmonischen Theilung und der Harmonicalen, dieser Lieblinge der neuern Geometer, sich ins Unbegrenzte hin erweitern läfst.

Bonn, am 6. August 1829.

20.

Solution d'une question relative à la théorie mathématique de la chaleur.

(Par Mr. *Lejeune-Dirichlet*, prof. de mathém.)

La question qui va nous occuper et qui a pour objet de déterminer les états successifs d'une barre primitivement échauffée d'une manière quelconque et dont les deux extrémités sont entretenues à des températures données en fonction du temps, a déjà été résolue par Mr. Fourier dans un Mémoire inséré dans le Vol. VIII. de la collection de l'Académie royale des sciences de Paris. La méthode dont cet illustre géomètre a fait usage dans cette recherche est une espèce singulière de passage du fini à l'infini, et offre un nouvel exemple de la fécondité de ce procédé analytique qui avait déjà conduit l'auteur à tant de résultats remarquables dans son grand ouvrage sur la théorie de la chaleur. J'ai traité la même question par une analyse dont la marche diffère beaucoup de celle de Mr. Fourier et qui donne lieu à l'emploi de quelques artifices de calcul, qui paraissent pouvoir être utiles dans d'autres recherches.

Pour simplifier les calculs, nous supposerons l'unité linéaire qui est arbitraire, tellement choisie que la longueur de la barre soit égale à π, cette lettre désignant à l'ordinaire le rapport du diamètre à la circonférence. Soit x la distance d'un point quelconque de la barre à l'une de ces extrémités, que nous nommerons la première extrémité. La température du point x à l'instant t est une fonction u de x et de t, et c'est cette fonction qui fait l'objet de la question. Soit $F(t)$ la fonction donnée de t qui exprime la température à laquelle la première extrémité est entretenue, et soit de même $f(t)$ la température de la seconde extrémité, $F(t)$ et $f(t)$ étant des fonctions arbitraires dont les valeurs sont données pour toute valeur positive de t, et désignons enfin par $\varphi(x)$ la température initiale du point dont l'abscisse est x.

En faisant abstraction du rayonnement latéral, la fonction u doit satisfaire à cette équation aux différences partielles $\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ dans laquelle k désigne un coëfficient dépendant des propriétés spécifiques de la substance dont la barre est formée.

Pour plus de simplicité, nous supposerons égal à l'unité le coëfficient k qu'il sera facile de rétablir à la fin du calcul, de sorte que l'équation précédente se changera en celle-ci:

$$(1.) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Cela posé, la fonction cherchée doit évidemment remplir les quatre conditions suivantes:

(2.)
1°. Elle doit satisfaire à l'équation (1.) quels que soient x et t.
2°. Pour $x = 0$, elle doit se réduire à la fonction donnée $F(t)$.
3°. Pour $x = \pi$, elle doit se réduire à la fonction $f(t)$ également donnée.
4°. Lorsque t est nul, elle doit coïncider dans toute l'étendue de la barre, c'est à dire tant que x est inférieur à π, avec la fonction $\varphi(x)$ qui exprime les températures initiales.

La question que nous avons à résoudre se partage naturellement en deux autres. On fera d'abord abstraction de la quatrième condition et l'on cherchera une fonction v de x et de t uniquement assujétie à remplir les 3 premières. Il y a une infinité de fonctions qui satisfont à ces 3 conditions, et qui diffèrent entre elles en ce qu'elles se réduisent à des fonctions de x différentes entre elles par la supposition de $t = 0$; mais il suffit d'en obtenir une seule. Une pareille fonction v étant trouvée, on y fera $t = 0$, ce qui la réduira à une fonction $\chi(x)$ de x. On formera ensuite la différence $\varphi(x) - \chi(x)$ et l'on cherchera la fonction entièrement déterminée w de x et t, qui satisfait à l'équation (1.) s'évanouit pour $x = 0$ et $x = \pi$ quel que soit t, et se réduit à $\varphi(x) - \chi(x)$ lorsqu'on y fait $t = 0$.

Cette seconde question est résolue depuis longtemps, c'est celle de la détermination du mouvement de la chaleur dans une barre dont l'état initial est exprimé par $\varphi(x) - \chi(x)$ et dont les extrémités sont entretenues à la température zéro. Les deux fonctions v et w dont il vient d'être question, étant ajoutées, formeront une nouvelle fonction de x et t, qui remplit l'ensemble des conditions (2.). En effet, chacune d'elles satisfaisant à l'équation (1.), leur somme y satisfera également. La pre-

mière se réduisant à $F(t)$ pour $x = 0$, et la seconde s'évanouissant dans cette même supposition, leur somme remplira évidemment la seconde des conditions (2.). Il en est de même de la troisième de ces conditions. Quant à la quatrième, il est également manifeste qu'elle est satisfaite par la somme $v + w$ que nous venons de former, v se reduisant à $\chi(x)$ et w à $\varphi(x) - \chi(x)$, lorsqu'on y suppose le temps nul. La somme $v + w$ est donc la fonction cherchée u.

La marche que nous venons d'indiquer revient à assujettir les deux extremités d'une barre, l'une à la température $F(t)$, l'autre à la température $f(t)$, sans supposer arbitraire l'état initial de cette barre, à considérer une seconde barre dont les extrémités sont entretenues à la température zéro et dont l'état initial est la différence entre l'état initial arbitraire $\varphi(x)$ et celui de la première barre, et à ajouter ensuite les expressions qui expriment les états variables de ces deux barres.

La recherche de la fonction v peut à son tour se décomposer en deux autres questions plus simples; car il est évident que pour obtenir une fonction qui remplisse les 3 premières des conditions (2.), il suffit de chercher d'abord une expression v' qui soit assujétie à la première et à la troisième de ces conditions et qui s'évanouisse pour $x = 0$, et de déterminer ensuite une seconde expression v'' qui remplisse la première et la seconde, et devienne égale à zéro lorsqu'on y suppose $x = \pi$; la somme $v' + w''$ de ces expressions satisfera manifestement aux 3 premières des conditions (2.) et pourra par conséquent être prise pour v.

Quant à ces nouvelles fonctions v' et v'', il est facile de voir qu'elles peuvent être obtenues de la même manière, c'est à dire que l'une d'elles la première v', par exemple, étant trouvée, l'autre v'' s'en déduira immédiatement. Il suffira pour cela, de changer en $F(t)$ la fonction arbitraire $f(t)$ que renferme cette expression v' et d'y remplacer en même temps x par $\pi - x$. Il est évident que l'expression v' ainsi modifiée satisfera toujours à l'équation (1.) et que pour $x = 0$, $x = \pi$ elle se réduira respectivement à $F(t)$ et à zéro; elle pourra donc être prise pour v''.

Toute la difficulté du problème que nous nous sommes proposé de résoudre, se réduit donc à la recherche d'une fonction v' de x et de t, qui remplisse les 3 conditions de satisfaire à l'équation (1.), de s'évanouir pour $x = 0$, et de se réduire à $f(t)$ lorsqu'on y fait $x = \pi$.

On satisfait à l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ par une solution particulière de cette forme

$$(3.) \quad r\cos\alpha t + s\sin\alpha t,$$

α désignant une quantité constante mais arbitraire, et r et s étant des fonctions de x et de α sans t. En effet, différentiant l'expression précédente une fois par rapport à t, et deux fois par rapport à x, et égalant les deux résultats, il viendra

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}\cos\alpha t + \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}\sin\alpha t = \alpha s\cos\alpha t - \alpha r\sin\alpha t,$$

équation qui aura évidemment lieu quels que soient x et t, si les fonctions r et s sont telles que l'on ait

$$(4.) \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \alpha s, \quad \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = -\alpha r.$$

Ces équations différentielles simultanées étant linéaires et à coëfficiens constans, il sera facile d'en trouver les intégrales complètes, et comme ces équations sont l'une et l'autre du second ordre, les valeurs générales de r et de s renfermeront chacune deux constantes arbitraires. Ces 4 constantes peuvent servir à assujettir chacune des fonctions r et s à deux conditions. Supposons qu'on les choisisse de manière à avoir $r = 0$, $s = 0$ lorsque $x = 0$, et $r = 1$, $s = 0$, lorsqu'on fait $x = \pi$. Désignant par R et S les valeurs de r et s ainsi particularisées, nous aurons l'expression

$$(5.) \quad R\cos\alpha t + S\sin\alpha t$$

qui, outre qu'elle satisfait à l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ jouit encore de la double propriété de s'évanouir pour $x = 0$, et de se réduire à $\cos\alpha t$, l'orsqu'on y fait $x = \pi$. L'expression précédente étant multipliée par $\psi(\alpha)\partial\alpha$, $\psi(\alpha)$ désignant une fonction entièrement arbitraire de α, et intégrée depuis $\alpha = 0$ jusqu'à $\alpha = \infty$, donnera cette nouvelle fonction de x et de t:

$$\int_0^\infty (R\cos\alpha t + S\sin\alpha t)\,\psi(\alpha)\,\partial\alpha,$$

qui satisfera également à l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, s'évanouira pour $x = 0$, et deviendra $\int_0^\infty \psi(\alpha)\cos\alpha t\,\partial\alpha$, lorsqu'on y fait $x = \pi$. La fonction $\psi(\alpha)$ étant arbitraire, on peut la choisir de manière que l'intégrale précédente devienne égale à la fonction donnée $f(t)$, pour toute valeur positive de t. La fonction $\psi(\alpha)$ qui remplit cette condition, est d'après le

théorème connu de Mr. Fourier (*Théorie de la chaleur, pag.* 431.) celle que donne l'équation $\psi(\alpha) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\alpha\mu f(\mu)\,\partial\mu$, dans laquelle μ est une variable auxiliaire qui disparait par l'intégration définie. Si l'on substitue cette valeur de $\psi(\alpha)$ dans l'expression obtenue plus haut, on aura cette nouvelle expression

$$(6.)\quad \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty (R\cos\alpha t + S\sin\alpha t) f(\mu)\cos\alpha\mu\,\partial\alpha\,\partial\mu,$$

qui remplit les 3 conditions de satisfaire à l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, de s'évanouir pour $x = 0$, et de devenir $f(t)$ pour $x = \pi$. Cette expression peut donc être prise pour v'. Si l'on change ensuite x en $\pi - x$, et $f(\mu)$ en $F(\mu)$ dans l'expression précédente, on aura une nouvelle expression, que l'on pourra prendre pour v'', et il ne restera plus qu'à former la troisième partie w de la solution.

Cette troisième partie exprime, comme nous l'avons vu plus haut, les états successifs d'une barre dont les deux extremités sont entretenues à la température zéro et dont l'état initial est $\varphi(x) - \chi(x)$, $\varphi(x)$ étant une fonction primitivement donnée et $\chi(x)$ désignant la fonction de x, à laquelle se réduit la somme $v' + v'' = v$, lorsqu'on y fait $t = 0$. Quoique d'après ce que nous avons dit plus haut il suffise pour la solution de notre problème, d'obtenir une quelconque des fonctions en nombre infini qui remplissent les 3 premières des conditions (2.), le choix de cette fonction n'est pas indifférent. Le calcul se simplifie d'une manière remarquable, lorsque l'on prend pour v une fonction telle que l'on puisse prévoir, qu'elle est la fonction $\chi(x)$ à laquelle elle se reduit pour $t = 0$; car alors on pourra former immédiatement la troisième partie w, dans la composition de laquelle entre cette fonction $\chi(x)$. La valeur de v précédemment obtenue ne présente pas cette facilité, mais il est facile d'en obtenir une qui remplisse cet objet, en modifiant un peu l'analyse que nous venons d'employer. C'est ce que nous allons faire voir en reprenant ce que nous avons dit depuis que nous sommes parvenus à l'expression (5.).

La variable t étant remplacée dans cette expression par $t - \mu$, μ désignant une nouvelle arbitraire indépendante de α, x et t, elle ne cessera pas de satisfaire à l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et de s'évanouir pour $x = 0$, quelle que soit la valeur positive ou négative de t, mais pour $x = \pi$ elle se réduira à $\cos\alpha(t - \mu)$.

Multipliant l'expression ainsi modifiée par $\frac{1}{\pi} f(\mu)\,\partial\alpha\,\partial\mu$ et intégrant depuis $\mu = 0$, $\alpha = 0$, jusqu'à $\mu = \infty$, $\alpha = \infty$, on aura cette nouvelle fonction de x et de t

$$(7.)\quad \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty (R\cos\alpha(t-\mu) + S\sin\alpha(t-\mu))\,f(\mu)\,\partial\alpha\,\partial\mu,$$

qui satisfait encore à l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, s'évanouit pour $x = 0$, et se réduit à

$$\frac{1}{\pi}\iint \cos\alpha(t-\mu)\,f(\mu)\,\partial\alpha\,\partial\mu,$$

lorsqu'on y fait $x = \pi$. La valeur de cette intégrale double est connue par le théorème de Mr. Fourier et l'intégration relative à μ ne s'étendant que depuis $\mu = 0$ jusqu'à $\mu = \infty$, cette valeur est $f(t)$ lorsque t est positif, et égal à zéro, lorsque le temps t devient négatif. La formule (7.) exprime donc les états variables d'une barre dont les deux extrémités ont été entretenues à la température zéro pendant tout le temps infini antérieur à l'instant qui répond à $t = 0$, et dont la seconde extrémité est entretenue à la température $f(t)$ à partir de cette époque, la première conservant toujours la température zéro. Or il est évident qu'une barre dont les deux extremités ont été assujéties à la température zéro pendant un temps infini, a acquis dans tous ses points cette même température zéro. Donc, l'expression (7.) doit s'évanouir pour toute valeur de x inférieure à π, lorsqu'on y fait $t = 0$. Il serait d'ailleurs facile d'obtenir cette même conséquence par le seul examen de l'expression (7.) et sans aucune considération physique.

Prenant l'expression (7.) pour v' et l'expression qui s'en déduit par le changement de $f(\mu)$ en $F(\mu)$ et de x en $\pi - x$, pour v'', la somme $v' + v''$ s'évanouira pour $t = 0$; la fonction $\chi(x)$ sera nulle et la troisième partie w sera l'expression des états variables d'une barre dont les deux extrémités sont assujéties à la température zéro et dont l'état initial est exprimé par la fonction connue $\varphi(x)$. Cette troisième partie w est donnée par la formule suivante, dans laquelle le signe Σ se rapporte à toutes les valeurs positives et entières de i,

$$\frac{2}{\pi}\Sigma \sin ix\, e^{-i^2 t}\int_0^\pi \varphi(\mu)\sin i\mu\,\partial\mu.$$

(*Théorie de la chaleur*, pag. 436.)

La valeur de v' (7.) est sous une forme assez compliquée. Il en est de même de la seconde partie v''. Ces deux expressions se simplifient beaucoup lorsqu'on leur donne une forme analogue à celle de la troisième, c'est à dire, l'orsqu'on les développe en séries de sinus des arcs multiples de x. Ce développement est évidemment permis, la variable x ne devant recevoir que des valeurs inférieures à π dans l'expression v' (7.) et dans l'expression analogue v''. Pour transformer la fonction (7.) en une pareille série, il suffira de développer R et S, qui renferment seules la variable x. Faisons donc

$$(8.) \quad R = \Sigma b_i \sin ix, \quad S = \Sigma c_i \sin ix$$

le signe Σ se rapportant comme précédemment aux valeurs positives et entières de i. Les coëfficiens b_i et c_i qui ne peuvent dépendre que de α, seront donnés par ces intégrales définies, d'après la théorie connue des séries de sinus.

$$(9.) \quad b = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi R \sin ix\, \partial x, \quad c_i = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi S \sin ix\, \partial x.$$

On peut obtenir les valeurs de ces deux intégrales définies, sans être obligé de résoudre les équations différentielles (4.).

Pour y parvenir, nous remplacerons dans les expressions précédentes de b_i et c_i, R et S par les différentielles secondes $-\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$, $\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}$ qui leur sont respectivement égales en vertu des équations (4.) dont R et S sont des intégrales particulières. Intégrant ensuite deux fois par parties, les expressions de b_i et c_i, et observant qu'à la première limite $x=0$, $\sin ix$, R et S sont nulles, et qu'à la seconde limite $x=\pi$, on a $\sin i\pi = 0$, $R=1$, $S=0$, il viendra

$$b_i = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{i^2}{\alpha}\int_0^\pi S \sin ix\, \partial x,$$

$$c_i = -\frac{2}{\pi}\cdot\frac{i\cos i\pi}{\alpha} - \frac{2i^2}{\pi\alpha}\int_0^\pi R \sin ix\, \partial x.$$

Mais d'après les équations (9.) les deux intégrales précédentes sont respectivement équivalentes à $\frac{\pi}{2}b_i$, $\frac{\pi}{2}c_i$. La substitution de ces valeurs donne ces 2 relations entre b_i et c_i:

$$b_i = \frac{i^2}{\alpha}c_i, \quad c_i = -\frac{2}{\pi}\cdot\frac{i\cos i\pi}{\alpha} - \frac{i^2}{\alpha}b_i,$$

d'où l'on tire:

$$b_i = -\frac{2}{\pi}\cdot\frac{i^3\cos i\pi}{\alpha^2+i^4}, \quad c_i = -\frac{2}{\pi}\cdot\frac{i\alpha\cos i\pi}{\alpha^2+i^4}.$$

Mettant ces valeurs des coëfficiens b_i et c_i dans R et S (8.), substituant ensuite R et S ainsi transformées dans l'expression (7.) et intervertissant l'ordre des signes Σ et $\int$, l'expression (7.) deviendra:

$$(10.) \quad -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(\mu)\,\partial\mu\,\Sigma\frac{2i\cos i\pi\sin ix}{\pi}\left(\int_0^\infty \frac{i^2\cos\alpha(t-\mu)}{\alpha^2+i^4}\,\partial\alpha+\int_0^\infty \frac{\alpha\sin\alpha(t-\mu)}{\alpha^2+i^4}\,\partial\alpha\right).$$

Les deux intégrales relatives à α que renferme cette expression sont faciles à obtenir par les formules connues. On a, comme l'on sait:

$$\int_0^\infty \frac{b\cos\alpha l}{b^2+\alpha^2}\,\partial\alpha=\frac{\pi}{2}e^{\mp bl},\quad \int_0^\infty \frac{\alpha\sin\alpha l}{\alpha^2+b^2}\,\partial\alpha=\pm\frac{\pi}{2}e^{\mp bl},$$

b désignant une quantité positive, et le signe supérieur ou le signe inférieur ayant lieu selon que l est positif ou négatif. En comparant ces résultats avec les intégrales précédentes, on voit que ces deux intégrales ont l'une et l'autre la valeur $\frac{\pi}{2}e^{-i^2(t-\mu)}$ lorsque $t-\mu$ est positif, et que lorsque $t-\mu$ est négatif, elles ont respectivement les valeurs

$$\frac{\pi}{2}e^{i^2(t-\mu)},\quad -\frac{\pi}{2}e^{i^2(t-\mu)},$$

qui ne diffèrent que par les signes. Donc, la somme de ces intégrales est $\pi e^{-i^2(t-\mu)}$ ou nulle, selon que $t-\mu$ est positif ou négatif. Il suit de là que la série contenue dans la formule (10.) peut être remplacée par

$$(11.) \quad 2\Sigma i\cos i\pi\sin ix\,e^{-i^2(t-\mu)},$$

lorsque $t-\mu$ est positif, c'est à dire tant que μ est inférieur à t, et qu'elle se réduit à zéro, lorsque μ surpasse t. La fonction de μ qui doit être intégrée depuis $\mu=0$ jusqu'à $\mu=\infty$, et dont la série en question est facteur, s'évanouit donc aussi pour toutes les valeurs de μ supérieures à t.

On pourra donc n'intégrer que depuis $\mu=0$ jusqu'à $\mu=t$; changeant ainsi la limite supérieure de l'intégrale (10.) et remplaçant la série qui y entre par l'expression (11.), qui lui est équivalente tant que $\mu<t$, c'est à dire dans toute l'étendue de l'intégration, l'expression (10.) prendra cette forme très simple:

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^t f(\mu)\,\partial\mu\,\Sigma i\cos i\pi\sin ix\,e^{-i^2(t-\mu)},$$

ou ce qui revient au même, en intervertissant l'ordre des signes $\int$ et Σ:

$$-\frac{2}{\pi}\Sigma\, i\cos i\pi\sin ix\,e^{-i^2t}\int_0^t e^{i^2\mu}f(\mu)\,\partial\mu.$$

Ayant ainsi obtenu la première partie v' de la solution, on en déduira la seconde v'' en changeant x en $\pi-x$ et $f(\mu)$ en $F(\mu)$. Si l'on

ajoute ensuite v' et v'' à la troisième partie w déjà formée plus haut, on obtiendra l'expression suivante de la température variable u du point dont l'abscisse est x

$$u = -\frac{2}{\pi}\Sigma\, i \cos i\pi \sin ix\, e^{-i^2 t}\int_0^t f(\mu)\, e^{i^2\mu}\,\partial\mu$$
$$-\frac{2}{\pi}\Sigma\, i \sin ix\, e^{-i^2 t}\int_0^t F(\mu)\, e^{i^2\mu}\,\partial\mu$$
$$+\frac{2}{\pi}\Sigma \sin ix\, e^{-i^2 t}\int_0^\pi \varphi(\mu)\sin i\mu\,\partial\mu.$$

Cette expression diffère un peu par la forme du résultat que Mr. Fourier a donné. Pour la faire coïncider avec la formule que l'on trouve dans le Mémoire déjà cité, il faut remplacer l'intégrale qui entre dans la première partie v' de u par cette expression que donne l'intégration par parties:

$$\frac{f(t)e^{i^2 t}-f(0)}{i^2} - \frac{1}{i^2}\int_0^t f'(\mu)\, e^{i^2\mu}\,\partial\mu,$$

$f'(\mu)$ désignant la fonction derivée de $f(\mu)$.

La première partie v' se change ainsi en

$$-\frac{2}{\pi}f(t)\Sigma\frac{\cos i\pi \sin ix}{i} + \frac{2}{\pi}\Sigma\cos i\pi\frac{\sin ix}{i}\, e^{-i^2 t}\left(f(0)+\int_0^t f'(\mu)\, e^{i^2\mu}\,\partial\mu\right).$$

Mettant maintenant à la place de $\Sigma\frac{\cos i\pi \sin ix}{i}$ sa valeur connue $-\frac{1}{2}x$, v' prendra cette forme:

$$\frac{x}{\pi}f(t) + \frac{2}{\pi}\Sigma\cos i\pi\frac{\sin ix}{i}e^{-i^2 t}\left(f(0)+\int_0^t f'(\mu)\, e^{i^2\mu}\,\partial\mu\right).$$

Si l'on transforme v'' d'une manière analogue et que l'on ajoute ensuite les 3 parties v', v'' et w, on aura l'expression de la température u, telle que Mr. Fourier l'a donnée.

21.
Deux théorèmes sur les nombres.

Théorème I. **Tout nombre entier est diviseur d'un nombre exprimé par une suite de 9, suivis de plusieurs zéros.** (*Annales de mathém. de Mr.* Gergonne, *tome XIX. page* 256.)

Démonstration. (*Par un abonné du present journal.*) Divisons les puissances successives de 10 par le nombre entier donné k, il ne pourra y avoir que k restes différents, zéro y compris. Donc les mêmes restes reviendront nécessairement. Soit 10^m et 10^n deux puissances de 10 qui laissent les mêmes restes, la différence $10^n - 10^m$, ou bien $10^m(10^{n-m}-1)$ sera divisible par k. Mais $10^m(10^{n-m}-1)$ est un nombre exprimé par une suite de $n-m$ neufs suivis de m zéros. Il existe donc toujours un nombre de cette forme divisible par le nombre entier donné k.

Théorème II. (*Par l'éditeur.*) **Tout nombre entier est diviseur d'un nombre exprimé par une suite de périodes de chiffres donnés, suivis de plusieurs zéros.**

Démonstration. Tout nombre exprimé par une suite de périodes de chiffres donnés peut être exprimé par

$$z = P(1 + 10^m + 10^{2m} + \ldots . 10^{nm}),$$

P étant la période et m le nombre de chiffres qu'elle contient. La période P y peut toujours être supposée plus grande que le diviseur k; car si une simple période p étoit plus petite, il n'y auroit qu'à en réunir plusieurs dans une seule P. En divisant ce nombre z par le nombre donné k, les derniers chiffres des périodes P ne pourront laisser que k restes différents, zéro y compris. Donc les mêmes restes reviendront nécessairement. Soient

$$P(1 + 10^m + 10^{2m} + \ldots . + 10^{\mu m} + 10^{(\mu+1)m} \ldots . + 10^{\nu m}) \text{ et}$$
$$P(1 + 10^m + 10^{2m} + \ldots . + 10^{\mu m})$$

deux nombres composés de la période P qui laissent les mêmes restes, leur différence

$$P(10^{(\mu+1)m} + 10^{(\mu+2)m} + \ldots . + 10^{\nu m}) \text{ ou bien}$$
$$P.10^{(\mu+1)m}(1 + 10^m + 10^{2m} + \ldots . + 10^{(\nu-\mu-1)m})$$

sera divisible par k. Mais cette différence est elle même un nombre exprimé par une suite de $\nu - \mu$ périodes de m chiffres donnés, suivis de $(\mu+1)m$ zéros. Il existe donc toujours un nombre de cette forme, divisible par le nombre entier donné k.

22.

Über die Curven des kürzesten Perimeters auf krummen Flächen. In Folge der Aufgabe 6. Band 3. Heft 1. S. 99.

(Von Herrn Dr. *Ferd. Minding* zu Berlin.)

---

1. Sey $\psi(x, y, z) = 0$ die Gleichung einer krummen Fläche, in Bezug auf rechtwinklige Coordinaten. Aus derselben sei die Gleichung $dz = p\,dx + q\,dy$ abgeleitet. Ein auf der krummen Fläche befindlicher Raum ist $\int\int v\,dx\,dy$, wo $v^2 = 1 + p^2 + q^2$, und sein Umring: $\int\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$; beide Integrale zwischen denselben Grenzen, in Bezug auf x genommen. Bezeichnet nun h eine Constante, so fordert die Aufgabe: auf der Fläche einen gegebenen Raum mit der möglich-kürzesten Linie einzuschliefsen, dafs der Gleichung:

$$h\,\delta\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} + \delta\int\int v\,dx\,dy = 0$$

Genüge geschehn.

Diese Gleichung giebt, nach den Regeln der Variationsrechnung behandelt, folgende:

$$1.\quad d\frac{dy}{ds} + q\,d\frac{dz}{ds} = \frac{v\,dx}{h},$$

wo $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ gesetzt worden ist.

Wendet man diese Gleichung zunächst auf die Ebene an, so sind in diesem Falle die Gröfsen p, q, v, Constanten, und man erhält die Gleichung:

$$\frac{dy + q(p\,dx + q\,dy)}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + (p\,dx + q\,dy)^2)}} = \frac{v}{h}(x + \alpha),$$

welche sich leicht weiter integriren läfst, und nach mehreren Reductionen die Gleichung einer Kugel: $(x + \alpha)^2 + (y + \beta)^2 + (z + \gamma)^2 = h^2$ giebt. Diese, mit der gegebenen Gleichung der Ebene verbunden, welche unter der Form: $z + \gamma = p(x + \alpha) + q(y + \beta)$ zu denken ist, giebt einen Kreis vom Halbmesser h, wie es bekanntlich sein mufs.

Ist die gegebene Fläche eine Kugel, so ist $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $p = -\frac{x}{z}$, $q = -\frac{y}{z}$, und die Gleichung (1.) geht daher in folgende über:

$$z\,d\frac{dy}{ds} - y\,d\frac{dz}{ds} = \frac{r\,dx}{h}.$$

Das Integral dieser Gleichung ist $x + by + cz = g$, wo b und c willkürliche Constanten sind. Die Gleichung der Kugel giebt:

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0,$$

und die der Ebene:

$$dx + b\,dy + c\,dz = 0,$$

mithin:

$$(cx - z)\,dx = (bz - cy)\,dy \quad \text{und} \quad (y - bx)\,dx = (bz - cy)\,dz.$$

Hieraus folgt:

$$ds^2.(bz - cy)^2 = (bz - cy)^2 + (cx - z)^2 + (y - bx)^2.dx^2 = \lambda^2.dx^2,$$

und man findet leicht, dafs $\lambda^2 = (1 + b^2 + c^2)r^2 - g^2$. Die Differentialgleichung wird mithin:

$z\,d(cx - z) - y\,d(y - bx) = \frac{r\lambda}{h}dx$, oder $cz\,dx + by\,dx - z\,dz - y\,dy = \frac{r\lambda}{h}dx$,

d. h. $x + by + cz = \frac{r\lambda}{h} = g$, wodurch auch g bestimmt ist.

Die Curve des kürzesten Perimeters auf der Kugel ist also eine ebene Curve, und folglich ein Kreis, wie sich erwarten liefs.

2. Es ist in vielen Fällen nützlich, andre Coordinaten zu nehmen. Setzt man $x = r\cos\psi$, $y = r\sin\psi$, so wird $ds^2 = r^2 d\psi^2 + dr^2 + dz^2$, und die Gleichung:

$$h\delta\int ds + \delta\iint v\,d\psi\,r\,dr = 0$$

giebt, wenn $\delta r = 0$ angenommen wird,

$$d\frac{r^2\,d\psi}{ds}\delta\psi + d\frac{dz}{ds}\delta z = \frac{v\,r\,dr}{h}\delta\psi,$$

wo $\frac{1}{v}$ wie vorhin den Cosinus der Neigung eines Flächen-Elements gegen die Ebene der x und y bedeutet.

Wenden wir diese Gleichung auf den Kegel an, dessen Gleichung $z = r\,\text{cotang}\,\alpha$, so ist, wie bei allen runden Flächen, $\delta z = 0$ zu setzen, und es ergiebt sich die Gleichung der Curve des kürzesten Perimeters auf dem geraden Kegel:

$$d\frac{r^2\,d\psi}{ds} = \frac{r\,dr}{h\sin\alpha}, \quad \text{weil} \quad v = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

Zugleich ist

$$ds^2 = r^2 d\psi^2 + \frac{dr^2}{\sin\alpha^2}.$$

Das vollständige Integral der obigen Gleichung ist:

$$r^2 - 2r\varrho\cos m(\psi - \beta) + \varrho^2 = \sigma^2,$$

wo $m = \sin\alpha$, $h\sin\alpha = \sigma$, und ϱ und β willkürliche Constanten sind.

Diese Gleichung ergiebt

$$ds = \frac{\sigma r\, d\psi}{r - \varrho \cos m(\psi - \beta)},$$

mithin:

$$\frac{r^2 d\psi}{ds} = \frac{r^2 - \varrho r \cos m(\psi - \beta)}{\sigma} = \frac{r^2 + \sigma^2 - \varrho^2}{2\sigma},$$

also

$$d\frac{r^2 d\psi}{ds} = \frac{r\, dr}{\sigma},$$

wie oben.

3. Die allgemeine Gleichung $d\frac{dy}{ds} + q\, d\frac{dz}{ds} = \frac{v\, dx}{h}$ giebt, entwikkelt, folgende:

$$dx^2 d^2y + (dz - q\, dy)(d^2y\, dz - dy\, d^2z) + q\, d^2z\, dx^2 = \frac{v\, ds^3\, dx}{h},$$

oder, wenn man für $dz - q\, dy$ seinen Werth $p\, dx$ setzt:

$$2.\quad dx\, d^2y + q\, dx\, d^2z + p(dz\, d^2y - dy\, d^2z) = \frac{v\, ds^3}{h}.$$

Nun ist aber

$$(dz\, d^2y - dy\, d^2z)\, x + dx\, d^2z\,.\,y - dx\,.\,d^2y\,.\,z + \alpha = 0$$

die Gleichung der sich an eine Curve doppelter Krümmung anschliefsenden Ebene.

Die Gleichung für die Tangential-Ebene einer krummen Fläche ist bekanntlich:

$$p\,.\,x + q\,.\,y - z + \beta = 0.$$

Liegt demnach auf einer krummen Fläche eine beliebige Curve doppelter Krümmung, und bezeichnet man, in Bezug auf einen Punct der Curve und der Fläche, die Neigung der Ebene des Krümmungskreises der Curve gegen die Tangential-Ebene der Fläche, mit i, so hat man

$$\cos i = \frac{dx\, d^2y + q\, dx\, d^2z + p(dz\, d^2y - dy\, d^2z)}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}\,.\,\sqrt{(dx^2 d^2y^2 + dx^2 d^2z^2 + (dz\, d^2z - dy\, d^2z)^2)}}.$$

Man dividire nun die Gleichung (2.) mit

$$\sqrt{(1+p^2+q^2)}\,.\,\sqrt{(dx^2 d^2y^2 + dx^2 d^2z^2 + (dz\, d^2y - dy\, d^2z)^2)} = v\,.\,\mu,$$

so erhält man auf der linken Seite offenbar $\cos i$, auf der rechten: $\frac{ds^3}{h\mu}$. Nun ist $\frac{ds^3}{\mu}$ der Krümmungshalbmesser R einer Curve im Raume; folglich hat man für die Curve des kürzesten Perimeters die Gleichung: $h \cos i = R$, der zufolge in jedem Puncte der Curve der Cosinus der Neigung des Krümmungs-Halbmessers derselben gegen die Tangential-Ebene der Fläche, dem Krümmungs-Halbmesser selbst proportional ist. Wenn

i seine vorige Bedeutung behält, so hat man für die kürzeste Linie auf einer Fläche bekanntlich die Gleichung: $\cos i = 0$.

4. Man denke auf der krummen Fläche einen Punct A, und durch denselben in beliebiger Richtung eine kürzeste Linie als Coordinaten-Axe gezogen. Die Lage irgend eines Punctes B auf der Fläche kann durch die Länge der kürzesten Linie zwischen A und B, d. h. durch die Entfernung dieser Puncte auf der Fläche, (a), und durch den Winkel, welchen AB im Puncte A mit der Axe einschliefst (π), angegeben werden. Nennt man nun s den Bogen einer kürzesten Linie, die von B anfangend in beliebiger Richtung und Länge auf der Fläche gezogen ist, und ψ den Winkel, welchen s im Puncte B mit AB oder a einschliefst, so kann irgend eine Curve auf der Fläche durch eine Gleichung zwischen s und ψ, als Coordinaten, bestimmt werden. Um auf ein solches Coordinatensystem die Variationen anwenden zu können, müssen wir erst die Ausdrücke für Bogen und Flächenraum einer Curve suchen, welche unter dieser Voraussetzung Statt finden.

Betrachten wir zu diesem Ende eine Curve, die mit einem constanten Radius s vom Puncte B aus auf der Fläche beschrieben ist. Es läfst sich sogleich ohne alle Rechnung zeigen, dafs der Radius s in jedem Puncte derselben senkrecht auf dem Perimeter steht. Denn man denke sich aus dem Mittelpuncte B noch eine zweite Curve mit dem unveränderlichen Halbmesser r beschrieben. Sei r kleiner als s, so behaupte ich, dafs $s - r$ der kürzeste Abstand eines Punctes der zweiten Curve von der ersten ist, und mithin senkrecht auf dieser steht. Denn liefse sich von diesem Puncte nach der andern Curve eine kürzeste Linie u ziehen, so dafs u kleiner wäre als $s - r$, so würde hieraus sich ein Dreieck mit den Seiten s, u, r ergeben, in welchem $s > u + r$, was ein Widerspruch ist, da s die möglich-kürzeste Linie auf der Fläche zwischen ihren Endpuncten ist.

Nennen wir den Perimeter der mit einem constanten Radius beschriebenen Curve P, so ist irgend ein Bogen desselben, von dem Puncte an gerechnet, wo $\psi = 0$, offenbar von ψ und dem Radius s abhängig. Man hat also $P = \varphi(\psi, s)$. Auch die Coordinaten a und π des Mittelpunctes B können in dem Ausdrucke für P sehr wohl vorkommen, da im Allgemeinen auf krummen Flächen die Lage dieses Punctes nicht ohne Einflufs angenommen werden darf. Man hat folglich, da s constant ist,

$dP = \varphi . d\psi$, wo φ eine gewisse, von der Natur der Fläche abhängige Function der Gröfsen ψ und s ist. Weil nun der Radius s senkrecht auf P steht, so ist klar, dafs das Element des Flächenraums einer Curve, die durch eine Gleichung zwischen ψ und s bestimmt ist, durch $dP.ds = \varphi d\psi ds$, und das Element des Bogens durch $\surd(\varphi^2 d\psi^2 + ds^2)$ ausgedrückt werden mufs.

Demnach erhält man zur Bestimmung der Curve des kürzesten Perimeters die Gleichung:

$$h\delta\int\surd(\varphi^2 d\psi^2 + ds^2) + \delta\iint\varphi d\psi\, ds = 0.$$

Setzen wir der Kürze wegen $dP^2 = \varphi^2 d\psi^2 + ds^2$, und variiren blofs noch ψ, da bekanntlich beide Gleichungen, welche man durch die Variationen von s und ψ erhalten würde, übereinstimmen müssen, so erhalten wir:

$$\int \frac{h\varphi\, d\psi^2}{dP}\delta\varphi + \frac{h\varphi^2 d\psi}{dP}\delta d\psi + \varphi ds\delta\psi = 0;$$

welche Gleichung

$$h\varphi\left(\frac{d\varphi}{d\psi}\right).\frac{d\psi}{dP}d\psi - hd\left(\frac{\varphi^2 d\psi}{dP}\right) + \varphi ds = 0,$$

als Differentialgleichung für die Curve des kürzesten Perimeters giebt.

Diese Gleichung wird, wie leicht zu sehen, durch die Annahme $ds = 0$ befriedigt. Denn es folgt aus dieser Annahme: $dP = \varphi d\psi$, wodurch die vorgelegte Gleichung in folgende übergeht: $\left(\frac{d\varphi}{d\psi}\right)d\psi - d\varphi = 0$, welche identisch ist, φ mag von ψ abhängen, oder, wie in einigen bekannten Fällen geschieht, nicht abhängen.

Die Annahme $ds = 0$ kann aber keine singuläre Auflösung der vorgelegten Gleichung enthalten. Denn es ist bekannt, dafs eine singuläre Auflösung einer gegebenen Differentialgleichung allemal als ein Factor derselben mufs dargestellt werden können, welcher dann nur gleich Null gesetzt zu werden braucht, um die Auflösung zu erhalten. Von der andern Seite aber ist klar, dafs ds ein Factor der vorgelegten Gleichung weder ist, noch durch Entwickelung derselben werden kann. Mithin ist $ds = 0$ und folglich auch $s = \text{const.}$ ein particuläres Integral der vorgelegten Gleichung.

Es kommt nun darauf an, das Verhältnifs dieses particulären Integrals zum vollständigen zu untersuchen. Das particuläre Integral könnte z. B. nur für gewisse Orte auf der gegebenen krummen Fläche gelten. Allein dies ist gar nicht der Fall; vielmehr läfst sich leicht zeigen, dafs

die Werthbestimmung der Constanten, durch welche allein das particuläre Integral entstanden sein kann, überall auf der Fläche von den Coordinaten a und π des Punctes B abhängt. Stellen wir das allgemeine Integral durch $F(\psi, s, h, \varkappa, \lambda) = 0$ vor, wo $\varkappa$ und λ die Constanten der Integration sind.

Seien zwei Puncte m und n auf der Fläche durch Coordinaten α und σ, α' und σ', vom Puncte A aus, bestimmt. Stelle t die kürzeste Linie zwischen den Puncten B und m vor, so wird die Länge derselben nothwendig durch die Coordinaten ihrer Endpuncte bestimmt, und man hat: $t = f(\alpha, \sigma, a, \pi)$. Auch der Winkel θ, welchen t im Puncte B mit a macht, hängt von denselben Gröfsen ab, so dafs man hat:

$$\theta = f_1(\alpha, \sigma, a, \pi).$$

Für den Punct n gelten auf analoge Weise Gleichungen wie:

$$t' = f(\alpha', \sigma', a, \pi) \quad \text{und} \quad \theta' = f_1(\alpha', \sigma', a, \pi).$$

Soll also die Curve des kürzesten Perimeters durch die beiden Puncte m und n gelegt werden, so hat man zur Bestimmung der Constanten $\varkappa$ und λ folgende Gleichungen:

$$F(\theta, t, h, \varkappa, \lambda) = 0 \quad \text{und} \quad F(\theta', t', h, \varkappa, \lambda) = 0.$$

Diesen zufolge reduciren sich, die beiden gegebenen Puncte im Perimeter als fest vorausgesetzt, die Constanten $\varkappa$ und λ lediglich auf Functionen von a und π, und umgekehrt.

Da es nun Werthe der Constanten $\varkappa$ und λ giebt, für welche aus der Gleichung $F(\psi, s, h, \varkappa, \lambda) = 0$ der Winkel ψ gänzlich verschwindet, so giebt es auch Werthe von a und π, welche aus derselben Gleichung ebenfalls ψ verschwinden machen, und mithin eine Gleichung $F(s, h) = 0$ hervorbringen.

Wo man also auch auf einer krummen Fläche zwei Puncte annehmen möge, durch welche die Curve des kürzesten Perimeters gelegt werden soll: immer lassen sich die Coordinaten a und π eines Punctes B finden, von welchem alle Puncte des Umringes der Curve auf der Fläche gleich weit entfernt sind. Bezeichnet man die Werthe von $\varkappa$ und λ, durch welche ψ aus der Gleichung $F(\psi, s, h, \varkappa, \lambda) = 0$ verschwindet, mit $\varkappa'$ und λ', so sind die Gleichungen zur Bestimmung von s, a, π folgende: $F(s, h, \varkappa', \lambda') = 0$, $s = f(\alpha, \sigma, a, \pi) = f(\alpha', \sigma', a, \pi)$.

5. Dies ist also die characteristische Eigenschaft der Curven des kürzesten Perimeters auf krummen Flächen. Es sei s der Radius einer

solchen Curve, so ist ihr Umring von s abhängig, und kann daher mit φs bezeichnet werden; der Flächenraum aber, welchen sie einschliefst, ist $\int_0^s \varphi s.ds$. Diese Ausdrücke entsprechen in der That einer Forderung, welche durch die Natur einer Curve geboten wird, die mit dem kleinsten Umring einen gegebenen Flächenraum umschliefsen soll, nemlich: dafs der Perimeter einer solchen Curve durch ihren Flächenraum bestimmt werden mufs. Dies ist z. B. in der Ebene bei dem Kreise der Fall, aber nicht bei der Ellipse, u. a. Auch die Variationsrechnung drückt eigentlich nichts weiter als diesen Umstand aus, indem sie eine Gleichung aufstellt, der zufolge die Variationen des Umringes und des Flächenraumes für die gesuchte Curve beide zugleich verschwinden sollen, was eben darauf hinausläuft, dafs die eine dieser Gröfsen durch die andre bestimmt werden, oder von der andern ausschliefslich abhängig sein mufs. Diese nothwendige Eigenschaft der in Rede stehenden Curven gab die nächste Veranlassung zu der Vermuthung, dafs alle diese Curven einen constanten Radius haben müfsten, aus welchem Umstande jene Eigenschaft wiederum hervorgeht.

Es verdient noch bemerkt zu werden, dafs in dem Ausdrucke des Umrings φs die Coordinaten des Mittelpunctes vorkommen können. Dies kann allerdings weder auf der Ebene, noch auf der Kugel, noch auf den abwickelbaren Flächen der Fall sein; denn in Bezug auf die letzteren ist klar, dafs die Curve des kürzesten Perimeters durch Abwickelung in einen Kreis übergehen mufs. Kommen aber auf andern Flächen die Coordinaten des Mittelpunctes in dem Ausdrucke des Umringes vor, so müssen sie auch in dem Ausdrucke des Flächenraumes vorhanden sein. Unter dieser Voraussetzung liefse sich nach dem vortheilhaftesten Mittelpuncte fragen, d. h. nach dem, welcher bei gegebenem Flächenraum unter allen den kleinsten Perimeter bedingt. Man hätte, nach dieser Voraussetzung, $F = \psi(s, a, \pi)$, $P = \varphi(s, a, \pi)$. Eliminirt man s aus diesen Gleichungen, so erhält man $P = f(F, a, \pi)$, und wenn man mit dieser Gleichung die folgenden $\frac{dP}{da} = 0$, $\frac{dP}{d\pi} = 0$ verbindet, so werden die Coordinaten a und π durch den gegebenen Flächenraum F bestimmt, woraus sich denn weiter s und P ergeben müssen. Es wäre der Mühe werth, zu untersuchen, ob und in welchen Fällen die hier gemachte Voraussetzung Statt finde.

6. Wir haben hiermit auf einem indirecten Wege ein analytisches Theorem gefunden, dessen directer Beweis eben so schwierig als wünschenswerth erscheint. Dasselbe läfst sich am einfachsten folgendermafsen aussprechen:

Sei $\psi(x, y, z) = 0$ die Gleichung einer krummen Fläche. Die Gleichung der kürzesten Linie auf derselben ist das Integral der Gleichung: $d\frac{dy}{ds} + q\,d\frac{dz}{ds} = 0$, welches durch

$$(a.) \quad F(x, y, \varkappa, \lambda) = 0$$

bezeichnet werden mag, wo $\varkappa$ und λ die Constanten der Integration sind. Bestimmen wir eine derselben durch die Gleichung:

$$(b.) \quad F(\alpha, \beta, \varkappa, \lambda) = 0,$$

so dafs die kürzeste Linie durch den Punct auf der Fläche geht, für welchen $x = \alpha$, $y = \beta$. Setzen wir ferner den Bogen der kürzesten Linie, d. h. das Integral:

$$(c.) \quad \int_{\alpha}^{x} \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} = s,$$

wo s eine Constante ist. Eliminiren wir nun zwischen den 3 Gleichungen $(a.)$, $(b.)$, $(c.)$ die Gröfsen $\varkappa$ und λ, so müssen wir eine Gleichung zwischen x und y erhalten, welche in Verbindung mit der Gleichung der Fläche die Curve des kürzesten Perimeters bestimmt, also als Integral der Gleichung

$$d\frac{dy}{ds} + q\,d\frac{dz}{ds} = \frac{v\,dx}{h}$$

entspricht. Die willkürlichen Constanten des Integrals, α und β, sind die Coordinaten der Projection des Mittelpunctes auf die Ebene der x und y, und die Gröfse h ist als eine Function des constanten Radius s anzusehn.

Zur Erläuterung diene noch das Beispiel des Kegels, dessen Gleichung $z = r\,\mathrm{cotang}\,\alpha$. Für die kürzeste Linie auf demselben findet sich: $r\cos m\psi + b = c$; c und b sind willkürliche Constanten und m ist, wie oben, $= \sin\alpha$. Für $\psi = \beta$ werde $r = \varrho$, so erhält man $\varrho\cos m\beta + b = 0$. Für den Bogen der kürzesten Linie erhält man: $s = c\,\mathrm{tang}\,m\psi + b - c\,\mathrm{tang}\,m\beta + b$, weil der Bogen für $\psi = \beta$ verschwinden mufs. Aus den beiden ersten Gleichungen erhält man:

$$\cos m\beta + b = \frac{r\sin m(\psi - \beta)}{\sqrt{(r^2 - 2r\varrho'\cos m(\psi - \beta) + \varrho^2)}},$$

und mit Hülfe der übrigen aus der dritten: $s = \frac{r\sin m(\psi - \beta)}{\cos m\beta + b}$, woraus als Gleichung für die Curve des kürzesten Perimeters hervorgeht:

$$r^2 - 2r\varrho\cos m(\psi - \beta) + \varrho^2 = s^2, \quad \text{wie oben.}$$

Berlin im December 1829.

23.

Über Interpolation.

(Von Herrn *Th. Clausen* zu München.)

1. Eine beliebige Function y einer veränderlichen Gröfse x sei für die Werthe von x: 0, $+1$, $+2$, etc., -1, -2, -3, etc. gegeben, man soll daraus den Werth für jedes beliebige x finden.

Es seien die Werthe der Function nebst ihren Differenzen, wie aus dem folgenden Schema zu ersehen ist, bezeichnet:

x	y	$\Delta.y$	$\Delta^2.y$	$\Delta^3.y$	$\Delta^4.y$	$\Delta^5.y$	$\Delta^6.y$	
.	.	.	.	.	.	.	.	
-2	y_{-2}	$a_{-\frac{3}{2}}$	.	.	.	.	.	
-1	y_{-1}	$a_{-\frac{1}{2}}$	b_{-1}	$c_{-\frac{1}{2}}$	.	$e_{-\frac{1}{2}}$	.	
0	y_0	$a_{+\frac{1}{2}}$	b_0	$c_{+\frac{1}{2}}$	d_0	$e_{+\frac{1}{2}}$	e_0	etc.
$+1$	y_{+1}	$a_{+\frac{3}{2}}$	b_{+1}	.	.	.	.	
$+2$	y_{+2}	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	.	

und überdies:

$$a_{-\frac{1}{2}} + a_{+\frac{1}{2}} = 2a_0,$$
$$c_{-\frac{1}{2}} + c_{+\frac{1}{2}} = 2c_0,$$
$$e_{-\frac{1}{2}} + e_{+\frac{1}{2}} = 2e_0,$$
etc.

Der Werth von y_x sei nun:

1. $y_x = y_0 + A_{x,1}a_0 + A_{x,2}b_0 + A_{x,3}c_0 + A_{x,4}d_0 + A_{x,5}e_0 + \ldots.$

wo $A_{x,1}$, $A_{x,2}$ etc. blofs Functionen von x sind. Es läfst sich zeigen, dafs der Werth von y_x in Beziehung auf y_0, a_0, b_0 etc. blofs linearisch sein könne. Man nehme den allgemeinsten Ausdruck einer Function von y_0, a_0, b_0 etc. und $v_x = \Sigma.M_{x,\mu,\nu,\ldots.}y_0^m.a_0^n.b_0^p\ldots.$, wo m, n, p, ... alle Werthe von 0 bis ∞ haben können, und $M_{x,\mu,\nu,\ldots.}$ blofs von x und den Exponenten m, n, p, ... abhängt, Σ aber das Zeichen für die Summe aller möglichen Glieder von dieser Form andeutet. Es seien nun, wenn $y = v$ ist, die resp. Werthe von y_0, a_0, b_0, c_0, ...: v_0, ${}_0\alpha$, β_0, γ_0, ...; wenn $y = v'$ ist: v'_0, α'_0, β'_0, ...; folglich, wenn $y = v + v'$ ist: $v_0 + v'_0$, $\alpha_0 + \alpha'_0$, $\beta_0 + \beta'_0$, etc. Demnach wird

$$v_x = \Sigma . M_{x,\mu,\nu,\ldots} v_0^m . \alpha_0^n . \beta_0^p \ldots ; \quad v'_x = \Sigma . M_{x,\mu,\nu,\ldots} v_0'^m . \alpha_0'^n . \beta_0'^p \ldots ;$$

und

$$(v+v')_x = v_x + v'_x = \Sigma . M_{x,\mu,\nu,\ldots} (v_0 + v'_0)^m . (\alpha_0 + \alpha'_0)^n . (\beta_0 + \beta'_0)^r \ldots .$$

Wäre nun in dem Ausdruck ein Glied, das aus zweien oder mehreren, gleichen oder ungleichen Factoren der Gröfsen y_0, a_0, b_0 etc. bestände, so gäbe die Entwickelung desselben in dem letzten Ausdrucke durch Multiplication ein oder mehrere einzelne Producte, deren Factoren aus beiden Reihen Gröfsen v_0, α_0, β_0, ... und v'_0, α'_0, β'_0, ... zugleich genommen sind; da aber diese in der Summe der Ausdrücke für v_x und v'_x nicht vorkommen, die Factoren aber jeden beliebigen Werth haben können, so mufs der Coëfficient aller dieser Glieder $= 0$ sein; wodurch also die Allgemeinheit der Gleichung (1.) erwiesen ist.

Überhaupt läfst sich jede Function von x durch ein Aggregat von Gliedern von der Form $A \sin(z + \alpha x)$ darstellen, wo A, z, und α von x unabhängig sind; die Differenzen der verschiedenen Ordnungen sind alsdann dem Aggregate der Differenzen der einzelnen Theile von derselben Ordnung gleich. Die Coëfficienten $A_{x,1}$, $A_{x,2}$ etc. für den einzelnen Werth $y = A . \sin(z + \alpha x)$ gelten also, wie leicht zu übersehen ist, allgemein für jede Function von x. Man kann noch von dem Factor A abstrahiren, indem derselbe blofs als Coëfficient in allen Gliedern der Gleichung (1.) vorkömmt.

Setzt man daher statt y_x, $\sin(z + \alpha x)$, so wird das obige Schema:

x	y	$\Delta . y$	$\Delta^2 . y$	$\Delta^3 . y$	$\Delta^4 . y$
-2	$\sin(z-2\alpha)$,				
		$+\cos(z-\frac{3}{2}\alpha)(2\sin\frac{1}{2}\alpha)$,			
-1	$\sin(z-\alpha)$,		$-\sin(z-\alpha)(2\sin\frac{1}{2}\alpha)^2$,		
		$+\cos(z-\frac{1}{2}\alpha)(2\sin\frac{1}{2}\alpha)$,		$-\cos(z-\frac{1}{2}\alpha)(2\sin\frac{1}{2}\alpha)^3$,	
0	$\sin z$,		$-\sin z \quad (2\sin\frac{1}{2}\alpha)^2$,		$+\sin z(2\sin\frac{1}{2}\alpha)^4$
		$+\cos(z+\frac{1}{2}\alpha)(2\sin\frac{1}{2}\alpha)$,		$-\cos(z+\frac{1}{2}\alpha)(2\sin\frac{1}{2}\alpha)^3$,	
$+1$	$\sin(z+\alpha)$,		$-\sin(z+\alpha)(2\sin\frac{1}{2}\alpha)^2$,		
		$+\cos(z+\frac{3}{2}\alpha)(2\sin\frac{1}{2}\alpha)$,			
$+2$	$\sin(z+2\alpha)$,				

folglich wird:

$$y_0 = \sin z ; \qquad d_0 = \sin z (2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^4 ;$$
$$a_0 = \cos z (2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)\cos\tfrac{1}{2}\alpha ; \qquad e_0 = \cos z (2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^5 \cos\tfrac{1}{2}\alpha ;$$
$$b_0 = -\sin z (2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^2 ; \qquad f_0 = -\sin z (2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^6 ;$$
$$c_0 = -\cos z (2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^2 \cos\tfrac{1}{2}\alpha ; \quad \text{etc.}$$

Substituirt man diese Werthe in die Formel (1.), so findet man:

$$\sin(z+\alpha x) = \sin z\cos\alpha x + \cos z\sin\alpha x$$
$$= \sin z\,[1 - A_{x,2}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^2 + A_{x,4}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^4 - A_{x,6}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^6 + \ldots.]$$
$$+ \cos z\cos\tfrac{1}{2}\alpha\,[A_{x,1}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha) - A_{x,3}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^3 + A_{x,5}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^5 - \ldots.],$$

oder

2. $$\cos\alpha x = 1 - A_{x,2}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^2 + A_{x,4}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^4 - A_{x,6}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^6 + \ldots.$$
3. $$\sin\alpha x = \cos\tfrac{1}{2}\alpha\,[A_{x,1}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha) - A_{x,3}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^3 + A_{x,5}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^5 - \ldots.$$

Die Differentiation der Gleichung (2.) giebt:

4. $$-x\sin\alpha x$$
$$= \cos\tfrac{1}{2}\alpha\,[-2A_{x,2}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha) + 4A_{x,4}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^3 - 6A_{x,6}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^5 + \ldots.],$$

durch deren Vergleichung mit der Gleichung (3.) man

5. $$A_{x,1} = \frac{2}{x}.A_{x,2},\quad A_{x,3} = \frac{4}{x}.A_{x,4},\quad A_{x,5} = \frac{6}{x}.A_{x,6},\quad \text{etc.}$$

erhält. Eine nochmalige Differentiirung giebt nach Substitution von $\cos\tfrac{1}{2}\alpha^2 = 1 - \tfrac{1}{4}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^2$:

$$-x^2\cos\alpha x = -1.2A_{x,2} + (3.4A_{x,4} + 1.A_{x,2})(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^2$$
$$-(5.6A_{x,6} + 2.2A_{x,4})(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^4 + (7.8A_{x,8} + 3^2A_{x,6})(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^6 - \ldots.$$

Wir haben aber auch durch die Gleichung (2.):

$$-x^2\cos\alpha x = -x^2 + x^2A_{x,2}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^2 - x^2A_{x,4}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^4 + x^2A_{x,6}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^6 - \ldots,$$

mithin durch Vergleichung dieser beiden Reihen:

$$1.2A_{x,2} = x^2,$$
$$3.4A_{x,4} = (x^2-1)A_{x,2},$$
$$5.6A_{x,6} = (x^2-2^2)A_{x,4},$$
$$7.8A_{x,8} = (x^2-3^2)A_{x,6},$$
$$\text{etc.}$$

oder:

6. $$\begin{cases} A_{x,2} = \dfrac{x^2}{1.2}, \\ A_{x,4} = \dfrac{x^2.x^2-1}{1.2.3.4}, \\ A_{x,6} = \dfrac{x^2.x^2-1.x^2-2^2}{1.2.3.4.5.6}, \\ A_{x,8} = \dfrac{x^2.x^2-1.x^2-2^2.x^2-3^2}{1.2.3.4.5.6.7.8}, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

und durch Hülfe der Gleichungen (5.):

7. $$A_{x,1} = \frac{x}{1},\quad A_{x,3} = \frac{x.x^2-1}{1.2.3},\quad A_{x,5} = \frac{x.x^2-1.x^4-4}{1.2.3.4.5}.$$

Nach Substitution dieser Werthe der Coëfficienten wird die Formel (1.):

$$\text{I.}\quad y_x = y_0 + \frac{x}{1}a_0 + \frac{x^2}{1.2}b_0 + \frac{x.x^2-1}{1.2.3}c_0 + \frac{x^2.x^2-1}{1.2.3.4}d_0 + \frac{x.x^2-1\ x^2-2^2}{1.2.3.4.5}e$$
$$+ \frac{x^2.x^2-1.x^2-2^2}{1.2.3.4.5.6}f_0 + \frac{x.x^2-1.x^2-2^2.x^2-3^2}{1.2.3.4.5.6.7}g_0 + \ldots.$$

2. Es sei die Function y für die Werthe von x: $+\frac{1}{2}$, $+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}$, etc. $-\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}$ gegeben, und mit den Differenzen wie in folgendem Schema bezeichnet:

$$\begin{array}{ccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
y_{-\frac{3}{2}} & a'_{-1} & \cdot & c'_{-1} & \cdot \\
y_{-\frac{1}{2}} & a'_0 & b'_{-\frac{1}{2}} & c'_0 & d'_{-\frac{1}{2}} \quad \text{etc.} \\
y_{+\frac{1}{2}} & a'_{+1} & b'_{+\frac{1}{2}} & c'_{+1} & d'_{+\frac{1}{2}} \\
y_{+\frac{3}{2}} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & & \cdot & & \cdot
\end{array}$$

und

$$\begin{aligned}
y_{-\frac{1}{2}} + y_{+\frac{1}{2}} &= 2y'_0, \\
b'_{-\frac{1}{2}} + b'_{+\frac{1}{2}} &= 2b'_0, \\
d'_{-\frac{1}{2}} + d'_{+\frac{1}{2}} &= 2d'_0, \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Setzt man wieder statt y_x, $\sin(z+\alpha x)$, so verwandeln sich diese Gröſsen in:

$$\begin{array}{llll}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\sin(z-\frac{3}{2}\alpha), & +\cos(z-\alpha)(2\sin\frac{1}{2}\alpha), & \cdot & \cdot \\
\sin(z-\frac{1}{2}\alpha), & +\quad\cos z\,(2\sin\frac{1}{2}\alpha), & -\sin(z-\frac{1}{2}\alpha)(2\sin\frac{1}{2}\alpha)^2, & -\cos z\,(2\sin\frac{1}{2}\alpha)^3, \text{ etc.} \\
\sin(z+\frac{1}{2}\alpha), & +\cos(z+\alpha)(2\sin\frac{1}{2}\alpha), & -\sin(z+\frac{1}{2}\alpha)(2\sin\frac{1}{2}\alpha)^2, & \cdot \\
\sin(z+\frac{3}{2}\alpha), & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & & \cdot &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
y'_0 &= \sin z \quad \cos\tfrac{1}{2}\alpha; & d'_0 &= \sin z\,(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^4\cos\tfrac{1}{2}\alpha; \\
a'_0 &= \cos z\,(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha); & c'_0 &= \cos z\,(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^5; \\
b'_0 &= -\sin z\,(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^2\cos\tfrac{1}{2}\alpha; & &\text{etc.} \\
c'_0 &= -\cos z\,(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^3; & &
\end{aligned}$$

Ist nun allgemein:

$$8.\quad y_x = y'_0 + B_{x,1}a'_0 + B_{x,2}b'_0 + B_{x,3}c'_0 + B_{x,4}d'_0 + B_{x,5}e'_0 + \ldots.$$

so hat man auch:

$$\begin{aligned}
\sin(z+\alpha x) &= \sin z\cos\alpha x + \cos z\sin\alpha x \\
&= \sin z\cos\tfrac{1}{2}\alpha\,(1 - B_{x,2}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^2 + B_{x,4}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^4 - B_{x,6}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^6 + \ldots) \\
&\quad + \cos z\,(B_{x,1}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha) - B_{x,3}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^3 + B_{x,5}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^5 - \ldots.),
\end{aligned}$$

folglich:

9. $\cos\alpha x = \cos\frac{1}{2}\alpha(1 - B_{x,2}(2\sin\frac{1}{2}\alpha)^2 + B_{x,4}(2\sin\frac{1}{2}\alpha)^4 - B_{x,6}(2\sin\frac{1}{2}\alpha)^6 + \ldots.)$,

10. $\sin\alpha x = B_{x,1}(2\sin\frac{1}{2}\alpha) - B_{x,3}(2\sin\frac{1}{2}\alpha)^3 + B_{x,5}(2\sin\frac{1}{2}\alpha)^5 - \ldots.$

Diese Gleichung differentiirt giebt:

$$x\cos\alpha x = \cos\tfrac{1}{2}\alpha(B_{x,1} - 3B_{x,3}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^2 + 5B_{x,5}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^4 - \ldots.),$$

durch deren Vergleichung mit der Gleichung (9.) sich ergiebt:

11. $$1 = \frac{1}{x}.B_{x,1}, \quad B_{x,2} = \frac{3}{x}.B_{x,3}, \quad B_{x,4} = \frac{5}{x}.B_{x,5}, \quad B_{x,6} = \frac{7}{x}.B_{x,7} \text{ etc.}$$

Differentiirt man nochmals, so erhält man, nach Substitution, $\cos\frac{1}{2}\alpha^2 = 1 - \frac{1}{4}(2\sin\frac{1}{2}\alpha)^2$:

$$-x^2\sin\alpha x = -(2.3B_{x,3} + (\tfrac{1}{2})^2 B_{x,1})(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha) + (4.5B_{x,5} + (\tfrac{3}{2})^2 B_{x,3})(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^3 - (6.7B_{x,7} + (\tfrac{5}{2})^2 B_{x,5})(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^5 + \ldots.$$

Nach der Gleichung (10.) ist aber:

$$-x^2\sin\alpha x = -x^2 B_{x,1}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha) + x^2 B_{x,3}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^3 - x^2 B_{x,5}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^5 + \ldots.$$

folglich:

$$\begin{aligned} 2.3B_{x,3} &= (x^2 - (\tfrac{1}{2})^2).B_{x,1}, \\ 4.5B_{x,5} &= (x^2 - (\tfrac{3}{2})^2).B_{x,3}, \\ 6.7B_{x,7} &= (x^2 - (\tfrac{5}{2})^2).B_{x,5}, \\ &\text{etc.,} \end{aligned}$$

oder, da $B_{x,1} = x$:

12. $$\begin{cases} B_{x,3} = \dfrac{x.x^2 - \frac{1}{2^2}}{1.2.3}, \\ B_{x,5} = \dfrac{x.x^2 - \frac{1}{2^2}.x^2 - \frac{3^2}{2^2}}{1.2.3.4.5}, \\ B_{x,7} = \dfrac{x.x^2 - \frac{1}{2^2}.x^2 - \frac{3^2}{2^2}.x^2 - \frac{5^2}{2^2}}{1.2.3.4.5.6.7}, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

und durch die Gleichungen (11.):

13. $$\begin{cases} B_{x,2} = \dfrac{x^2 - \frac{1}{2^2}}{1.2}, \\ B_{x,4} = \dfrac{x^2 - \frac{1}{2^2}.x^2 - \frac{3^2}{2^2}}{1.2.3.4}, \\ B_{x,6} = \dfrac{x^2 - \frac{1}{2^2}.x^2 - \frac{3^2}{2^2}.x^2 - \frac{5^2}{2^2}}{1.2.3.4.5.6}, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

folglich wird die Formel (8.):

$$\text{II.}\quad y_x = y'_0 + x.a'_0 + \frac{x^2-\frac{1}{2^2}}{1.2}b'_0 + \frac{x.x^2-\frac{1}{2^2}}{1.2.3}c'_0 + \frac{x^2-\frac{1}{2^2}.x^2-\frac{3^2}{2^2}}{1.2.3.4}d'_0$$
$$+\frac{x.x^2-\frac{1}{2^2}.x^2-\frac{3^2}{2^2}.x^2-\frac{5^2}{2^2}}{1.2.3.4.5}e'_0 + \frac{x^2.x^2-\frac{1}{2^2}.x^2-\frac{3^2}{2^2}.x^2-\frac{5^2}{2^2}}{1.2.3.4.5.6}f'_0 + \ldots.$$

3. Aus den Ausdrücken I. und II. folgt zwar unmittelbar durch Differentiirung der Ausdruck für $\frac{\partial y_x}{\partial x}$ in beiden Fällen; er läfst sich aber auch auf eine andere Art darstellen, die nicht uninteressant sein dürfte. Es sei nemlich nach der Bezeichnung in 1.:

$$14.\quad \frac{\partial y_x}{\partial x} = C_{x,0}a_0 + C_{x,1}b_0 + C_{x,2}c_0 + C_{x,3}d_0 + C_{x,4}e_0 + \ldots.$$

und setzt man, wie vorher, statt y_x, $\sin(z+\alpha x)$; statt a_0, b_0 u. s. w. die entsprechenden Werthe; und zur Abkürzung $2\sin\frac{1}{2}\alpha = t$; so findet man:

$$\begin{aligned}\alpha\cos(z+\alpha x) &= \alpha\cos z\cos\alpha x - \alpha\sin z\sin\alpha x\\ &= \cos z\cos\tfrac{1}{2}\alpha[C_{x,0}t - C_{x,2}t^3 + C_{x,4}t^5 - C_{x,6}t^7 + \ldots.]\\ &\quad - \sin z[C_{x,1}t^2 - C_{x,3}t^4 + C_{x,5}t^6 - C_{x,7}t^8 + \ldots.].\end{aligned}$$

Es ist aber $\alpha = 2\arcsin\frac{1}{2}t$, und mittelst der Gleichungen (9.) und (10.)

$$\begin{aligned}&\alpha\cos z\cos\alpha x - \alpha\sin z\sin\alpha x\\ &= \cos z\cos\tfrac{1}{2}\alpha(2\arcsin\tfrac{1}{2}t)[1 - B_{x,2}t^2 + B_{x,4}t^4 - B_{x,6}t^6 + \ldots.]\\ &\quad - \sin z(2\arcsin\tfrac{1}{2}t)[B_{x,1}t - B_{x,3}t^3 + B_{x,5}t^5 - \ldots.].\end{aligned}$$

Man hat also, wenn man die Ausdrücke für $B_{x,1}$, $B_{x,2}$ u. s. w. aus (12. und 13.) substituirt, und $2\arcsin\frac{1}{2}t$ in eine Reihe entwickelt:

$$15.\quad C_{x,0}t - C_{x,2}t^3 + C_{x,4}t^5 - C_{x,6}t^7 + \ldots.$$
$$= \left[t + \frac{1}{8}.\frac{1}{3}t^3 + \frac{1.3}{8.16}.\frac{1}{5}t^5 + \frac{1.3.5}{8.16.24}.\frac{1}{7}t^7 + \ldots.\right]$$
$$\times\left(1 - \frac{x^2-\frac{1}{2^2}}{1.2}t^2 + \frac{x^2-\frac{1}{2^2}.x^2-\frac{3^2}{2^2}}{1.2.3.4}t^4 + \ldots.\right),$$

$$16.\quad C_{x,1}t^2 - C_{x,3}t^4 + C_{x,5}t^6 - \ldots.$$
$$= \left[t + \frac{1}{8}.\frac{1}{3}t^3 + \frac{1.3}{8.16}.\frac{1}{5}t^5 + \ldots.\right]\left(xt - \frac{x.x^2-\frac{1}{2^2}}{1.2.3}t^3 + \frac{x.x^2-\frac{1}{2^2}.x^2-\frac{3^2}{2^2}}{1.2.3.4.5}t^5 - \ldots.\right).$$

4. Sei nach der Bezeichnung von 2.

$$17.\quad \frac{\partial y_x}{\partial x} = D_{x,0}a'_0 + D_{x,1}b'_0 + D_{x,2}c'_0 + D_{x,3}d'_0 + D_{x,4}e'_0 + \ldots.$$

und setzt man hinwiederum statt y_x, $\sin(z+\alpha x)$, und statt a'_0, b'_0 .... die entsprechenden Werthe, so hat man:

$$\alpha\cos z\cos\alpha x - \alpha\sin z\sin\alpha x$$
$$= \cos z[D_{x,0}\,t - D_{x,2}\,t^3 + D_{x,4}\,t^5 - D_{x,6}\,t^7 + \ldots.]$$
$$- \sin z\cos\tfrac{1}{2}\alpha[D_{x,1}\,t^2 - D_{x,3}\,t^4 + D_{x,5}\,t^6 - \ldots.].$$

Durch Hülfe der Gleichungen (2. und 3.) haben wir aber auch:

$$\alpha\cos z\cos\alpha x - \alpha\sin z\sin\alpha x$$
$$= \cos z(2\arcsin\tfrac{1}{2}t)[1 - A_{x,2}\,t^2 + A_{x,4}\,t^4 - A_{x,6}\,t^6 + \ldots.]$$
$$- \sin z\cos\tfrac{1}{2}\alpha(2\arcsin\tfrac{1}{2}t)[A_{x,1}\,t - A_{x,3}\,t^3 + A_{x,5}\,t^5 - \ldots.],$$

folglich, wenn man statt $A_{x,1}$, $A_{x,2}$ etc., deren Werthe aus (6. und 7.) substituirt:

18. $$D_{x,0}\,t - D_{x,2}\,t^3 + D_{x,4}\,t^5 - D_{x,6}\,t^7 + \ldots.$$
$$= \left(t + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3}t^3 + \frac{1.3}{8.16}\cdot\frac{1}{5}t^5 + \frac{1.3.5}{8.16.24}\cdot\frac{1}{7}t^7 + \ldots.\right)\left[1 - \frac{x^2}{1.2}t^2 + \frac{x^2.x^2-1}{1.2.3.4}t^4 - \ldots.\right],$$

19. $$D_{x,1}\,t^2 - D_{x,3}\,t^4 + D_{x,5}\,t^6 - \ldots.$$
$$= \left(t + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3}t^3 + \frac{1.3}{8.16}\cdot\frac{1}{5}t^5 + \frac{1.3.5}{8.16.24}\cdot\frac{1}{7}t^7 + \ldots.\right)$$
$$\times\left[x.t - \frac{x.x^2-1}{1.2.3}t^3 + \frac{x.x^2-1.x^2-2^2}{1.2.3.4.5}t^5 - \ldots.\right].$$

Auf gleiche Art findet man für den zweiten und höhern Differentialquotienten ähnliche Ausdrücke, deren Entwickelung ich der Kürze wegen übergehe. Ich bemerke nur, dafs die Coëfficienten des ersten Factors in dem Ausdruck für den zweiten Differentialquotienten $(2\arcsin\frac{1}{2}t)^2$ einem sehr einfachen Gesetze folgen, welches aber bei dem dritten und den höhern nicht Statt findet.

5. Eine vielfache Anwendung findet der Ausdruck des Integrals $\int y_x\,\partial x$. Man sieht leicht, dafs es in der Bezeichnung von (1.), wenn es von $x=0$ bis $x=x$ genommen wird, die Form haben mufs:

20. $$\int y_x\,\partial x = x.y_0 + E_{x,1}\,a_0 + E_{x,2}\,b_0 + E_{x,3}\,c_0 + E_{x,4}\,d_0 + E_{x,5}\,e_0 + \ldots.,$$

und nach der Substitution des Werthes $\sin(z+\alpha x)$ statt y_x:

$$-\frac{1}{\alpha}\cos(z+\alpha x) + \frac{1}{\alpha}\cos z = -\frac{1}{\alpha}\cos z(\cos\alpha x - 1) + \frac{1}{\alpha}\sin z\sin\alpha x$$
$$= \sin z(x - E_{x,2}\,t^2 + E_{x,4}\,t^4 - E_{x,6}\,t^6 + \ldots.$$
$$+ \cos z\cos\tfrac{1}{2}\alpha(E_{x,1}\,t - E_{x,3}\,t^3 + E_{x,5}\,t^5 - \ldots.)$$

und mittelst (9., 10., 12. und 13.):

$$= \frac{\sin z}{2\arcsin\frac{1}{2}t}\left(\frac{x}{1}t - \frac{x.x^2-\frac{1}{2^2}}{1.2.3}t^3 + \frac{x.x^2-\frac{1}{2^2}.x^2-\frac{3^2}{2^2}}{1.2.3.4.5}t^5 - \ldots.\right)$$
$$+ \frac{\cos z\cos\frac{1}{2}\alpha}{2\arcsin\frac{1}{2}t}\left(\frac{x^2-\frac{1}{2^2}}{1.2}t^2 - \frac{x^2-\frac{1}{2^2}.x^2-\frac{3^2}{2^2}}{1.2.3.4}t^4 + \ldots.\right),$$

mithin:

$$21.\quad x - E_{x,2}\,t^2 + E_{x,4}\,t^4 - E_{x,6}\,t^6 + \ldots.$$
$$= \frac{x.t - \frac{x.x^2 - \frac{1}{2^2}}{1.2.3}t^3 + \frac{x.x^2 - \frac{1}{2^2}.x^2 - \frac{3^2}{2^2}}{1.2.3.4.5}t^5 - \ldots.}{t + \frac{1}{8}.\frac{1}{3}t^3 + \frac{1.3}{8.16}.\frac{1}{5}t^5 + \ldots.},$$

$$22.\quad E_{x,1}\,t - E_{x,3}\,t^3 + E_{x,5}\,t^5 - \ldots.$$
$$= \frac{\frac{x^2 - \frac{1}{2^2}}{1.2}.t^2 - \frac{x^2 - \frac{1}{2^2}.x^2 - \frac{3^2}{2^2}}{1.2.3.4}t^4 + \ldots.}{t + \frac{1}{8}.\frac{1}{3}t^3 + \frac{1.3}{8.16}.\frac{1}{5}t^5 + \ldots.}.$$

Sucht man das Integral von $x = -\frac{1}{2}$ bis $x = +\frac{1}{2}$, so verschwinden die mit $E_{x,1}$, $E_{x,3}$ etc. multiplicirten Glieder, da sie blofs gerade Potenzen enthalten. Nennt man in diesem einzelnen Falle die Coëfficienten der übrigen 1, E_2, E_4 ...., so ist:

$$23.\quad 1 - E_2 t^2 + E_4 t^4 - \ldots. = \frac{1}{1 + \frac{1}{8}.\frac{1}{3}t^2 + \frac{1.3}{8.16}.\frac{1}{5}t^4 + \ldots.}.$$

Eben so wenn die Coëfficienten des Integrals, von $x = -\frac{3}{2}$ bis $x = +\frac{3}{2}$ genommen, 3, E'_2, E'_4 etc. sind:

$$24.\quad 3 - E_2 t^2 + E_4 t^4 - \ldots. = \frac{3 - t^2}{1 + \frac{1}{8}.\frac{1}{3}t^2 + \frac{1.3}{8.16}.\frac{1}{5}t^4 + \ldots.}$$

u. s. f.

6. Nach der Bezeichnung von (2.) sei

$$25.\quad \int y_x\,\partial x = x y'_0 + F_{x,1}\,a'_0 + F_{x,2}\,b'_0 + F_{x,3}\,c'_0 + \ldots.,$$

so ist nach Substitution von $y_x = \sin(z + \alpha x)$:

$$-\frac{1}{\alpha}\cos(z + \alpha x) = -\frac{1}{\alpha}\cos z(\cos\alpha x - 1) + \frac{1}{\alpha}\sin z \sin\alpha x$$
$$= \sin z \cos\tfrac{1}{2}\alpha\,(x - F_{x,2}\,t^2 + F_{x,4}\,t^4 - F_{x,6}\,t^6 + \ldots.)$$
$$+ \cos z\,(F_{x,1}\,t - F_{x,3}\,t^3 + F_{x,5}\,t^5 - F_{x,7}\,t^7 + \ldots.),$$

oder mittelst (2., 3., 6. und 7.):

$$= \frac{\sin z \cos\frac{1}{2}\alpha}{2\arcsin\frac{1}{2}t}\left(x\,t - \frac{x.x^2 - 1}{1.2.3}t^3 + \frac{x.x^2 - 1.x^2 - 2^2}{1.2.3.4.5}t^5 - \ldots.\right)$$
$$+ \frac{\cos z}{2\arcsin\frac{1}{2}t}\left(\frac{x^2}{1.2}t^2 - \frac{x^2.x^2 - 1}{1.2.3.4}t^4 + \frac{x^2.x^2 - 1.x^2 - 2^2}{1.2.3.4.5.6}t^6 - \ldots.\right),$$

folglich:

26. $$x - F_{x,2}t^2 + F_{x,4}t^4 - F_{x,6}t^6 + \ldots. = \frac{x - \frac{x.x^2-1}{1.2.3}t^2 + \frac{x.x^2-1.x^2-2^2}{1.2.3.4.5}t^4 - \ldots.}{1 + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3}t^2 + \frac{1.3}{8.16}\cdot\frac{1}{5}t^4 + \ldots.},$$

27. $$F_{x,1}t - F_{x,3}t^3 + F_{x,5}t^5 - \ldots. = \frac{\frac{x^2}{1.2}t - \frac{x^2.x^2-1}{1.2.3.4}t^3 + \ldots.}{1 + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3}t^2 + \frac{1.3}{8.16}\cdot\frac{1}{5}t^4 + \ldots.},$$

Nimmt man das Integral von $x = -1$ bis $x = +1$, so wird $F_{x,1} = F_{x,3} = \text{etc.} = 0$, und wenn man die übrigen Coëfficienten F_2, F_4, etc. setzt:

28. $$2 - F_{x,2}t^2 + F_{x,4}t^4 - F_{x,6}t^6 + \ldots. = \frac{2}{1 + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3}t^2 + \frac{1.3}{8.16}\cdot\frac{1}{5}t^4 + \ldots.}.$$

In Beziehung auf eine zweite oder höhere Integration gilt auch die in (4.) in Bezug auf die Ausdrücke für die Differentiale von y_x gemachte Bemerkung.

München, den 22. Juli 1829.

24.

Über Centrifugal-Pendel-Uhren.

(Von Herrn *Th. Clausen* zu München.)

Die Bewegung der Centrifugal-Pendel ist bekanntlich deswegen nicht gleichförmig, weil der Widerstand der Luft, die Reibung und die bewegende Kraft, wodurch der Gang der Uhr regulirt wird, zu veränderlich sind. Indessen ist die Veränderlichkeit sehr verschieden, je nachdem die Uhr construirt ist; welche Idee mich veranlafst hat, über die Einrichtung, wobei die möglich kleinste Veränderung des Ganges Statt findet, nachzudenken. Ich bin dadurch auf folgendes Resultat gekommen:

Es sei (Taf. III. Fig. 3.) AB eine verticale Axe, $CD = a$, ein horizontaler Arm, E ein Gewicht, und $DE = l$. Dreht man die Axe, so entfernt sich das Gewicht von der Verticallinie DF. Ich nehme an, dafs der Winkel θ sich im ganzen Umkreise gleich bleibt, welches durch den Widerstand der Luft in kurzer Zeit bewirkt wird, so dafs die bewegende Kraft (Feder oder Loth) der Reibung und dem Widerstande der Luft gleich ist. Vermindert sich nun dieser, wie z. B. bei gröfserer Wärme und tieferem Barometerstande, und die Reibung, wie bei Erwärmung des Oels, so ändert sich die Umdrehungsgeschwindigkeit und der davon abhängende Winkel θ. Hieraus ersieht man, dafs derjenige Werth von θ, für welchen $\frac{\partial v}{\partial \theta} = 0$ ist, der für den gleichförmigen Gang passendste ist, weil der Einflufs, den die zur Wiederherstellung der Gleichheit zwischen dem Widerstande der Luft, der Reibung und der bewegenden Kraft erfolgende Aenderung von θ in dem Gange hervorbringt, nur von zweiter Ordnung ist.

Sei v die Winkelgeschwindigkeit der Axe AB, so ist die Centrifugalkraft in horizontaler Richtung $(a + l\sin\theta)v^2$; und nach der Richtung DE und einer in der Vertical-Ebene darauf senkrechten zerlegt: nach dieser letztern $(a + l\sin\theta)\cos\theta . v^2$. Die Kraft der Schwere, nach derselben Richtung zerlegt, ist $g\sin\theta$; es ist daher, wenn der Winkel θ während der ganzen Umdrehung beständig ist:

$$(a + l\sin\theta)\cos\theta . v^2 = g\sin\theta,$$

oder

$$1. \quad a + l \sin\theta = \frac{g}{v^2} \operatorname{tang}\theta,$$

und wenn man differentiirt und v constant setzt:

$$l \cos\theta = \frac{g}{v^2 \cos\theta^2},$$

oder

$$2. \quad l \cos\theta^3 = \frac{g}{v^2}.$$

Die Verbindung der beiden Gleichungen giebt:

$$a + l \sin\theta = l \sin\theta \cos\theta^3,$$

oder

$$a + l \sin\theta^3 = 0,$$

folglich

$$3. \quad \sin\theta = -\sqrt[3]{\frac{a}{l}},$$

woraus man sieht, dafs der Winkel θ negativ ist, oder dafs das Gewicht E und der Arm CD auf verschiedenen Seiten der Axe liegen.

Als Beispiel nehme ich an: $a = 0{,}1\,g$; $l = 0{,}2\,g$, wo g bekanntlich die in einer Secunde durch den freien Fall erlangte Geschwindigkeit ausdrückt: so hat man $\theta = -52^\circ 32'$ und die Zeit eines Umlaufs $1'',333$. Durch Veränderung des Winkels um $2^\circ{,}5$, wodurch der Widerstand der Luft, wenn er dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional gesetzt wird, um den sechsten Theil gröfser oder kleiner wird, verändert sich der tägliche Gang blofs um etwa 5 Minuten.

München, den 21. Juli 1829.

25.

Beweis eines Lehrsatzes vom Fünfecke.

In Folge der Aufstellung desselben S. 396., 4. Band 4. Heft dieses Journals.

(Von Herrn *G*.....)

Der zu beweisende Satz heifst: „Wenn alle Seiten eines beliebigen Fünfecks *ABCDE* (Taf. III. Fig. 4.) verlängert werden, bis sie sich in *A'*, *B'*, *C'*, *D'*, *E'* treffen, so schneiden die fünf geraden Linien, welche die Mittelpuncte der Diagonalen eines jeden der Vierecke *ABEA'*, *BACB'*, *CBDC'*, *DCED'*, *EADE'* mit einander verbinden, sich immer alle in ein- und demselben Puncte."

Es kann dieser Satz auf den folgenden einfacheren zurückgebracht werden. Wenn vom Durchschnittspuncte *O* der Diagonalen des Vierecks *ABCD* (Fig. 5.) nach einer Seite *AB* desselben hin die Geraden *OE* und *OF* gezogen und die Durchschnittspuncte *M* und *N* der Diagonalen der beiden Vierecke *ACOE* und *BDOF* durch *MN* verbunden werden, wenn man weiter die Linien *CA* und *OE* durch *PQ*, die Seiten *CD* und *MN* durch *LG*, und die Linien *OF* und *DB* durch *RS* halbirt, so schneiden sich diese drei Halbirungslinien immer in einem Puncte *U*.

Wir setzen zur Abkürzung $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $OD = d$, $OM = m$, $ON = n$ und nehmen *OB* und *OA* zu Coordinaten-Axen.

Die Coordinaten des Punctes *P* sind dann: $-\frac{c}{2}$ und $+\frac{a}{2}$,

des Punctes *L* - - $-\frac{c}{2}$ und $-\frac{d}{2}$,

des Punctes *S* - - $+\frac{b}{2}$ und $-\frac{d}{2}$,

des Punctes *G* - - $+\frac{n}{2}$ und $+\frac{m}{2}$.

Die Coordinaten des Punctes *E* finden sich aus den Gleichungen $\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$ und $\frac{y}{m} - \frac{x}{c} = 1$ der Linien *AB* und *MC*; die Coordinaten

des Punctes Q sind aber halb so grofs, und demnach:

$$\frac{\frac{1}{2}bc(a-m)}{ac+bm} \text{ und } \frac{\frac{1}{2}ma(b+c)}{mb+ac}.$$

Die Coordinaten des Punctes F finden sich aus den Gleichungen $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$ und $\frac{x}{n}-\frac{y}{d}=1$ der Linien AB und DN; die des Punctes R sind halb so grofs, und also

$$\frac{\frac{1}{2}nb(a+d)}{na+bd} \text{ und } \frac{\frac{1}{2}ad(b-n)}{bd+na}.$$

Man kennt also für jede der drei Linien PQ, LG und SR die Coordinaten zweier Puncte, und findet also nach einiger Rechnung die Gleichungen für diese drei Linien selbst, nämlich:

für die erste: $y(b+c)+x(a-m) = \frac{ab+mc}{2}$,

für die zweite: $y(n+c)-x(m+d) = \frac{mc-nd}{2}$,

für die dritte: $y(b-n)+x(a+d) = \frac{nd+ab}{2}$.

Subtrahirt man von der ersten Gleichung die zweite, so erhält man die dritte, und es schneiden sich also die drei Linien PQ, LG und SR in einem Puncte.

Der so eben bewiesene Satz findet aber eine fünffache Anwendung in Fig. 4. Halbirt man nämlich hier die Linien AD und $C'B'$ durch eine Linie ee'; $C'D'$ und EB durch eine Gerade aa'; AC und $D'E'$ durch bb'; DB und $A'E'$ durch cc'; endlich EC und $B'A'$ durch dd', so schneiden sich also diese fünf Linien aa', bb', cc', dd', ee' in einem Puncte; von aa' wird aber auch AA' halbirt, denn die Linie aa' halbirt zugleich die drei Diagonalen eines Vierecks $AEBA'$; eben so wird BB' von bb'; CC' von cc'; DD' von dd' und EE' von ee' halbirt.

26.
Aufgaben und Lehrsätze,
erstere aufzulösen, letztere zu beweisen.

Aufgabe vom Herrn Prof. *Unger* zu Erfurt.

7. Drei in einer Ecke zusammenstofsende Seiten-Kanten einer dreiseitigen Pyramide sind gegeben; man soll die der Ecke gegenüber liegende Seitenfläche so bestimmen, dafs der Inhalt der Pyramide ein Maximum sei *).

Lehrsätze von Herrn Prof. *Gudermann* zu Cleve.

8. Wenn man in der Ebene eines Vierecks *ABCD* (Taf. III. Fig. 6.) eine Gerade so zieht, dafs sie die vier Seiten desselben und die beiden Diagonalen *AC* und *BD* schneidet, so findet unter den Theilen der gezogenen Geraden folgende Proportion Statt:

$$\frac{RP.RS}{QP.QS} = \frac{RW.RV}{QW.QV}$$

9. Wenn die Puncte *V* und *W* in *v* zusammenfallen, so hat man die drei folgenden Proportionen:

$$1.\ \frac{vp.vq}{vr.vs} = \frac{pq}{rs};\quad 2.\ \frac{rp.rs}{qp.qs} = \frac{rv^2}{qv^2};\quad 3.\ \frac{vp.vr}{vq.vs} = \frac{pr}{qs}.$$

Aufgaben von Anderen.

10. Die Wurzeln einer Gleichung vom vierten Grade durch trigonometrische Functionen auszudrücken, wie es bei Gleichungen vom dritten Grade angeht, auf welche sich bekanntlich Gleichungen vom vierten Grade bringen lassen.

11. In einer prismatischen, senkrechten Röhre, in deren obern und untern Böden sich Öffnungen befinden, wird die Luft auf irgend eine Weise erwärmt, so dafs sie sich ausdehnt, leichter wird als die äufsere Luft, und folglich aufsteigt. Es wird die Geschwindigkeit gesucht, mit welcher sie durch die obere und untere Öffnung der Röhre sich bewegen wird, und zwar wenn nicht nach Bewegungs-Gesetzen a priori, so doch nach dem hypothetischen Gesetze, dafs die Geschwindigkeit einer Flüssigkeit derjenigen gleich sei, welche ein Körper erlangen würde, der von der Höhe der drückenden Säule frei herabfiele. Auch kann statt der verschiedenen Temperaturen in der Röhre, eine mittlere Temperatur angenommen werden, jedoch mufs die Elasticität der Luft und der Widerstand bei der Ausströmung, erstere nach dem Mariottischen Gesetze, letzterer nach bekannten hypothetischen Gesetzen in Berechnung kommen.

---

*) Herr Prof. Unger bemerkt bei Gelegenheit der Uebersendung dieser Aufgabe, dafs von der Aufgabe 29. im 4. Bande S. 391., die sich daselbst, und barycentrisch im 5. Band S. 102. gelöset findet, und zwar allgemeiner gestellt, noch eine andere, geometrische Auflösung von Giordano di Ottajano vorhanden sei, die sich in den *Memorie di Matematica e Fisica delle societa italiana*, *tom. IV.* (*Verona* 1788. *pag.* 4.) finde und auch von Klügel in seinem Wörterbuche, Art. Kreis, aufgenommen sei.

27.

De approximata seriei, juxta data functionis derivata dispositae, summatione.

(Auct. Dr. *C. J. D. Hill*, Holm.)

Sit $s = c_0 fx + c_1 \partial fx + c_2 \mathrm{D}^2 fx + c_3 \mathrm{D}^3 fx + \ldots$ series summanda, et fx functio data atque $\mathrm{D}^n fx$ hujus derivatum n^{tum}, i. e. $= \frac{d^n fx}{1.2\ldots n(dx)^n}$; coëfficientes vero c_0, c_1, c_2, ... constantes qualescunque (aliquatenus tamen convergentes).

Patet jam, casum ab celeberrimo Gaufs ingeniosissime pertractatum $\int dy f(x+y)$ seu $yfx + \frac{1}{2}y^2 \partial fx + \frac{1}{3}y^3 \mathrm{D}^2 fx + \ldots$. huc spectare. Innumerarum igitur formarum, quarum ope summatio tentari licet, hanc jam

$$s = n_0 f(x+a_0) + n_1 f(x+a_1) + n_2 f(x+a_{11}) + \ldots.$$

praecipue eligimus, cum casui isti speciali bene conveniat. Evolutione atque comparatione utriusque ipsius s valoris instituta, hae oboriuntur aequationes:

$$a) \quad \begin{cases} c_0 = n_0 + n_1 + n_2 + \ldots + n_{r-1}, \\ c_1 = n_0 a_0 + n_1 a_1 + n_2 a_2 + \ldots + n_{r-1} a_{r-1}, \\ c_2 = n_0 a_0^2 + n_1 a_1^2 + n_2 a_2^2 + \ldots + n_{r-1} a_{r-1}^2, \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ c_{2r-1} = n_0 a_0^{2r-1} + n_1 a_1^{2r-1} + n_2 a_2^{2r-1} + \ldots + n_{r-1} a_{r-1}^{2r-1}. \end{cases}$$

Quarum quidem numerus est $= 2r$, ignotorumque idem $(= 2r)$; scilicet adsunt pluria a numero r, itemque n numero r. Ex istis, si omnia tum n, tum a elicere in potestate fuerit, problema nostrum solutum erit. Hae, cum successive gradus 1, 2, 3, ... $2r$ sint, aequationem finalem gradus satis elevati suppeditare videntur; nihilo tamen minus haec producitur, gradus dimidio minoris, quam altissimus $(2r)$ aequationum $a)$, ex quarum eliminatione oborta est. Forma igitur nostra generalis majoribus haud laborat difficultatibus, quam casus illius nuper memoratus.

Hoc ipsum inveni, cum ad eliminandi exercitium, tum seriem quamcunque

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots.$$

sub formam producti plurium potestatum (ex. gr. $= c(1+ax)^n(1+a_1x)^{n_1}\ldots.$) exhibere (quo quidem casu maxima industria atque circumspectio adhibenda) tum plures atque plures aequationum nuper obortarum successive tractare, mihi proposuissem *). Ut vero id, quod ita particulariter inveneram, generatim demonstrare liceret, alia ingredienda erat via; qua etiam totam rem jam breviter explicare conabor.

Est modus, qui aliquando in usum venit, numeros theoremati de quacunque functione valenti intextos determinandi; isque in eo consistit, ut loco functionis indeterminatae certa quaedam eligatur, quae isti determinationi maxime sit idonea.

Hanc igitur suppositionem $fx = \frac{1}{x}$, nostro casui aptissimam vidimus. Hac enim admissa, nostra, ab initio proposita aequatio haec evadit:

$$\frac{c_0}{x} + \frac{c_1}{x^2} + \frac{c^2}{x^3} - \ldots. = \frac{n_0}{a+x} + \frac{n_1}{x+a_1} + \frac{n_2}{x+a_2} + \ldots. + \frac{n_{r-1}}{x+a_{r-1}} + \ldots.$$

seu

$$c_0x^{-1} - c_1x^{-2} + c_2x^{-3} - \ldots. = n_0(x+a)^{-1} + n_1(x+a_1)^{-1} + n_2(x+a_2)^{-1} + \ldots.$$

Quae quidem, si illius pars dextra secundum x^{-n} evolvatur, coëfficientesque eidem ipsius x negativae potentiae annexi comparentur, rursum aequationes subsidiarias nuper expositas (*a.*) reddebit. Exinde igitur nihil reportatur, nisi quod doceatur, suppositionem nostram rite adhiberi. Si vero formamus functionem

$$B(-x) = (x+a_0)(x+a_{,})(x+a_{,,})\ldots.(x+a_{r-1})$$

explicatamque per $bx^r - b_1x^{r-1} + b_2x^{r-2} - \ldots. + b_r$ repraesentamus, eamque in utramque aequationis procedentis partem ducimus; id, quod quaerimus, inveniemus. Patet enim, nullas, instituta per $B.(-x)$ multiplicatione, ab dextra parte negativas ipsius x potentias superesse posse, (siquidem ex. gr. $B(-x)n(x+a)^{-1} = n(x+a_{,}).(x+a_{,,})\ldots.$ etc. sic in re-

---

*) Hae etiam ipsae aequationes resolvendae praecipuum implicari videbantur nodum alius cujusdam quaestionis, ejusque dignae, quae penitius perscrutaretur. Ni multum fallor, functionum secundum potentias evolutio ideo instituitur, quod in his et derivatio (differentiatio) et rederivatio (integratio) eaeque quousque libet repetitae, facillime perficiantur. Simili etiam de causa, scilicet ad differentiationem (Δ) atque summationem (Σ) sublevandam, interdum secundum facultates seu coëfficientes binomiales adgrediuntur evolutionem.

Quaslibet vero harum operationum, i. e. omnes fere, ex quibus fructus capere licet quam maximos, nullo fere negotio perficies, si functiones praeire exponentialiter explicueris. Posito vero

$fx = n_0e^{a_0x} + n_1e^{a_1x} + n_2e^{a_2x} + \ldots.$ atque $fx = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots.$

eaedem omnino oborientur aequationes (*a.*); quas igitur etiam hac de causa tractationem mereri credidimus.

liquis); ideoque coëfficientes negativarum potestatum quae a sinistra adesse videantur, re vera nihilo adaequari.

Exinde vero hae oboriuntur aequationes:

$$A)\quad \begin{cases} c_0 b_r + c_1 b_{r-1} + c_2 b_{r-2} + \ldots + c_{r-1} b_1 + c_r b_0 = 0, \\ c_1 b_r + c_2 b_{r-1} + c_3 b_{r-2} + \ldots + c_r b_1 + c_{r+1} b_0 = 0, \\ c_2 b_r + c_3 b_{r-1} + c_4 b_{r-2} + \ldots + c_{r+1} b_1 + c_{r+2} b_0 = 0, \\ \vdots \\ c_{r-1} b_r + c_r b_{r-1} + \ldots + c_{2r-2} b_1 + c_{2r-1} b_0 = 0. \end{cases}$$

Quarum quidem ope, cum nonnisi lineares sint, nullo fere negotio coëfficientes b_0, b_1, b_2, ... etc., uno excepto, qui arbitrarius superest numerus, determinantur. Quo facto, statuendo aequationem $B\alpha = 0$, seu

$$B)\quad b_0 \alpha^r + b_1 \alpha^{r-1} + b_2 \alpha^{r-2} + \ldots + b_r = 0$$

hancque resolvendo cum re vera idem ac

$$(\alpha - a_0)(\alpha - a_1)(\alpha - a_2) \ldots (\alpha - a_{r-1}) = 0$$

valeat, numeri a_0, a_1, a_2, ... a_{r-1}, utut illius radices, habebuntur.

His igitur cognitis, idque aequationis ope, quae non est nisi gradus (r) i. e. dimidii aequationis

$$c_{2r-1} = n_0 a_0^{2r-1} + n_1 a_1^{2r-1} + \ldots$$

altissimae earum, quae ab initio solvendae proponebantur, facili satis negotio reliquae ignotae (n) determinabuntur. Hanc in finem ad primitivas aequationes (α) regredimur, earumque r priores per suum quemcunque numerum A_0, A_1, A_2 etc. multiplicatas addimus. Ita habebimus:

$$c_0 A_0 + c_1 A_1 + \ldots + c_{r-1} A_{r-1} = n(A_0 + A_1 a + A_2 a^2 + \ldots + A_{r-1} a^{r-1}),$$

si numeros istos ita determinamus, ut coëfficientes sint aequationis

$$A_0 + A_1 \alpha + A_{,,} \alpha^2 + \ldots A_{r-1} \alpha^{r-1} = 0$$

$(= K\alpha)$, hujusque radices a_1, a_2, ... a_{r-1}, i. e. $K\alpha$ sit $\frac{B\alpha}{\alpha - a}$ (seu $= (\alpha - a_1)(\alpha - a_2)(\alpha - a_3) \ldots (\alpha - a_{r-1})$) qua quidem divisione instituta obtinetur

$$A_{r-1} = b_0; \quad A_{r-2} = b_1 + b_0 a; \quad A_{r-3} = b_2 + a b_1 + a^2 b_0 \text{ etc.}$$

Quibus igitur valoribus introductis, totoque secundum (a) ordinato, si brevitatis causa

$$b_r c_s + b_0 c_{s-1} + b_2 c_{s-2} + \ldots + b_s c_0 \text{ per } (b\,c),$$

indicamus, habebimus

$$n = \frac{(b\,c)_{r-1} + (b\,c)_{r-2} a + (b\,c)_{r-3} a^2 + \ldots + (b\,c)_0 a^{r-1}}{b_{r-1} + 2 b_{r-2} a + 3 b_{r-3} a^2 + \ldots + r b_0 a^{r-1}},$$

i. e. n est aliqua ipsius a functio, nobis per Fa designanda, eaque fracta,

cujus numerator (Pa) est pars producti $Ba(c_0a^{-1}+c_1a^{-2}+c_2a^{-3}+\ldots.)$ integra (i. e. ea, quae potentiis negativis caret), denominatorque $=Ka=dBa$.

Posita igitur $Fa=\frac{Pa}{dBa}$ seu

$$C)\quad Fa=\frac{(bc)_{r-1}+(bc)_{r-2}a+(bc)_{r-3}a^2+\ldots.+b_0c_0a^{r-1}}{b_{r-1}+2b_{r-2}a+3b_{r-3}a^2+\ldots.+rb_0a^{r-1}}$$

habebimus $n_0=Fa_0$, similiterque $n_1=Fa_1$, $n_2=Fa_2$, ... $n_{r-1}=Fa_{r-1}$; patet enim, n_5 similiter ab a_5 pendere, ac n_0 ab a_0, vel etiam similem calculum pro a_5 ac nuper pro a seu a_0 institui licere.

Jam ut vides, totum nostrum negotium aequationibus A, B, et C rite solvendis perficitur. Resolutis scilicet aequationibus A, cognoscuntur quantitates b, quae coëfficientes sunt in aequatione B). Haec vero resoluta dabit omnia (a); ex quibus suumquodque (n) per aequationem C), seu $n=Fa$ computabitur. Habemus igitur id, quod desiderabatur:

$$c_0fx+c_1dfx+c_2\mathrm{D}^2fx+c_3\mathrm{D}^3fx+\ldots.$$
$$=n_0f(x+a_0)+n_1f(x+a_1)+n_2f(x+a_2)\ldots.+n_{r-1}f(x+a_{r-1}).$$

Hisque subsistere quidem liceret; lubet tamen aliqua, tum circa praecisionem obtentam disserere, tum circa utriusque istarum aequationum solutionem computoque ad hanc obtinendam aptissimo annotare; tandemque totius rei usum exemplis aliquot illustrare.

Quod igitur ad accurantiam attinet, statim vides formulam nostram summatoriam

$$\sigma=n_0f(x+a_0)+n_1f(x+a_1)+\ldots.+n_{r-1}f(x+a_{r-1})$$

rursus evolutam sub formam

$$k_0fx+k_1dfx+k_2\mathrm{D}^2fx+\ldots.+k_m\mathrm{D}^mfx+\ldots.$$

exhiberi posse. Quoniam vero ita semper sit

$$k_m=n_0a_0^m+n_1a_1^m+n_2a_2^m+\ldots.+n_{r-1}a_{r-1}^m,$$

jam patet ex modo, quo numeros a et n determinavimus, esse $k_0=c_0$, $k_1=c_1$, generatimque $k_m=c^m$, siquidem $m<2r$ fuerit.

Termini igitur numero $2r$ priores seriei datae

$$s=c_0fx+c_1dfx+c_2\mathrm{D}^2fx+\ldots.$$

per istam formulam (γ) complete repraesentantur, errorque non nisi ex altioribus provenire potest, isque aperte hic est:

$$e=(c_{2r}-k_{2r})\mathrm{D}^{2r}fx+(c_{2r+1}-k_{2r+1})\mathrm{D}^{2r+1}fx+\ldots.$$

quo quidem corrigendum est σ, ut evadat $=s=\sigma+e$. Hic vero error eo est minor, quo major est r, quoque citius quantitates c decrescunt,

idque quo regularius, quo ipso non possit non $c_m - k_m$ adhuc minor evadere. In casibus quidem specialibus, quos tamen in praesenti pertractari nobis haud est animus, iste error brevius exhiberi potest, ut ex. gr. nuper celeberrimus Jacobi pro casu Gaussino elegantissime docuit.

A. Aequationes *A)*, ut primi gradus, juxta notissimam permutandi artem solvi quidem possunt; quoniam vero particulari gaudent forma, hac ad faciliorem solutionem uti licet. Si enim aequationes *A*, respective per β_0, β_1, β_2 etc. multiplicatae adduntur, obtinentur hae:

$$\begin{aligned} c_0\beta_0 + c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \ldots + c_{r-1}\beta_{r-1} &= 0, \\ c_1\beta_0 + c_2\beta_1 + c_3\beta_2 + \ldots + c_r\,\beta_{r-1} &= 0, \\ &\vdots \\ c_{r-2}\beta_1 + c_{r-1}\beta_1 + c_r\beta_2 + \ldots + c_{2r-3}\,\beta_{r-1} &= 0 \end{aligned}$$

pro definiendo $b_1 : b_0$ (restat scilicet:

$(\beta_0 c_{r-1} + \beta_1 c_r + \beta_2 c_{r+1} + \ldots + c_{2r-2}\beta_{r-1})b_1 + (\beta_0 c_r + \beta_1 c_{r+1} + \ldots + \beta_{r-1} c_{2r-1})b_0 = 0$).

Hae vero si adtenderis, aperte ad casum praecedentem ipsius *A)* seu ad r unitate minuta spectant,

acceptis $\beta_0, \beta_1, \beta_1$

loco horum $b'_{r-1}, b'_{r-2}, b'_{r-3}, \ldots$ etc.

Quae cum ita sint, exinde fluit modus simplicissimus, omnes casus successive simulque solvendi. Si enim a primis ducitur principium, radices praecedentes inverso ordine factores erunt idonei ad subsequentem solvendum. Sit igitur

$$1)\ r = 1, \quad \text{i. e.} \quad A)\ b_1 c_0 + b_0 c_1 = 0,$$

unde statim habetur:

$$b_0 = c_0 \quad \text{et} \quad b_1 = -c_1,$$

$$2)\ r = 2, \quad \text{i. e.} \quad A) \begin{cases} b_2 c_0 + b_1 c_1 + b_0 c_2 = 0, \\ b_2 c_1 + b_1 c_2 + b_0 c_3 = 0. \end{cases}$$

Adhibitis igitur factoribus ex 1) desumtis $-c_1$ et c_0, obtinebitur

$$b_1(-c_1^2 + c_0 c_2) + b_0(-c_1 c_2 + c_0 c_3) = 0,$$

$$\text{i. e.} \quad b_1 = c_0 c_3 - c_1 c_2 \quad \text{et} \quad b_0 = c_1^2 - c_0 c_2.$$

Quoniam vero si aequationes *A)*, diagonaliter inverso scripseris ordine i. e. hoc: $b_0 c_3 + b_1 c_2 + b_2 c_1 = 0$, $b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0 = 0$, aequationes obtinentur prioribus similes, ea solum differentia, ut $b_0 b_1 b_2$; $c_3 c_2 c_1 c_0$ locum teneant respective horum $b_2 b_1 b_0$; $c_0 c_1 c_2 c_3$; statim, si ad hanc permutationem adtenderis, habebis

$$b_2 = c_2^2 - c_2 c_3.$$

3) Sit $r = 3$ et

$$A) \quad \begin{cases} b_3 c_0 + b_2 c_1 + b_1 c_2 + b_0 c_3 = 0, \\ b_3 c_1 + b_2 c_2 + b_1 c_3 + b_0 c_4 = 0, \\ b_3 c_2 + b_2 c_3 + b_1 c_4 + b_0 c_5 = 0. \end{cases}$$

Factores ex 2) jam adsunt:

$$c_2^2 - c_1 c_3, \quad c_0 c_3 - c_1 c_2, \quad c_1^2 - c_0 c_2,$$

quarum ope statim ex forma:

$$b_1 c_0 + b_0 c_1 = 0$$

habetur:

$$b_0 = c_0 = c_2^3 - 2 c_1 c_2 c_3 + c_0 c_3^2 - c_0 c_2 c_4 + c_1^2 c_4,$$
$$b_1 = -c_1 = (c_1 c_3 - c_2^2) c_3 + (c_1 c_2 - c_0 c_3) c_4 + (c_0 c_2 - c_1^2) c_5,$$

iterumque ex diagonali perversione, ut et permutatione hac:

$$< \begin{matrix} b_0 b_1 \ldots . c_0 c_1 c_2 e_3 c_4 c_5 \\ b_3 b_2 \ldots . c_5 c_4 c_3 c_2 c_1 c_0 \end{matrix} >$$

dantur eo ipso:

$$b_2 = c_2 c_3^2 - c_2^2 c_4 + c_1 c_2 c_5 - c_1 c_3 c_4 + c_0 c_4^2 - c_0 c_3 c_5 \text{ et}$$
$$b_3 = -c_3^3 + 2 c_2 c_3 c_4 - c_2^2 c_5 + c_1 c_3 c_5 - c_1 c_4^2.$$

Signo scilicet mutato, ut ex evolutione directa termini cujuscunque jubetur: id, quod alterna vice, i. e. pro impari ipsius r valore efficiendum.

4) $r = 4$.

$$A) \quad \begin{cases} b_4 c_0 + \ldots . + b_0 c_4 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \vdots \\ b_4 c_3 + \ldots . + b_0 c_7 = 0. \end{cases}$$

Valoribus ex casu praecedenti per b_0^3, b_1^3, b_2^3, b_3^3 distinctis, harumque aequationum radices per b_0^4, b_1^4, b_2^4, b_3^4 indicatis, statim habebitur, prioribus factorum loco adhibitis:

$$-b_0^4 = c_3 b_3^3 + c_4 b_2^3 + c_5 b_1^3 + c_6 b_0^3 \text{ et}$$
$$b_1^4 = c_4 b_3^3 + c_5 b_2^3 + c_6 b_1^3 + c_7 b_0^3$$

exque his, valoribus in c loco $b^3 \ldots .$ introductis, permutatisque

$$< \begin{matrix} b_0 b_1 \ldots . c_0 c_1 \ldots . c_7 \\ b_4 b_3 \ldots . c_7 c_6 \ldots . c_0 \end{matrix} >$$

habebuntur b_4 et b_3, quorum valores utut prolixiores transcribere haud lubet; b_2 vero ex quacunde aequationum A) postmodum computabitur.

Ad finem observare liceat, adhuc dari modum ad coëfficientes aequationis B) perveniendi, eumque magis directum, nihilo tamen minus

satis laboriosum. Si enim seriem $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$. sub formam

$$\frac{n}{1-ax} + \frac{n_1}{1-a_1 x} + \frac{n_2}{1-a_2 x} + \ldots.$$

exhibere velis, ex evolutione partis dextrae ejusque comparatione cum sinistra, statim habebitur

$$c_0 = n - n_, + n_{,,} + \ldots.; \quad c_1 = na + n_, a_1 + \text{ etc.}$$

i. e. omnino eaedem aequationes *a)*, ac quae ab initio nobis oboriebantur. Si vero jam loco partis dextrae illius summam algebraicam, quae est fractio rationalis, per

$$\frac{\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \ldots.}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots.}$$

designanda, acceperis, alius operandi modus patebit. Sub hac enim fractionis forma series proposita $c_0 + c_1 x + \ldots.$ directe exhiberi potest, si haec in unitate bis dividatur, residuumque in illa etc., totumque opus ad fractionum continuarum modum absolvatur. Cujus vero rei, cum et notissima sit et satis laboriosa (praeter in casubus specialibus), ulteriore expositione in praesenti supersedere liceat.

B) Quod ad aequationem *B)* attinet, vix quidem aliquod calculandi compendium admittere videtur, cum nullum fere dubium sit, quin universalissimae sit formae, quandoquidem coëfficientes illius duplo gaudeant quantorum arbitrariorum numero, ideoque quidvis evadere posse videantur. In casibus igitur specialibus tantum aliquid ejusmodi est exspectandum; inter quos praecipue est observandus is, cum series proposita alterno deficitur termino.

Sit igitur 1) $c_1 = 0 = c_3 = c_5$ etc.

i. e. $s = c_0 fx + c_2 \mathrm{D}^2 fx + c_4 \mathrm{D}^4 fx + \ldots.$

Si hoc in casu alternas consideremus aequationum *A*, mox patebit esse $b_1 = 0 = b_3 = b_5 \ldots.$, nisi forte fuerit $c_2^2 - c_0 c_4 = 0 = c_4^2 - c_2 c_6 \ldots.$ Ad quae si adtenderis, mox videbis ceteras aequationum *A*, simpliciorem induere formam, quae illi ad casum generalem pertinenti similis sit. Inde igitur solutiones huic casui accommodatas facili negotio erues. Si enim r' huc sit id, quod ibi erat r, solummodo loco

$$c_0 c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 \ldots. \text{ sumendum est:}$$
$$c_0 c_2 c_4 c_6 c_8 c_{10} \ldots. \text{ cum } r' = 2r;$$
$$\text{vel } c_2 c_4 c_6 c_8 c_{10} c_{12} \ldots. \text{ cum } r' = 2r + 1.$$

Sic ex. gr. pro $r' = 5$ statim hac permutatione habetur

$$b_0 = c_4^2 - c_2 c_6, \quad b_2 = c_2 c_8 - c_4 c_6,$$

atque $b_4 = c_4^2 - c_2 c_6$, indeque aequatio

$$B)\quad b_0 \alpha^5 + b_2 \alpha^3 + b_4 \alpha = 0,$$

soluta facillima.

II) Sit $\quad s = c_1 df x + c_3 \mathrm{D}^2 f x + c_5 \mathrm{D}^5 f x + \ldots.$

i. e. $\quad c_0 = 0 = c_2 = c_4$ etc.

Tum itidem facillimo negotio patebit, pro $r' = 2r+1$ esse $b_0 = 0 = b_2 = b_4 \ldots.$, atque pro $r' = 2r$, $b_1 = 0 = b_3 = b_5 \ldots.$, nisi forte fuerit $c_3^2 - c_2 c_3 = 0 = c_5^2 - c_3 c_7 \ldots.$ Deinde si per b_n^r illud b_n, quod ad r attineat, ut antea in *A* 4), intelligitur, statim habebitur

$$b_0^2 = b_1^3 = c_1, \quad b_2^2 = b_3^3 = -c_3, \quad b_0^4 = b_1^5 = c_3^2 - c_1 c_5,$$
$$b_2^4 = b_3^5 = c_1 c_7 - c_3 c_5, \quad b_4^4 = b_5^5 = c_5^2 - c_3 c_7; \text{ etc.},$$

i. e. coëfficientes aequationis *B*) pro $r' = 2r$ et pro $r' = 2r+1$ eaedem, ipsaque aequatio eadem.

Sic ex. gr. tum pro $r = 4$, tum pro $r = 5$ est aequatio *B*)

$$(c_3^2 - c_1 c_5)\alpha^4 + (c_1 c_7 - c_3 c_5)\alpha^2 + c_5^2 - c_3 c_7 = 0.$$

Ex hinc igitur patet, seriem nostram si alterno defecta fuerit termino, approximate summari posse solita Algebrae facultate, i. e. solvendo aequationem quartum gradum haud superantem, idque accurantia, quae circiter ad $\mathrm{D}^{18} f x$ vel $\mathrm{D}^{19} f x$ adscendit. Fit enim pro $r = 9$ aequatio *A*) haec:

$$b_0 \alpha^9 + b_2 \alpha^7 + b_4 \alpha^5 + b_6 \alpha^3 + b_8 \alpha = 0 \text{ in casu primo,}$$
vel $\quad b_1 \alpha^8 + b_3 \alpha^6 + b_5 \alpha^4 + b_7 \alpha^2 + b_9 = 0$ in casu secundo.

Quae aperte ut aequationes quarti gradus resolvi possunt. Primus vero correctionis terminus est $(c_{18} - k_{18})\mathrm{D}^{18} f x$, qui in casu secundo nihilo adaequatur.

Circa aequationem *B*) tandem observandi sunt casus, qui ex diversa radicum indole oriuntur. Quanquam enim ex modo, quo aequatio *B*) exoritur, cum $(n+n_1) f a$ loco $n f a + n_1 f a$ sumi possit, radices illius (a) inaequales esse debere (id, quod in eliminatione directa inter aequationes α) admittendum erat, ut aequatio minoris gradus proveniret) videatur, tamen accidere potest, tum aliquas aequationis *B*) radicum inter se esse aequales, tum aliquas esse imaginarias. Jam si aliquae aequales fuerint, ex. gr. $a_0 = a_1$, valor ipsius n infinitus generatim prodibit; erat scilicet $n = \frac{Pa}{dBa}$, pro radice vero aequali (a) aequationis $B\alpha = 0$ est $dBa = 0$, cum idem de Pa nonnisi in casibus specialibus asserere

liceat. Exhinc igitur patet, formam admissam summae σ huic casui haud adaequari; attamen, si paululum immutatur, huic etiam accomodari potest. Si scilicet fuerit $a_0 = a_1 = a_2 \ldots = a_5$ loco partis

$$n_0 f(x+a_0) + n_1 f(x+a_1) + \ldots + n_s f(x+a_s) \text{ in } \sigma$$

sumendum est:

$$n_0 f(x+a_0) + n_1 df(x+a_0) + \ldots + n\, \mathrm{D}^s f(x+a_0).$$

Sit enim ex. gr. $a_1 = a_0$. Ponatur vero, priusquam aequales devenerint, $a_0 = a - \omega$ atque $a_1 = a + \omega$, itemque $Pa.f(x+a) = \varphi a$, eritque pars ipsius σ dubia

$$p = \frac{\varphi(a-\omega)}{dB(a-\omega)} + \frac{\varphi(a+\omega)}{dB(a+\omega)}.$$

Quoniam vero $(\alpha - a - \omega)(\alpha - a + \omega)$, seu $(\alpha - a)^2 - \omega^2$ factor est ipsius z, poni potest

$$B\alpha = ((\alpha - a)^2 - \omega^2).B\alpha;$$

indeque infertur

$$dB\alpha = (\alpha - a)^2 dB\alpha + (\alpha - a).2B\alpha - \omega^2 dB\alpha,$$

ideoque

$$dB(a+\omega) = 2\omega B(a+\omega) = 2\omega(Ba + \omega dBa + \ldots.)$$

similiterque

$$dB(a-\omega) = -2\omega.(Ba - \omega dBa);$$

his igitur introductis, habebitur

$$p = \frac{1}{2\omega}.\left(\frac{\varphi a + \omega d\varphi a + \ldots.}{Ba + \omega dBa + \ldots.} - \frac{\varphi a - \omega d\varphi a + \ldots.}{Ba - \omega dBa + \ldots.}\right.$$

seu

$$p = \frac{Ba.d\varphi a - \varphi a.dBa + \omega Q}{(Ba)^2 - \omega^2 R + \ldots.}$$

id, quod in casu radicum aequalium, seu cum $\omega = 0$ fuerit, fit:

$$p = \frac{Ba.d\varphi a - \varphi a.dBa}{(Ba)^2}.$$

Erat vero $\varphi a = Pa.f(x+a)$, ideoque

$$d\varphi a = dPa.f(x+a) + Pa.df(x+a);$$

indeque

$$p = \frac{Ba.dPa - Pa.dBa)}{Ba^2} f(x+a) + \frac{Pa}{Ba}.df(x+a),$$

quae igitur quantitas in σ loco hujus

$$nf(x+a_0) + n_1 f(x+a_1)$$

est introducenda.

Sit ex. gr.

$$s = c_0 fx + c_1 dfx + c_2 \mathrm{D}^2 fx + (3c_1 - 2c_0)\mathrm{D}^3 fx + 3(c_3 - 2c_1)\mathrm{D}^4 fx + (9c_1 - 6c_0 - 2c_2)\mathrm{D}^5 fx + \text{ etc.}$$

sumaturque $r=3$, quo per aequationes A) obtinebitur:

$$b_0=1, \quad b_1=0, \quad b_2=-3, \quad b_3=2,$$

i. e. aequatio B) erit $B\alpha=\alpha^3-3\alpha+2$, cui radices sunt 1, -2, 1; est scilicet $B\alpha=(\alpha-1)^2(\alpha-2)$. Inde igitur obtinetur

$$P\alpha = (\alpha^3-3\alpha+2)(c_0\alpha^{-1}+c\ \alpha^{-2}+c_2\alpha^{-3}+\ldots.),$$

seu

$$P\alpha = c_0\alpha^2+c_1\alpha+c_2-3c_0,$$

atque $dP\alpha = 2c_0\alpha+c_1$, $dB\alpha = 3(\alpha^2-1)$, tandemque

$$n = \frac{P\alpha}{dB\alpha} = \frac{c_0\alpha^2+c_1\alpha+c_2-3c_0}{3(\alpha^2-1)},$$

qui quidem pro $\alpha=-2$ reddit

$$n_2 = \frac{c_2-2c_1+c_0}{9},$$

at pro $\alpha=1$, $n=\infty$. Est vero $B\alpha=\alpha+2$, ideoque

$$B_1 = 3, \quad dB = 1.$$

Indeque

$$d\left(\frac{P}{B}\right)_1 = \frac{8c_0+2c_1-c_2}{9}, \quad \text{atque} \quad \frac{P_1}{B_1} = \frac{c_2+c_1-2c_0}{3}.$$

Ideoque

$$s = \frac{c_2-2c_1+c_0}{9}f(x-2)+\frac{8c_0+2c_1-c_2}{9}f(x+1)+\frac{c_2+c_1-2c_0}{3}df(x+1)$$

accurata ad $\mathrm{D}^6 fx$.

Similem in modum procedi poterit, si pluria radicum aequalium paria adfuerint, vel etiam numerus aequalium major fuerit; cujus vero expositionem, ne justo prolixiores evadamus, in praesenti omittere liceat; cum quidem numerum r mutando interdum nodus eludi possit. Id saltem monuisse juvat, ejusmodi in casibus numquam tot terminos seriei s per formam σ, non nisi ex partibus hujusmodi $nf(x+a)$ compositam, quot, si derivata etiam admittantur, haud repraesentari posse.

Sic ex. gr. seriei

$$s = \mathrm{D}^3 fx + e\,\mathrm{D}^5 fx + e^2\mathrm{D}^7 fx + \ldots.$$

terminus primus per $\frac{\triangle^3 fx}{\frac{a}{2.3.a^3}}$ repraesentari potest, errore jam ad sequentem exstante; ex principiis vero nuper allatis obtinetur

$$s = \frac{f(x+\sqrt{e})-f(x-\sqrt{e})}{2\sqrt{e^3}} - \frac{dfx}{e},$$

tumque omnes termini usque ad $\mathrm{D}^8 fx$ vel $\mathrm{D}^9 fx$ accurate exhibentur.

Quod ad imaginarias ipsius B) radices attinet, nulla specialis inde exoritur difficultas, sed tota quaestio ad vulgarem: $f(x+iy)$ sub

formam $X+iY$ exhibere, redit; id, quod pro functione f bene nota semper effici posse constat. Si enim ita obtinetur $f(a+ib)={}^{0}f_{a}^{b}+i.{}^{1}f_{a}^{b}$, atque $n=n^{0}+in'$, statim habebitur

$$(n^{0}+in')f(a+ib)+(n^{0}-in')f(a-ib)=2(n^{0}\,{}^{0}f_{a}^{b}-n'\,{}^{1}f_{a}^{b}).$$

Neque vero radices imaginariae aequales magis officiunt; data enim explicatione ipsius $f(x+iy)$, inde etiam $\mathrm{D}^{n}f(x+iy)$ explicandi artem semper elicere possumus. Exempla aliqua ad finem proponere est animus.

C) Valores tandem quantorum (n) ex ipsorum juxta aequationem (C) $\left(\text{seu } n=\frac{Pa}{dBa}\right)$, si rationalia fuerint, facile computantur, ni difficultas nuper pertractata offecerit, quae quidem arte modo tradita pellenda est. Si vero surda vel etiam imaginaria adfuerint quanta, certe aliquid levaminis adferatur, si loco functionis fractae $\frac{Pa}{dBa}$ alia, isti in casu $Ba=0$ aequivalens, integra (Ha) substituatur.

Hoc vero ita fit. Ponatur

$$\frac{Pa}{dBa}=Ha+Ba.\frac{Ka}{dBa},$$

eritque

$$Pa=Ha.dBa+Ba.Ka,$$

vel breviter

$$P=H.dB+BK,$$

radice subintellecta. Omnis igitur rei cardo in eo vertitur, ut aequatio functionalis formae $P=AH+BK$, ubi A, B, P sunt functiones integrae datae, H vero et K quaesitae, rite solvatur. Hoc vero effici potest vel coëfficientium indeterminatarum ope, vel magis directe modo isti simile, quo in aequatione primi gradus per numeros integros resolvenda utamur. Divisione scilicet continua efficitur $\frac{A}{B}=\cfrac{a}{b+\cfrac{a_{1}}{b_{1}+\ldots}}$, indeque calculi notissimi ope eliciuntur h et k tales, ut $Ah-Bk=1$ (seu const.) sit. Quo facto statim habetur:

$$H=B.J+hP \quad \text{et} \quad K=k.P-AJ,$$

si quidem J fuerit functio integra qualiscunque, quae tamen commoditatis causa ita determinatur, ut H et K gradus quam infimi fiant.

His jam feliciter dissertatis, methodi nostri usum paucis indicasse sufficiet. Primum vero observandum est, seriem quamcunque hujus formae

$$s_e = c_0 fx + e c_1 dfx + e^2 c_2 \mathrm{D}^2 fx + e^3 c_3 \mathrm{D}^3 fx + \ldots,$$

earundem aequationum ope summari posse, ac haec:

$$s_1 = c_0 fx + c_1 dfx + c_2 \mathrm{D}^2 fx + c_3 \mathrm{D}^3 fx + \ldots,$$

i. e. factores coëfficientium seriei datae (seriei geometrice progredientis) ad interim seponi posse. Universim enim, ponendo $c_n e^n$ loco c_n, $b_n e^n$ loco b_n, atque $e\alpha$ loco α, ideoque $e a_n$ loco a_n, series s_1 in s_e migrat; nihilotamen minus aequationes *A*) pro (*b*) definiendis, itemque *B*) pro (*a*), atque *C*) pro n, eaedem remanebunt. Fit nempe

$$n = \frac{e^{r-1}(b_0 c_0 a^{r-1} + b c_1 . a^{r-2} + \ldots.)}{e^{r-1}(r b a^{r-1} + (r-1) b_1 a^{r-2} + \ldots.)}$$

sicque in reliquis. Summata igitur serie

$$s_1 = c_0 fx + c_1 dfx + c_2 \mathrm{D}^2 fx + c_3 \mathrm{D}^3 fx + \ldots.,$$

sub forma

$$s_1 = n_0 f(x + a_0) + n_1 f(x + a_1) + \ldots.,$$

eadem opera obtinebitur:

$$\begin{aligned} s_e &= c_0 fx + c_1 e\, dfx + c_2 e^2 \mathrm{D}^2 fx + c_3 e^3 \mathrm{D}^3 fx + \ldots. \\ &= n_0 f(x + e a_0) + n_1 f(x + e a_1) + n_2 f(x + e a_{11}) + \text{ etc.} \end{aligned}$$

Jam igitur nostrae summationis ambitu approximationem Gaussinam comprehendi patet. Fit scilicet ex principiis jam expositis, cum

$$\int_y^0 dy f(x+y) = y fx + \tfrac{1}{2} y^2 dfx + \tfrac{1}{3} y^3 \mathrm{D}^2 fx + \ldots.$$

sit, hoc in casu:

$$c_0 = y, \quad c_1 = \tfrac{1}{2} y^2, \quad c_3 = \tfrac{1}{3} y^3 \text{ etc.},$$

vel, si mavis:

$$c_0 = 1, \quad c_1 = \tfrac{1}{2}, \quad c_2 = \tfrac{1}{3} \text{ etc.}$$

indeque ex. gr. pro $r = 2$, aequatio *B*)

$$\alpha_2 - \alpha + \tfrac{1}{6} = 0, \quad \text{unde} \quad \alpha = \frac{1 \pm \sqrt{\tfrac{1}{3}}}{2},$$

ideoque

$$\int_y^0 dy f(x+y) = \tfrac{1}{2} y \left[f\left(x + y \frac{1+\sqrt{\tfrac{1}{3}}}{2}\right) + f\left(x + y \frac{1-\sqrt{\tfrac{1}{3}}}{2}\right) \right].$$

Priusquam vero ulterius progredimur, hos speciales summationis nostrae casus proposuisse juvat. Ex regulis scilicet antea traditis obtinetur:

I) $s = c_0 fx + c_1 dfx + c_2 \mathrm{D}^2 fx + c_3 \mathrm{D}^3 fx =$

a) pro $r = 1$: $s = c_0 f\left(x + \frac{c_1}{c_0}\right) + \left(c_4 - \frac{c_1^2}{c_0}\right) \mathrm{D}^2 fx + \ldots.$

b) pro $r = 2$: $s = n_1 f(x + \alpha_1) + n_2 f(x + \alpha_2) + \varkappa \mathrm{D}^4 fx + \ldots.,$

exsistente

$b_0 \alpha^2 + b_1 \alpha + b_2 = 0$, i. e. $(c_1^2 - c_0 c_2)\alpha^2 + (c_0 c_3 - c_1 c_2)\alpha + c_2^2 - c_1 c_3 = 0$,

unde

$$2b_0\alpha + b_1 = \pm\sqrt{(b_1^2 - 4b_0b_2)} \quad \text{et} \quad n = \frac{b_0c_0\alpha + b_1c_0 + b_0c_1}{2b_0\alpha + b_1},$$

c) pro $r=3$: $s = n_1 f(x+\alpha_1) + n_2 f(x+\alpha_2) + n_3 f(x+\alpha_3)$ (cum errore $\varkappa_6 D^6 fx$), si

$$b_0\alpha^3 + b_1\alpha^2 + b_2\alpha + b_3 = 0$$

atque

$$n = \frac{b_0c_0\alpha^2 + (b_1c_0 + b_0c_1)\alpha + b_2c_0 + b_1c_1 + b_0c_2}{3b_0\alpha^2 + 2b_1\alpha + b_2},$$

b_0, b_1, b_2, b_3, ut ad *B)* docuimus, determinatis.

II) $s_0 = c_0 fx + c_2 D^2 fx + c_4 D^4 fx + \ldots$; erit

a) $s_0 = \frac{c_0}{2}\left[f\left(x+\sqrt{\frac{c_2}{c_0}}\right) + f\left(x-\sqrt{\frac{c_2}{c_0}}\right)\right] + \varkappa_4,$

b) $s_0 = \left(c_0 - \frac{c_2^2}{c_4}\right) fx + \frac{c_2^2}{2c_4}\left[f\left(x+\sqrt{\frac{c_4}{c_2}}\right) + f\left(x-\sqrt{\frac{c_4}{c_2}}\right)\right] + \varkappa_6,$

c) $s_0 = n_1[f(a+\alpha_1) + f(a-\alpha_1)] + n_2[f(a+\alpha_2) + f(a-\alpha_2)] + \varkappa_8$

si $\pm\alpha_1$, $\pm\alpha_2$ radices sunt aequationis

$$(c_2^2 - c_0c_4)\alpha^4 + (c_0c_6 - c_2c_4)\alpha^2 + c_4^2 - c_2c_6 = 0$$

(seu $= b_0\alpha^4 + b_2\alpha^2 + b_4 = 0$), atque

$$n = \frac{b_0c_0\cdot\alpha^2 + b_0c_2 + c_0b_2}{4b_0\alpha^2 + 2b_2}.$$

III) $s_1 = c_1 dfx + c_3 d^3 fx + c_5 D^5 fx + \ldots$; erit

a) $s_1 = \frac{c_1}{2}\sqrt{\frac{c_1}{c_3}}\left[f\left(x+\sqrt{\frac{c_3}{c_1}}\right) - f\left(x-\sqrt{\frac{c_3}{c_1}}\right)\right] + \varkappa_5,$

vel

b) $s_1 = \frac{n_1}{\alpha_1}[f(x+\alpha_1) - f(x-\alpha_1)] + \frac{n_2}{\alpha_2}[f(x+\alpha_2) - f(x-\alpha_2)] + \varkappa_9,$

siquidem fuerint $\pm\alpha_1$, $\pm\alpha_2$ radices aequationis

$$B) \quad (c_3^2 - c_1c_5)\alpha^4 + (c_1c_7 - c_3c_5)\alpha^2 + c_5^2 - c_3c_7 = 0,$$

atque

$$n = \frac{b_0c_1\alpha^2 + b_0c_3 + b_2c_1}{4b_0\alpha^2 + 2b_2},$$

ubi

$$b_0 = c_3^2 - c_1c_5 \quad \text{et} \quad b_2 = c_1c_7 - c_3c_5,$$

i. e. coëfficientes suae aequationis *B)*. Indicat vero $\varkappa_n$ errorem ordinis n^{ti}, cujus primus est terminus $(c_n - k_n) D^n fx$.

His praemissis ad integrationem simplicem redire licet. Ex formis II) *a)* et *b)* igitur obtinetur:

$$\int_{a-e}^{a+e} dx\, fx = e\left[f\left(a+\frac{e}{\sqrt{3}}\right) + f\left(a-\frac{e}{\sqrt{3}}\right)\right] + \tfrac{8}{45} e^5 D^4 fx + \ldots.$$

vel $= \frac{e}{9}[8fa + 5(f(a+e\sqrt{\tfrac{3}{5}}) + f(a-e\sqrt{\tfrac{3}{5}}))] + \tfrac{32}{700} e^7 D^6 fa.$

Quae quidem formulae ad integrationem inter limites $a-e$ et $a+e$ instituendum aptissimae mihi videntur.

Latissimus vero patet formularum nostrarum usum ad integrationem repetitam instituendum. Si enim aequationem

$$f(a+x).(dx)^r = (dx)^r.(fa+x\,dfa+x^2\,\mathrm{D}^2fa+\ldots.)$$

r vicibus integraverimus, obtinebitur

$$\overset{0}{\int_x^r}(dx)^r f(a+x) = \frac{x^r}{r_1^r}\left(fa+\frac{x}{r+1}dfa+\frac{x^2}{(r+2)_2}\mathrm{D}^2fa+\ldots.\right),$$

si fuerit n_s coëfficiens binomialis (termini $(s-1)^{\text{simi}}$ in potentia n^{ta}) atque $r_1^r = 1.2.3....r$. Hac igitur in serie sunt $c_0 = 1$, $c_1 = \frac{x}{r+1}$, $c_2 = \frac{x^2}{(r+2)_2}$, ... $c_n = \frac{x^n}{(r+n)_n}$, vel etiam $c_0 = 1$, $c_1 = \frac{1}{r+1}$, $c_2 = \frac{1}{(r+2)_2}$ etc. geometrica scilicet exclusa. Erit igitur aequatio *B)*, si secundi gradus accipitur, haec:

$$b_0\alpha^2 + b_1\alpha + b_2 = 0,$$

seu

$$\left(\left(\frac{1}{r+1}\right)^2 - \frac{1.1}{(r+2)_2}\right)\alpha^2 + \left(1.\frac{1}{(r+3)_3} - \frac{1}{r+1}\cdot\frac{1}{(r+2)_2}\right)\alpha + \left(\frac{1}{(r+2)_2}\right)^2 - \frac{1}{r+1}\cdot\frac{1}{(r+3)_3} = 0,$$

seu, reductione instituta:

$$\alpha^2 - \frac{4}{r+3}\alpha + \frac{2}{(r+3)(r+2)} = 0,$$

Indeque

$$\alpha = \frac{1}{r+3}\cdot\left[2 \pm \sqrt{\left(2.\frac{r+1}{r+2}\right)}\right].$$

Ex aequatione vero *G)* est

$$n = \frac{(r+3)\alpha - \frac{3r+1}{r+1}}{2((r+3)\alpha-2)}, \quad \text{i. e.} \quad n = \tfrac{1}{2}\left(1 \mp \frac{r-1}{\sqrt{(2.(r+1)(r+2))}}\right).$$

His igitur valoribus substitutis, erit

$$\overset{0}{\int_x^r}(dx)^r f(a+x) = \frac{x^r}{2.r_1^r}.F,$$

$$F = \left(1 - \frac{r-1}{\sqrt{(2(r+1)(r+2))}}\right).f\left[a+\frac{x}{r+3}\left(2+\sqrt{\left(2\frac{r+1}{r+2}\right)}\right)\right]$$
$$+ \left(1 + \frac{r-1}{\sqrt{(2(r+1)(r+2))}}\right).f\left[a+\frac{x}{r+3}\left(2-\sqrt{\left(2\frac{r+1}{r+2}\right)}\right)\right]$$
$$+ Ax^4\,\mathrm{D}^4fa + \ldots.$$

Pars vero istius seriei haec:

$$\frac{x^r}{r_1^r}.\left(fa + \frac{x^2}{(r+2)_2}\mathrm{D}^2fa + \frac{x^4}{(r+4)_4}\mathrm{D}^4fa + \ldots.\right)$$

$$\text{ita} = \frac{x^r}{r_1^r}\cdot\left(\frac{r.(5r+11)}{2.3(r+1)(r+2)}fa + \frac{(r+3)(r+4)}{12(r+1)(r+2)}\left\{\begin{matrix} f\left[a+x\sqrt{\left(\frac{12}{(r+3)(r+4)}\right)}\right] \\ +f\left[a-x\sqrt{\left(\frac{12}{(r+3)(r+4)}\right)}\right]\end{matrix}\right\}\right.$$
$$\left. + \varkappa x^{r+6}\mathrm{D}^6fa + \ldots.\right)$$

breviter exprimitur. Hoc vero ad integrationem inter limites $+x$ et $-x$ accomodari potest. Potest vero de repetita integrationis aequatione auxiliaria *B*) hujusque radicum indole atque limitibus simile quid eodemque fere modo, ac quo nuper celeberrimus Jacobi de simplicis elegantissime docuit, demonstrari. Id quod brevitatis causa in praesenti omittimus. Hujus vero rei ope functiones integrales, quae magis magisque transcendunt, approximate exhiberi possunt. Ex. gr.

$$\int d\varphi \int d\varphi \sqrt{(1-c^2 S\varphi^2)}, \quad \int d\varphi \int d\varphi \int d\varphi \sqrt{(1-c^2 S\varphi^2)} \quad \text{etc.}$$

vel hujusmodi:

$$\overset{\circ}{\int} d\varphi \overset{\circ}{\int} d\varphi \frac{1}{1+e^{-\varphi}} = \lambda'\varphi,$$

quae quidem

$$= \tfrac{1}{4}\varphi^2 + \frac{\varphi^2}{12}\sqrt{\frac{10}{3}}\left(\frac{1}{1+e^{-\varphi\sqrt{\frac{3}{10}}}} - \frac{1}{1+e^{\varphi\sqrt{\frac{3}{10}}}}\right) + z\varphi^7$$

evadit. Ex quo illius usum latissime patere constat. Neque vero minus innumeris aliis questionibus accomodari potest. Omnia recensere quis valet? Nonnulla igitur attulisse sufficiat. Ingeniosissimam summationis ope integrandi formam exhibuit celeberrimus Legendre (*Exerc. du calc. intégr. I.* 311.), quam ponendo

$$Fx = \frac{dfx}{24} - \frac{7\omega^2}{960}\mathrm{D}^3 fx + \frac{31\omega^4}{8064}\mathrm{D}^5 fx + \ldots,$$

breviter ita recapitulari licet:

$$\int_{x_0}^{x_1} dx\, fx = \omega \sum_{n_0}^{n_1} f(n + \tfrac{1}{2}\omega) + \omega^2 (Fx_1 - Fx_0)$$

exsistentibus $x_1 = n_1\omega$, $x_n = n_o\omega$. Nostris vero ex regulis Fx per varias formulas constructas quam proxime repraesentari potest. Est enim, vel

$$Fx = \tfrac{1}{240}\left(dfx - \frac{7\omega^2}{40}\mathrm{D}^3 fx - \frac{31\omega^4}{336}\mathrm{D}^5 fx - \ldots\right),$$

$$\text{vel} = \tfrac{1}{24}\left(dfx - \frac{7\omega^2}{120}\mathrm{D}^2 dfx + \frac{31\omega^4}{1680}\mathrm{D}^4 dfx - \ldots\right);$$

ideoque juxta formas modo propositas:

$$1)\quad Fx - \frac{f(x+\omega\sqrt{(\frac{-7}{40})}) - f(x-\omega\sqrt{(\frac{-7}{40})})}{48\omega\sqrt{(\frac{-7}{40})}},$$

cum correctione ordinis $\omega^4 \mathrm{D}^5 fx$;

$$2)\quad Fx = \tfrac{1}{48}[df(x+\omega\sqrt{(\tfrac{-7}{120})}) + df(x-\omega\sqrt{(\tfrac{-7}{120})})],$$

$$3)\quad Fx = \tfrac{1}{24}\left\{\tfrac{15}{18}\tfrac{17}{0} dfx + \tfrac{343}{3720}[df(x+\omega\sqrt{(\tfrac{-31}{98})}) + df(x-\omega\sqrt{(\tfrac{-31}{98})})]\right\}.$$

Correctionesque respective sunt ordinis

$$1)\ \omega^4 \mathrm{D}^5 fx, \quad 2)\ \omega^4 \mathrm{D}^5 fx, \quad 3)\ \omega^6 \mathrm{D}^7 fx,$$

quae quidem pro $\int dx fx$ ulterius minuuntur in ratione $\omega^2 : 1$; quo ipso ex. gr. formula 3) hoc integrale reddit cum errore ordinis $\omega^8 \mathrm{D}^7 fx$, qui quidem, cum ω arbitrarium sit, nullo fere negotio quantumvis minuitur. Id tamen interdum usui harum formularum officere potest, quod imaginarias comprehendant quantitates; quas tamen, si fx, vel saltem dfx, ex elementaribus composita fuerit functionibus, secundum calculi imaginarii notissimas regulas exterminaveris. Sic ex. gr. si desideraverimus $\int dx LSx$, mox habetur $dfx = T^1 x$ (i. e. $=$ cotang x), atque

$$T^1(a+ib) + T^1(a-ib) = 2Ta \cdot \frac{1-\dot{T}b^2}{Ta^2+\dot{T}b^2},$$

si breviter tangentem hyperbolicum $\frac{Tib}{i}$ seu $\frac{e^b-e^{-b}}{e^b+e^{-b}}$ per $\dot{T}b$ designaverimus. Erit igitur juxta formulam 3):

$$\int_{\frac{1}{2}\omega}^{n\omega} dx LSx = \text{const} + \omega \Sigma LS(n+\tfrac{1}{2}\omega) + \frac{\omega^2}{24.1860} T^1 x \left(1517 + 343 \cdot \frac{1-(\dot{T}\omega\sqrt{\tfrac{31}{98}})^2}{1+(T^1 x)^2 \cdot (\dot{T}\omega\sqrt{\tfrac{31}{98}})^2}\right)$$

quae formula calculi trigonometrici ope si mavis simplificata, hanc functionem transcendentem usque ad errorem ordinis ω^8 accurate suppeditat *).

Idem alibi (p. 328.) aliam haud minus memoratu dignam exhibuit seriem

$$s = \frac{\omega^2 \mathrm{D} fx}{12} - \frac{\omega^4}{720} d^3 fx + \frac{\omega^6}{30240} d^5 fx - \frac{\omega^8}{1209600} d^7 fx \ldots.$$

quae nostris accommodata, vel

$$s = \frac{\omega^2}{12}\left(dfx - \frac{\omega^2}{10}\mathrm{D}^3 fx + \frac{\omega^4}{21}\mathrm{D}^5 fx - \frac{\omega^6}{20}\mathrm{D}^7 fx + \ldots.\right)$$

vel

$$s = \frac{\omega^2}{12}\left(dfx - \frac{\omega^2}{30}\mathrm{D}^2 dfx + \frac{\omega^4}{105}\mathrm{D}^4 dfx - \ldots.\right)$$

scribenda est, ideoque vel per

$$s = \frac{\omega\sqrt{-10}}{24}(f(x+\omega\sqrt{\tfrac{-1}{10}}) - f(x-\omega\sqrt{\tfrac{-1}{10}})) + \varkappa_5 \mathrm{D}^5 fx$$

vel per

$$s = \frac{\omega^2}{12.60}[53\, dfx + \tfrac{7}{2}(df(x+\omega\sqrt{\tfrac{-2}{7}}) + df(x-\omega\sqrt{\tfrac{-2}{7}}))] + \varkappa_8 \omega^8 \mathrm{D}^7 fx + \ldots.$$

exhibenda.

---

*) Radicem

$$\sqrt{\frac{31}{98}} \text{ statim} = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{16} + \frac{8.31}{9.49} - \frac{1}{9.16.49} \cdot \frac{15874}{15874^2-1}\right)$$

accurate ad locum 32^{mum} decimalem, singularis nobis suppeditat formula.

Imaginaria igitur hic etiam adsunt, quae quidem in problemate illo ballistico eliminari possunt.

Errores (ε) eodem modo quam proxime exhiberi possunt. Cum enim sit

$$\varepsilon = (c_{2r} - k_{2r})\,\mathrm{D}^{2r} fx + (c_{2r+1} - k_{2r+1})\,\mathrm{D}^{2r+1} fx + \ldots,$$

si posuerimus

$$\varkappa_{m-2r} = \frac{(c_m - k_m)}{(m+2r)_m},$$

atque

$$\mathrm{D}^{2r} fx = Fx,$$

iterum habebimus seriem

$$\varepsilon = \varkappa_0 Fx + \varkappa_1 dFx + \varkappa_2 \mathrm{D}^2 Fx + \ldots.$$

sub formam

$$\varepsilon = \nu_0 F(x+\alpha_0) + \nu_1 F(x+\alpha_1) + \ldots.$$

ponendam. Sic ex. gr. obtinetur:

$$\int_{a-e}^{a+e} dx\, fx = 2e.\left[\tfrac{4}{9} fa + \tfrac{5}{18}\left(f(a+e\sqrt{\tfrac{3}{5}}) + f(a-e\sqrt{\tfrac{3}{5}})\right)\right]$$
$$+ \tfrac{e^7}{3\,5}\left[\tfrac{1}{1}\tfrac{1}{1}\tfrac{0}{0}\tfrac{5}{7}\tfrac{7}{0}\,\mathrm{D}^6 fa + \tfrac{1}{4}\tfrac{3}{4}\tfrac{3}{2}\tfrac{1}{8}\left(\mathrm{D}^6 f(a+\tfrac{2e}{11}\sqrt{\tfrac{1}{1}\tfrac{2}{2}\tfrac{3}{5}}) + \mathrm{D}^6 f(a-\tfrac{2e}{11}\sqrt{\tfrac{1}{1}\tfrac{2}{2}\tfrac{3}{5}})\right)\right]$$
$$+ \varkappa.e^{13}\,\mathrm{D}^{12} fa + \ldots.$$

Alio modo idem fit, hoc saltem in casu, per formulam celeberrimi Jacobi (tom. I. pag. 307.):

$$\varepsilon = \frac{1}{(2r)_r}.\int^{r+1} x^n d^n \sqrt{dx},$$

quae quidem ut integratio repetita per id, quod antea docuimus, summari potest. Series $c_0 fx + c_1 dfx + c_2 \mathrm{D}^2 fx + \ldots.$ generatim igitur sub formam $\Sigma n f(x+a) + \Sigma m \mathrm{D}^r f(x+b) +$ etc. poni potest.

Haecque hactenus indicasse sufficiat. Quali incremento exhinc eliminandi ars augeri possit, docere, separatam mereri tractationem nobis videtur.

28.

Mathematische Bruchstücke aus Herrn N. H. Abel's Briefen *).

I.

Wenn eine Gleichung des fünften Grades, deren Coëfficienten rationale Zahlen sind, algebraisch auflösbar ist, so kann man den Wurzeln folgende Gestalt geben:

$$x = c + A.a^{\frac{1}{5}}.a_1^{\frac{2}{5}}.a_2^{\frac{4}{5}}.a_3^{\frac{3}{5}} + A_1.a_1^{\frac{1}{5}}.a_2^{\frac{2}{5}}.a_3^{\frac{4}{5}}.a^{\frac{3}{5}} + A_2.a_2^{\frac{1}{5}}.a_3^{\frac{2}{5}}.a^{\frac{4}{5}}.a_1^{\frac{3}{5}} + A_3.a_3^{\frac{1}{5}}.a^{\frac{2}{5}}.a_1^{\frac{4}{5}}.a_2^{\frac{3}{5}},$$

wo

$$\begin{aligned} a &= m + n\sqrt{(1+e^2)} + \sqrt{[h(1+e^2+\sqrt{(1+e^2)})]},\\ a_1 &= m - n\sqrt{(1+e^2)} + \sqrt{[h(1+e^2-\sqrt{(1+e^2)})]},\\ a_2 &= m + n\sqrt{(1+e^2)} - \sqrt{[h(1+e^2+\sqrt{(1+e^2)})]},\\ a_3 &= m - n\sqrt{(1+e^2)} + \sqrt{[h(1+e^2-\sqrt{(1+e^2)})]}, \end{aligned}$$

$$A = K + K'a + K''a_2 + K'''aa_2, \quad A_1 = K + K'a_1 + K''a_3 + K'''a_1a_3,$$
$$A_2 = K + K'a_2 + K''a + K'''aa_2, \quad A_3 = K + K'a_3 + K''a_1 + K'''a_1a_3.$$

Die Gröfsen c, b, e, m, n, K, K', K'', K''' sind rationale Zahlen.

Auf diese Weise läfst sich aber die Gleichung $x^5 + ax + b = 0$ nicht auflösen, so lange a und b beliebige Gröfsen sind.

Ich habe ähnliche Lehrsätze für Gleichungen vom 7ten, 11ten, 13ten etc. Grade.

Freyberg (im Erzgebirge), den 14. März 1826.

II.

Eine allgemeine Eigenschaft derjenigen Functionen, deren Differenzial algebraisch ist, besteht darin, dafs die Summe einer beliebigen Anzahl Functionen durch einn bestimmte Anzahl der nemlichen Functionen ausgedrückt werden kann. Nemlich:

$$\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \varphi(x_3) + \ldots + \varphi(x_\mu) = v - \{\varphi(z_1) + \varphi(z_2) + \varphi(z_3) + \ldots + \varphi(z_n)\}.$$

$x_1, x_2, \ldots x_\mu$ sind beliebige Gröfsen, $z_1, z_2, \ldots z_n$ algebraische Functionen dieser Gröfsen und v ist eine algebraisch-logarith-

*) Der Herausgeber glaubt, dafs auch diese Bruchstücke aus den Arbeiten des leider der Wissenschaft viel zu früh durch den Tod entrissenen Hrn. Abel nicht verloren gehen dürfen.

mische Function derselben; n ist eine bestimmte, von μ unabhängige Zahl. Ist z. B. φ eine algebraische Function, so ist $n = 1$, wie bekannt, aus Legendre's *Th. etc.*

Wenn aber die Function nicht elliptisch ist, so kennt man bis jetzt keine Eigenschaften derselben. Als einen der merkwürdigsten Fälle will ich folgenden hinschreiben:

Wenn man die Function

$$\int \frac{(\alpha+\beta x).\partial x}{\sqrt{(a+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6)}}$$

durch $\varphi(x)$ bezeichnet, so ist

$$1.\quad \varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\varphi(x_3) = C-\{\varphi(y_1)+\varphi(y_2)\},$$

wo x_1, x_2, x_3 drei willkürliche veränderliche Gröfsen, C eine Constante und y_1, y_2 die zwei Wurzeln der Gleichung

$$y^2-\left\{\frac{c_2^2+2c_1-a_4}{2c_2-a_5}-x_1-x_2-x_3\right\}y+\frac{\left(\frac{c^2-a}{x_1.x_2.x_3}\right)}{2c_2-a_5}=0$$

sind. Die Gröfsen c, c_1, c_2 sind durch die drei linearen Gleichungen:

$$c+c_1x_1+c_2x_1^2+x_1^3 = \sqrt{(a+a_1x_1+a_2x_1^2+a_3x_1^3+\ldots.+x_1^6)},$$
$$c+c_1x_2+c_2x_2^2+x_2^3 = \sqrt{(a+a_1x_2+a_2x_2^2+\ldots\ldots\ldots+x_2^6)},$$
$$c+c_1x_3+c_2x_3^2+x_3^3 = \sqrt{(a+a_1x_3+a_2x_3^2+\ldots\ldots\ldots+x_3^6)}$$

bestimmt. Durch die Gleichung 1. ist die ganze Theorie der Function $\varphi(x)$ gegeben, weil die Eigenschaft welche sie ausdrückt, wie man beweisen kann, diese Function völlig bestimmt.

Paris, den 9. August 1826.

III.

Wenn man eine Curve *AMBN* (Taf. IV. Fig. 1.) beschreibt, deren Gleichung

$$z = \sqrt{(\cos 2\varphi)},$$

wo

$$z = AM,\quad \varphi = \angle MAB,$$

so ist der Bogen *AM* durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$s = \int \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}},$$

und hängt also von den elliptischen Functionen ab.

Nun habe ich gefunden, dafs man immer die Peripherie *AMBN* geometrisch (d. h. vermittelst des Lineals und des Zirkels) in n gleiche Theile theilen kann, wenn n eine Primzahl von der Form 2^m+1 ist,

oder wenn

$$n = 2^{\mu}(2^{m}+1)(2^{m'}+1)(2^{m''}+1)\ldots.(2^{m^{(k)}}+1),$$

wo $2^{m}+1$, $2^{m'}+1$ etc. Primzahlen sind.

Wie Sie sehen, ist dieses Theorem ganz dasselbe, wie das Gaufsische für den Kreis. Man kann auf die Weise die obige krumme Linie z. E. in 2, 3, 5, 17 etc. gleiche Theile theilen. Meine Theorie der Gleichungen, verbunden mit der Theorie *des nombres*, hat mich auf dieses Theorem geführt. Ich habe Grund zu glauben, dafs Gaufs auch darauf gekommen ist.

Paris, den 4. December 1826.

IV.

Dagegen habe ich die Summe folgender Reihe gefunden:

$$\sin\varphi.\frac{a}{1+a}+\sin 3\varphi.\frac{a^{3}}{1+a^{3}}+\sin 5\varphi.\frac{a^{5}}{1+a^{5}}+\ldots.$$

(a und φ sind willkürliche reelle Gröfsen) und dergleichen. Sie läfst sich durch elliptische Functionen ausdrücken.

Christiania, den 15. November 1827.

V. 1.

Je prépare dans ce moment un théorème sur les fonctions elliptiques, où j'ai considéré la théorie de ces fonctions sous un point de vue très général. Ce mémoire sera divisé en deux parties. La première contiendra la solution de ce problème général:

„Trouver toutes les relations possibles entre un nombre quelconque de fonctions elliptiques qui pourront s'exprimer par une équation de la forme:

$$1.\quad A_{1}\Pi_{1}(x_{1})+A_{2}\Pi_{2}(x_{2})+\ldots.+A_{n}\Pi_{n}(x_{n})$$
$$=r+B_{1}\log v_{1}+B_{2}\log v_{2}+\ldots.+B_{m}\log v_{m},$$

$x, x_{2}, \ldots. x_{n}, r, v_{1}, v_{2}, \ldots. v_{m}$ étant supposés des fonctions algébriques quelconques d'un certain nombre de variables indépendantes. $\Pi_{1}, \Pi_{2}, \ldots. \Pi_{n}$ désignent des fonctions elliptiques quelconques, c'est à dire des intégrales de la forme:

$$\Pi_{\mu}(y)=\int\frac{P_{\mu}.\partial y}{\sqrt{(\alpha_{\mu}+\beta_{\mu}y+\gamma_{\mu}y^{2}+\delta_{\mu}y^{3}+\varepsilon_{\mu}y^{4})}},$$

où P_{μ} est une fonction quelconque rationnelle de y.

Je parviens d'abord à ce théorème général:

Théorème 1. Si une équation telle que (1.) a lieu, une quelconque des fonctions $\Pi_1(x_1)$, $\Pi_2(x_2)$, ... $\Pi_n(x_n)$, p. ex. $\Pi_\mu(x_n)$ sera exprimable par des fonctions algébriques et logarithmiques, et on doit nécessairement avoir:

$$2.\quad \frac{\partial x}{\sqrt{(\alpha_\mu+\beta_\mu x+\gamma_\mu x^2+\delta_\mu x^3+\varepsilon_\mu x^4)}} = a\cdot\frac{\partial y}{\sqrt{(\alpha_\nu+\beta_\nu y+\gamma_\nu y^2+\delta_\nu y^3+\varepsilon_\nu y^4)}},$$

où a est une constante, ν différent de μ, et y une fonction rationnelle de x."

Une relation quelconque entre plusieurs fonctions elliptiques entraine ainsi nécessairement une relation entre deux fonctions de la première espèce. En vertu de ce théorème la solution du problème général pourra être principalement réduite à celle de satisfaire de la manière la plus générale à l'équation (2.). J'ai obtenu la solution complète de ce problème. J'ai trouvé pour résultat qu'on pourra satisfaire à (1.) d'une infinité de manières. a sera une fonction des coëfficiens α_μ, β_μ, ... α_ν, β_ν, ... et entre ceux-ci il doit y avoir une seule relation, mais qui pourra être variée d'une infinité de manières.

Voici quelques uns des résultats les plus remarquables.

2. Soit pour abréger:

$$\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4 = R,\quad \alpha'+\beta' y+\gamma' y^2+\delta' y^3+\varepsilon' y^4 = R'.$$

Cela posé, si l'équation

$$3.\quad \int\frac{\partial y}{\sqrt{R'}} = a\int\frac{\partial x}{\sqrt{R}}$$

a lieu, où y est lié à x par l'équation algébrique $f(x, y) = 0$, on aura toujours

$$4.\quad \int(A'_0+A'_1 y+\ldots.+A'_\mu y^\mu)\frac{\partial y}{\sqrt{R'}} = \int(A_0+A_1 x+\ldots.+A_\mu x^\mu)\frac{\partial x}{\sqrt{R}}+r,$$

où A_0, A_1, ... A_μ sont des constantes quelconques et r une expression algébrique et logarithmique.

3. L'équation (3.) ayant lieu, on aura toujours

$$5.\quad \int\frac{\partial y}{y-e'}\cdot\frac{1}{\sqrt{R'}} = r+A\int\frac{\partial x}{\triangle x}+B\int\frac{\partial x}{x-e}\cdot\frac{1}{\sqrt{R}},$$

où l'un des paramètres e' et e est arbitraire, mais l'autre est déterminé par l'équation $f(e', e) = 0$, ensorte que ces quantités sont liées entre elles par la même équation que celles y et x. r est une expression connue.

4. Si une des équations (4. et 5.) a lieu, l'équation (3.) sera satisfaite également, en déterminant convenablement le coëfficient a.

5. Il est impossible de réduire des fonctions de la forme

$$\int (A+Bx+Cx^2)\frac{\partial x}{\sqrt{R}}$$

aux fonctions de la première espèce, excepté pour quelques valeurs particulières des coëfficiens de la fonction R.

6. Il est impossible de réduire une fonction de la forme

$$\int \frac{\partial x}{x-e}\cdot\frac{1}{\sqrt{R}}$$

aux fonctions de la première et de la seconde espèce, excepté pour des valeurs particulières du paramètre e. Ces valeurs de e sont déterminées par l'équation $p^2-q^2.R=(x-e)^m$, où m est entier.

7. Si l'équation $\frac{\partial y}{\sqrt{R'}}=\frac{a\partial x}{\sqrt{R}}$ est satisfaite par l'équation algébrique $f(y,x)=0$, elle sera dans tous les cas résoluble algébriquement, en sorte qu'on en pourra tirer la valeur de l'une des quantités x et y en l'autre à l'aide de radicaux. En supposant x fonction rationnelle de y, en sorte que $\varphi(y)=x$, on aura, si cette équation est de degré impair:

$$y = \text{fonct. ration. } (x, \sqrt[n_1]{(p_1+q_1\sqrt{R})}, \sqrt[n_2]{(p_2+q_2\sqrt{R})}, \ldots \sqrt[n_m]{(p_m+q_m\sqrt{R})}),$$

où $p_1, q_1, p_2, q_2, \ldots p_m, q_m$ sont des fonctions entières de x, telles que $p_1^2-q_1^2.R=(x-a_1)^{n_1}$, $p_2^2-q_2^2.R=(x-a_2)^{n_2}$, $\ldots$ $p_m^2-q_m^2.R=(x-a_m)^{n_m}$, $a_1, a_2, \ldots a_m$ étant des constantes. Le produit des exposans $n_1, n_2, \ldots n_m$ est égal au degré de l'équation $\varphi(y)=x$.

Dans la seconde partie il sera question des fonctions elliptiques de la forme $\int \frac{P\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}}$, où l'on suppose c réel et moindre que l'unité. Tous les résultats auxquels je parviens dans cette seconde partie, et qui ne sont contenus implicitement dans ceux de la première partie, sont tirés de la considération de la fonction inverse de la première espèce. Je désigne cette fonction par λx, ensorte que

$$\partial x = \frac{\partial \lambda x}{\sqrt{[(1-\lambda^2 x)(1-c^2\lambda^2 x)]}}.$$

Cette fonction λ simplifie beaucoup toute la théorie des fonctions elliptiques. Elle a des propriétés très remarquables, et qui ont une analogie parfaite avec celles des fonctions circulaires, mais leur nombre est encore plus grand. Voilà quelques-unes des plus remarquables. Nous ferons pour abréger

$\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]} = \Delta(c,x)$; $\frac{\omega}{2} = \int_0^1 \frac{\partial x}{\Delta(c,x)}$, $\frac{\varpi}{2} = \int_0^1 \frac{\partial x}{\Delta(b,x)}$,
où $b = \sqrt{(1-c^2)}$.

1. La fonction λx est une fonction periodique de x. Cette propriété est la même que celle de $\sin x$. La fonction $\lambda(x\sqrt{-1})$ est également une fonction périodique de x.

2. L'équation $\lambda x = 0$ a une infinité de racines réelles et imaginaires, savoir $x = m\omega + n\varpi\sqrt{-1}$, m et n étant des nombres entiers quelconques. Les racines de l'équation plus générale $\lambda x = \lambda a$ sont $x = (-1)^m a + m\omega + n\varpi\sqrt{-1}$.

3. La fonction λx pourra être décomposé en un nombre infini de facteurs et de fractions partielles, p. ex.

$$\frac{1}{\lambda x} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \cdot \frac{(-1)^m}{x + m\omega + n\varpi i},$$

$$\lambda x = \frac{1}{c} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \cdot \frac{(-1)^m}{x + m\omega + (n+\frac{1}{2})\varpi i}.$$

4. Les propriétés de la fonction λx sont intimément liées avec l'équation $p^2 - q^2(1-y^2)(1-c^2y^2) = 0$, où p et q sont des fonctions entières de y. En effet si l'on désigne par $\lambda\theta_1$, $\lambda\theta_2$, ... $\lambda\theta_\mu$ les racines de cette équation, on aura, en supposant variables quelques-unes de ces racines,

$$\text{const.} = \lambda(\pm\theta_1 \pm \theta_2 \pm \theta_3 \pm .... \pm \theta_\mu)$$

en déterminant convenablement les signes des quantités θ_1, θ_2, θ_3, ... θ_μ.

5. On pourra exprimer $\lambda(\theta_1 + \theta_2 + ... \theta_\mu)$ en fonction rationnelle de $\lambda\theta_1$, $\lambda\theta_2$, ... $\lambda\theta_\mu$, $\Delta(c, \lambda\theta_1)$, ... $\Delta(c, \lambda\theta_\mu)$ quelles que soient les quantités θ_1, θ_2, ... θ_μ.

7. S'il l'on veut que deux fonctions $\int \frac{\partial x}{\Delta(c,x)}$, $\int \frac{\partial y}{\Delta(c',y)}$, où c et c' sont moindres que l'unité, ainsi que x et y, peuvent être réduites indéfiniment l'une à l'autre, il faut qu'on ait cette relation entre les fonctions complètes

$$m\int_0^1 \frac{\partial x}{\Delta(c,x)} \cdot \int_0^1 \frac{\partial x}{\Delta(b',x)} = n\int_0^1 \frac{\partial x}{\Delta(b,x)} \cdot \int_0^1 \frac{\partial x}{\Delta(c',x)},$$

où m et n sont des nombres entiers quelconques, et $b' = \sqrt{(1-c'^2)}$. Si cette équation est satisfaite, on pourra toujours exprimer y algébriquement et même rationnellement en x, de sorte que $\int \frac{\partial x}{\Delta(c,x)} = a\int \frac{\partial y}{\Delta(c',y)}$, où a est une constante dont la valeur dépend de celle du module c.

7. Si l'on suppose réductibles l'une à l'autre deux fonctions de la première espèce $\int \frac{\partial x}{\triangle(c,x)}$, $\int \frac{\partial x}{\triangle(c',y)}$, où c est moindre que l'unité et c' réel ou imaginaire, toutes les valeurs de c', propres à satisfaire à cette condition, seront données par les deux formules:

$$\sqrt[4]{c'} = \frac{1-\delta}{1+\delta}\cdot\frac{1-\delta^3}{1+\delta^3}\cdot\frac{1-\delta^5}{1+\delta^5}\cdot\ldots; \quad \sqrt[4]{c'} = \sqrt{2}\cdot\sqrt[8]{\delta}\cdot\frac{1+\delta^2}{1+\delta}\cdot\frac{1+\delta^4}{1+\delta^3}\cdot\frac{1+\delta^6}{1+\delta^5},$$

où $\delta = \pi\left(\mu\sqrt{-1}-\nu\cdot\frac{\omega}{\varpi}\right)$, μ et ν étant des nombres rationnels quelconques.

Il est à remarquer que si l'on fait $\mu = 0$, $\nu = 1$, on aura:

$$\sqrt[4]{c} = \frac{1-\delta}{1+\delta}\cdot\frac{1-\delta^3}{1+\delta^3}\cdot\ldots; \quad \sqrt[4]{b} = \sqrt{2}\cdot\sqrt[8]{\delta}\cdot\frac{1+\delta^2}{1+\delta}\cdot\frac{1+\delta^4}{1+\delta^3}\cdot\ldots.$$

Ces formules donneront donc le module c et son complément b en fonctions de $\delta = \frac{\omega}{\varpi}\pi$.

Je passe sous silence un grand nombre d'autres propriétés, tant des fonctions de la première espèce, que de celle de la seconde et de la troisième espèce.

V. 2.

Théorèmes sur les équations.

A. Soient $x_1, x_2, \ldots x_n$ des quantités inconnues quelconques, et $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$ une fonction entière de ces quantités du degré m, m étant un nombre premier quelconque: si l'on suppose entre $x_1, x_2, \ldots x_n$ les n équations suivantes:

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0, \quad \varphi(x_2, x_3, \ldots x_n, x_1) = 0;$$
$$\varphi(x_3, x_4, \ldots x_n, x_1, x_2) = 0, \quad \ldots \quad \varphi(x_n, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}) = 0,$$

on en pourra généralement éliminer $m-1$ quantités, et une quelconque x sera déterminée à l'aide d'une équation du degré m^n. Il est clair que le premier membre de cette équation sera divisible par la fonction $\varphi(x, x, x, \ldots x)$ qui est du degré m. On aura donc une équation en x du degré $m^n - m$.

Cela posé je dis que cette équation sera décomposable en $\frac{m^n-m}{n}$ équations, chacune du degré m, et dont les coëfficiens seront déterminés à l'aide d'une équation du degré $\frac{m^n-m}{n}$. En supposant connues les racines de cette équation, les équations du degré m seront résolubles algébriquement.

Par ex. si l'on suppose $n=2$, $m=3$, on aura une équation en x du degré $3^2-3=6$. Cette équation du sixième degré sera résoluble algébriquement, car en vertu du théorème, on pourra la décomposer en trois équations du second degré. Pareillement si l'on cherche les valeurs inégales de x_1, x_2, x_3 propres à satisfaire aux équations:

$$x_2=\frac{a+bx_1+cx_1^2}{\alpha+\beta x_1};\quad x_3=\frac{a+bx_2+cx_2^2}{\alpha+\beta x_2};\quad x_1=\frac{a+bx_3+cx_3^2}{\alpha+\beta x_3},$$

on aura, pour déterminer x_1, x_2, x_3, une équation du sixième degré, mais elle sera décomposable en deux équations du troisième degré, les coëfficiens de ces équations étant déterminés par une équation du second degré.

B. Si trois racines d'une équation quelconque irréductible, dont le degré est un nombre premier, sont liées entre elles de sorte que l'une de ces racines peut être exprimée rationnellement par les deux autres, l'équation en question sera toujours résoluble à l'aide de radicaux.

C. Si deux racines d'une équation irréductible, dont le degré est un nombre premier, ont entre elles un rapport tel qu'on peut exprimer une des deux racines rationnellement par l'autre, cette équation sera toujours résoluble à l'aide de radicaux.

Christiania, le 18. Octobre 1828.

29.

Exercitatio algebraica circa discerptionem singularem fractionum, quae plures variabiles involvunt.

(Auct. *C. G. J. Jacobi*, prof. math. ord. Regiom.)

1.

Proposita expressione

$$\frac{1}{ax+by-t}\cdot\frac{1}{b'y+a'x-t'},$$

evolvamus alterum factorem

$$\frac{1}{ax+by-t}$$

ad dignitates negativas ipsius y. Quem evolutionis modum ordine, quo in singulis fractionibus elementa x, y exhibuimus indicare placet. In producto assignato ipsorum quidem a, b' nonnisi negativae dignitates ipsorum b, a', t, t' nonnisi positivae occurrunt; elementorum x, y autem et positivae et negativae dignitates in infinitum inveniuntur. Neque tamen, uti facile constat, in ullo termino utriusque simul elementi x, y dignitates positivae, sed aut utriusque negativae, aut alterius positivae, alterius negativae erunt. Quarum porro dignitatum coëfficientes series infinitae evadunt, ad dignitates descendentes ipsorum a, b' procedentes. Distinguamus inter partem eam producti assignati, in qua utriusque x, y dignitates negativae sunt, eam partem, in qua elementi x dignitates negativae, elementi y positivae, eam denique, in qua ipsius y negativae, ipsius x positivae. Animadverti hoc singulare, fractionem propositam in tres alias discerpi posse, e quarum evolutione partes illae tres, singulae e singulis proveniant. In quibus porro evolutionibus id accidit, ut coëfficientes, qui in producto proposito series infinitae sunt, iam finito terminorum numero constent, ideoque per ipsam illam discerptionem algebraicam series illae infinitae prodeant summatae.

Simili modo, proposita expressione tres variabiles x, y, z involvente:

$$\frac{1}{ax+by+cz-t}\cdot\frac{1}{b'y+c'z+a'x-t'}\cdot\frac{1}{c''z+a''x+b''y-t''},$$

factorem primum, secundum, tertium respective ad dignitates negati-

vas elementorum x, y, z evolvamus, uti rursus ipso ordine*), quo in singulis fractionibus elementa exhibuimus, indicatum est. Hic partes septem considerandae sunt, prout terminos colligis, in quibus aut omnium elementorum x, y, z dignitates negativae, aut binorum negativae, reliqui positivae, aut binorum positivae, reliqui negativae sunt. Rursus expressionem propositam in alias septem discerpere licet, e quarum evolutione partes illae septem, singulae e singulis proveniunt; in quibus rursus evolutionibus coëfficientes finiti sunt, dum in expressione proposita series infinitae erant. Generaliter proposito producto e n fractionibus conflato, quarum denominatores lineariter e n variabilibus compositae sunt, siquidem factores alios ad alius elementi dignitates negativas evolvis, quo facto productum omnium elementorum et positivas et negativas dignitates in infinitum continebit: fractionem illam compositam in alias discerpere licet, quae evolutae singulae singulas partes producti propositi amplectuntur, in quibus eiusdem elementi dignitates aut positivae aut negativae sunt, neque ullius et positivae et negativae simul inveniuntur. Nec non coëfficientes, qui in producto assignato series infinitae sunt, in his novis evolutionibus finito terminorum numero constabunt, unde simul per discerptionem illam omnium illarum serierum infinitarum summationem nanciscimur.

Sit expressio proposita

$$\frac{1}{u-t}\cdot\frac{1}{u_1-t'}\cdot\frac{1}{u_2-t''}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{u_{n-1}-t^{(n-1)}},$$

in qua $u-t$, u_1-t', etc. e n variabilibus x, x_1, x_2, ... x_{n-1} lineariter compositae sint, designantibus t, t', t'', ... $t^{(n-1)}$ terminos constantes: factor primus, secundus, tertius, etc. respective ad dignitates descendentes ipsorum x, x_1, x_2 etc. evolvatur. Sint porro $x=p$, $x_1=p_1$, $x_2=p_2$, ... $x_{n-1}=p_{n-1}$ valores variabilium x, x_1, etc., qui satisfaciunt aequationibus $u=t$, $u_1=t'$, $u_2=t''$, ... $u_{n-1}=t^{(n-1)}$. Quorum valorum expressionem algebraicam notum est communi quodam denominatore affectam esse, quam cum quibusdam determinantem nun-

*) In sequentibus quoque, ubi denominator fractionis sive generalius argumentum functionis evolvendae pluribus nominibus constat, nomen, ad cuius dignitates descendentes evolutio instituenda est, primum scribemus. Quod ad sequentia intelligenda bene tenendum est.

cupamus et designemus per Δ. In exemplo allegato de tribus fractionibus, tres variabiles involventibus, fit e. g.

$$\Delta = ab'c'' - ab''c' - b'ca'' - c''a'b + a'b''c + a''bc'.$$

Quam determinantem in hac quaestione magnas partes agere videbimus, videlicet omnes illas series infinitas, quas ut coëfficientes producti propositi evoluti invenimus, ex evolutione dignitatum negativarum determinantis provenire. Maxime autem discerptio, de qua diximus, a valoribus ipsorum p, p_1, ... p_{n-1} pendet. Fit e. g. pars ea, quae omnium elementorum nonnisi negativas dignitates continet, et quae prae ceteris concinnitate gaudet:

$$\frac{1}{\Delta}\cdot\frac{1}{x-p}\cdot\frac{1}{x_1-p_1}\cdot\frac{1}{x_2-p_2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{x_{n-1}-p_{n-1}}.$$

Unde videmus e. g. in expressione $\frac{1}{uu_1\ldots u_{n-1}}$, dictum in modum evoluta, coëfficientem termini $\frac{1}{xx_1\ldots x_{n-1}}$ fieri

$$\frac{1}{\Delta}.$$

Quam expressionem memorabile est non pendere ab electione variabilium, ad quarum dignitates negativas singulae fractiones $\frac{1}{u}$, $\frac{1}{u_1}$ etc. evolvuntur modo ne duas ex earum numero ad eiusdem variabilis dignitates descendentes evolvas. Variabilibus igitur, quocunque modo placet, inter se permutatis, quod $2.3\ldots.n$ modis fieri posse constat, variae illae series infinitae, quas pro variis evolvendi modis ut coëfficientes termini $\frac{1}{xx_1\ldots x_{n-1}}$ invenis, ex eiusdem expressionis $\frac{1}{\Delta}$ evolutione proveniunt, prout secundum aliud nomen ipsius Δ, quod et ipsum $2.3\ldots.n$ nominibus constare notum est, evolutionem instituis.

Fractiones reliquae, e quarum evolutione partes prodeunt, quae unius pluriumve variabilium dignitates positivas, reliquarum negativas continent, multo prolixiores fiunt, ut infra videbimus; unde commode alia adhuc forma iis assignatur, quae ipsi illi, quam pro parte prima assignavimus, simillima fit. Namque partem, quae ipsorum x, x_1, ... x_{m-1} negativas, ipsorum x_m, x_{m+1}, ... x_{n-1} positivas dignitates amplectitur, invenitur fieri

$$\frac{1}{\Delta}\cdot\frac{1}{x-p}\cdot\frac{1}{x_1-p_1}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{x_{m-1}-p_{m-1}}.$$

$$\frac{1}{p_m - x_m} \cdot \frac{1}{p_{m+1} - x_{m+1}} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{p_{n-1} - x_{n-1}},$$

siquidem $\frac{1}{p_m}$, $\frac{1}{p_{m+1}}$, ... $\frac{1}{p_{n-1}}$ earumque dignitates respective ad dignitates descendentes ipsarum $t^{(m)}$, $t^{(m)}$, ... $t^{(n-1)}$ evolvuntur, et dignitates negativae ipsarum $t^{(m)}$, $t^{(m+1)}$, ... $t^{(n-1)}$, quae in producto ita evoluto inveniuntur, reiiciuntur. E. g. expressionis

$$\frac{1}{ax + by - t} \cdot \frac{1}{b'y + a'x - t'}$$

pars, quae negativas ipsius x, positivas ipsius y dignitates continet, fit

$$\frac{ab' - a'b}{[(ab' - a'b)x - b't + bt'][at' - a't - (ab' - a'b)y]},$$

reiectis, quae in evolutione huius expressionis inveniuntur, dignitatibus ipsius t' negativis. Quae nova repraesentatio eo et ipsa commodo gaudet, ut coëfficientes evolutionis habeat finitos.

Sed generaliores adhuc formulas adstruere licet. Etenim in expressione

$$\frac{1}{(u-t)(u_1 - t') \cdots (u_{n-1} - t^{(n-1)})} = \Sigma \frac{t^{\alpha} t'^{\alpha_1} \cdots t^{(n-1)^{\alpha_{n-1}}}}{u^{\alpha+1} u_1^{\alpha_1+1} \cdots u_{n-1}^{\alpha_{n-1}+1}}$$

numeris α, α_1, ... α_{n-1} positivi tantum valores inde a 0 usque ad infinitum conveniunt. Jam vero consideremus expressionem

$$\Sigma \frac{t^{\alpha} t'^{\alpha_1} \cdots t^{(n-1)^{\alpha_{n-1}}}}{u^{\alpha+1} u_1^{\alpha_1+1} \cdots u_{n-1}^{\alpha_{n-1}+1}},$$

numeris integris α, α_1, ... α_{n-1} valores omnes et positivos et negativos tributis a $-\infty$ ad $+\infty$. Quam patet prodire ex evoluto producto

$$\left(\frac{1}{u-t} + \frac{1}{t-u}\right)\left(\frac{1}{u_1 - t'} + \frac{1}{t' - u_1}\right) \cdots \left(\frac{1}{u_{n-1} - t^{(n-1)}} + \frac{1}{t^{(n-1)} - u_{n-1}}\right).$$

Quod ipsis $\frac{1}{u}$, $\frac{1}{u_1}$, $\frac{1}{u_2}$ etc. earumque dignitatibus respective ad dignitates descendentes ipsarum $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}$ etc. evolutis, invenitur productum aequale expressioni

$$\frac{1}{\Delta}\left(\frac{1}{x-p} + \frac{1}{p-x}\right)\left(\frac{1}{x_1 - p_1} + \frac{1}{p_1 - x_1}\right) \cdots \left(\frac{1}{x_{n-1} - p_{n-1}} + \frac{1}{p_{n-1} - x_{n-1}}\right),$$

ipsis $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{p_1}$, $\frac{1}{p_2}$ etc. earumque dignitatibus respective ad dignitates descendentes ipsarum t, t', t'' etc. evolutis. Quam aequationem etiam hunc in modum repraesentare licet:

$$\Sigma \frac{t^{\alpha} t'^{\alpha_1} \ldots . t^{(n-1)\alpha_{n-1}}}{u^{\alpha+1} u_1^{\alpha_1+1} \ldots . u_{n-1}^{\alpha_{n-1}+1}} = \frac{1}{\Delta} \Sigma \frac{p^{\beta} p_1^{\beta_1} \ldots . p_{n-1}^{\beta_{n-1}}}{x^{\beta+1} x_1^{\beta_1+1} \ldots . x_{n-1}^{\beta_{n-1}+1}},$$

designantibus α, α_1, etc. β, β_1, etc. numeros omnes et positivos et negativos a $-\infty$ ad $+\infty$. E quo theoremate videmus, coëfficientem termini $\frac{1}{x^{\beta+1} x_1^{\beta_1+1} \ldots . x_{n-1}^{\beta_{n-1}+1}}$ in expressione

$$\frac{1}{u^{\alpha+1} u_1^{\alpha_1+1} \ldots . u_{n-1}^{\alpha_{n-1}+1}}$$

aequalem fore coëfficienti termini $t^{\alpha} t'^{\alpha_1} \ldots . t^{(n-1)\alpha_{n-1}}$ in expressione

$$\frac{1}{\Delta} p^{\beta} p_1^{\beta_1} \ldots . p_{n-1}^{\beta_{n-1}}.$$

Pro duobus elementis e. g., coëfficientem termini $\frac{1}{x^{\mu} y^{\nu}}$ in expressione

$$\frac{1}{(ax+by)^{m+1} (b'y+a'x)^{n+1}}$$

invenitur aequalem esse coëfficienti termini $t^m t'^n$ in expressione

$$\frac{(b't-bt')^{\mu-1} (at'-a't)^{\nu-1}}{(ab'-a'b)^{m+n+1}}.$$

Unde facile derivatur theorema, posito $\alpha+\alpha'=\beta+\beta'=p$, fore

$$1+\frac{\alpha\beta}{\gamma}u+\frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}\cdot\frac{\beta(\beta+1)}{1.2}u^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}\cdot\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3}u^3+\ldots. =$$
$$\frac{1}{(1-u)^{\alpha+\beta-\gamma}}\cdot\left(1+\frac{\alpha'\beta'}{\gamma}u+\frac{\alpha'(\alpha'+1)}{\gamma(\gamma+1)}\cdot\frac{\beta'(\beta'+1)}{1.2}u^2+\frac{\alpha'(\alpha'+1)(\alpha'+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}\cdot\frac{\beta'(\beta'+1)(\beta'+2)}{1.2.3}u^3+\ldots\right);$$

nec non relatio inter integralia definita:

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos\lambda\varphi\,.\,\partial\varphi}{(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha\alpha)^{n+1}} = \frac{\Pi(n+\lambda)\Pi(n-\lambda)}{\Pi n\,\Pi n}\int_0^{\pi} \frac{(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha\alpha)^n \cos\lambda\varphi\,.\,\partial\varphi}{(1-\alpha\alpha)^{2n+1}},$$

designante Πx productum $1.2.3.\ldots.x$. Quae ab Eulero olim inventa sunt.

At theorematis, de quibus in hac commentatione agimus et quorum modo mentionem injecimus, latissimam conciliare licet extensionem. Ponamus enim, $u-t$, u_1-t', etc. iam series esse quaslibet, sive finitas sive infinitas, ad dignitates integras positivas elementorum x, x_1, etc. procedentes, quarum serierum t, t', etc. sint termini constantes. Sint porro in seriebus illis u, u_1, u_2, etc. termini, qui primas ipsorum x, x_1, x_2, etc. dignitates continent, respective ax, $b'x_1$, $c''x_2$, etc., ac ponamus, uti in casu lineari, fractiones $\frac{1}{u-t}$, $\frac{1}{u_1-t'}$, $\frac{1}{u_2-t''}$, etc. evolvi respective ad dignitates descendentes terminorum ax, $b'x_1$, $c''x_2$, etc. Vocemus porro Δ determinantem differentialium partialium sequentium:

$$\begin{array}{cccc}
\frac{\partial u}{\partial x}, & \frac{\partial u}{\partial x_1}, & \frac{\partial u}{\partial x_2}, & \ldots\ldots \frac{\partial u}{\partial x_{n-1}}, \\
\frac{\partial u_1}{\partial x}, & \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, & \ldots\ldots \frac{\partial u_1}{\partial x_{n-1}}, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}, & \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1}, & \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_2}, & \ldots\ldots \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_{n-1}}.
\end{array}$$

Erit e. g. pro tribus functionibus u, u_1, u_2, etc., tribusque variabilibus x, y, z:

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial y}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial z}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial u_2}{\partial z}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial z}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial y},$$

quam patet expressionem casu, quo u, u_1, u_2 sunt expressiones lineares, in expressionem ipsius Δ supra exhibitam redire. Quibus positis dico, siquidem $x = p$, $x_1 = p_1$, $x_2 = p_2$, ... $x_{n-1} = p_{n-1}$ satisfaciant aequationibus $u = t$, $u_1 = t'$, $u_2 = t''$, ... $u_{n-1} = t^{(n-1)}$, producti

$$\frac{\Delta}{(u-t)(u_1-t')(u_2-t'')\ldots(u_{n-1}-t^{(n-1)})},$$

dictum in modum evoluti, partem eam, quae omnium simul elementorum x, x_1, etc. dignitates negativas neque ullius positivas continet, ut supra in casu multo simpliciore, fieri

$$\frac{1}{(x-p)(x_1-p_1)(x_2-p_2)\ldots(x_{n-1}-p_{n-1})}.$$

Nec non esse, quod magis generale est theorema,

$$\Delta\left(\frac{1}{u-t}+\frac{1}{t-u}\right)\left(\frac{1}{u_1-t'}+\frac{1}{t'-u_1}\right)\ldots\left(\frac{1}{u_{n-1}-t^{(n-1)}}+\frac{1}{t^{(n-1)}-u_{n-1}}\right) =$$
$$\left(\frac{1}{x-p}+\frac{1}{p-x}\right)\left(\frac{1}{x_1-p_1}+\frac{1}{p_1-x_1}\right)\ldots\left(\frac{1}{x_{n-1}-p_{n-1}}+\frac{1}{p_{n-1}+x_{n-1}}\right),$$

ipsis $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{p_1}$, etc. earumque dignitatibus respective ad dignitates descendentes ipsarum t, t', etc. evolutis. E quo theoremate memorabili fluunt formulae maxime generales pro radicibus aequationum inter numerum quemlibet variabilium, adeoque radicum dignitatibus et productis in seriem evolvendis. Quippe quibus ad dignitates ipsarum t, t', t'', etc. ordinatis, e theoremate proposito statim terminum generalem earum serierum eruis. Patet enim e dicto theoremate, in evolvenda expressione

$$p^{\alpha} p_1^{\alpha_1} \ldots\ldots p_{n-1}^{\alpha_{n-1}}$$

coëfficientem termini

$$t^{\beta} t'^{\beta'} \ldots . t^{(n-1)\beta^{(n-1)}}$$

eundem esse atque coëfficientem termini $\frac{1}{x^{\alpha+1} x_1^{\alpha_1+1} \ldots . x_{n-1}^{\alpha_{n-1}+1}}$ in expressione

$$\frac{\Delta}{u^{\beta+1} u_1^{\beta'+1} \ldots . u_{n-1}^{\beta^{(n-1)}+1}},$$

dictum in modum evoluta; quem coëfficientem per regulas notas, quae pro evolvendis dignitatibus polynomii circumferuntur, statim eruis. Quae hoc loco breviter innuisse sufficiat. Ipsam iam quaestionem nostram aggrediamur.

2.

Ordimur a casu simplicissimo duarum variabilium, in quo adeo initio terminos constantes $= 0$ ponemus. Fit

$$\frac{ab'-a'b}{(ax+by)(b'y+a'x)} = \frac{a}{y} \cdot \frac{1}{ax+by} - \frac{a'}{y} \cdot \frac{1}{b'y+a'x},$$

fit porro:

$$\frac{a}{y} \cdot \frac{1}{ax+by} = \frac{1}{xy} - \frac{1}{x} \cdot \frac{b}{ax+by},$$

unde

$$1) \quad \frac{ab'-a'b}{(ax+by)(b'y+a'x)} = \frac{1}{xy} - \frac{1}{x} \cdot \frac{b}{ax+by} - \frac{1}{y} \cdot \frac{a'}{b'y+a'x}.$$

Aequatione 1) ad dignitates descendentes ipsarum a, b' evolutis, videmus partes tres, in quas fractionem propositam

$$\frac{ab'-a'b}{(ax+by)(b'y+a'x)}$$

discerpimus, et quas per L, L_1, L_2 designemus, primam L utriusque elementi x, y negativas, secundam L_1 ipsius x negativas, ipsius y positivas, tertiam L_2 ipsius y negativas, ipsius x positivas dignitates continere.

Ponamus iam, satisfacere $x = p$, $y = q$ aequationibus

$$ax + by = t, \quad a'x + b'y = t',$$

unde

$$(ab'-a'b)p = b't - bt', \quad (ab'-a'b)q = at' - a't.$$

Mutatis in aequatione 1) x, y in $x-p$, $y-q$, quo facto $ax+by$, $a'x+b'y$ in $ax+by-t$, $a'x+b'y-t'$ abeunt, obtines

Theorema 1.

posito

$$L = \frac{ab'-a'b}{(ab'-a'b)x - b't + bt'} \cdot \frac{ab'-a'b}{(ab'-a'b)y - at' + a't},$$

$$L_1 = -\frac{ab'-a'b}{(ab'-a'b)x - b't + bt'} \cdot \frac{b}{ax+by-t},$$

$$L_2 = -\frac{ab'-a'b}{(ab'-a'b)y-at'+a't}\cdot\frac{a'}{b'y+a'x-t'},$$

fieri

$$2)\quad \frac{ab'-a'b}{(ax+by-t)(b'y+a'x-t')} = L+L_1+L_2.$$

Aequatione 2) ad dignitates descendentes elementorum a, b' evoluta, videmus, L, L_1, L_2 esse partes illas tres, quae aut utriusque x, y negativas, aut alterius negativas, alterius positivas dignitates continent. Simul autem ipso adspectu patet, in evolutione ipsorum L, L_1, L_2 dignitates variabilium x, y coëfficientes finitos habere, dum in evolutione expressionis propositae series infinitae sunt.

3.

Jam videbimus, de producto e tribus factoribus, tres variabiles involventibus

$$\frac{1}{(ax+by+cz-t)(b'y+c'z+a'x-t')(c''z+a''x+b''y-t'')}$$

similia inveniri. Eo enim ad dignitates descendentes ipsorum a, b', c'' evoluto, in evolutione dignitates variabilium x, y, z et positivae et negativae inveniuntur in infinitum; neque tamen ita, ut in ullo termino simul omnium dignitates positivae sint. Colligamus igitur terminos, qui omnium x, y, z simul dignitates negativas continent, quae pars prima erit; terminos, qui binarum variabilium negativas, reliquae positivas continent, quae erunt partes tres, prout aut elementi x, aut elementi y, aut elementi z dignitates positivae sunt; terminos denique, qui binarum variabilium dignitates positivas, reliquae negativas continent, quae et ipsae sunt partes tres, prout aut elementi x, aut elementi y, aut elementi z dignitates negativae sunt. Quae septem partes constituunt seriem, quae ex evolutione expressionis propositae ortum ducit. Jam rursus de expressione illa in septem alias discerpenda quaeramus, e quarum evolutione septem illae partes, singulae e singulis proveniant. Qua in quaestione initio, ut supra, statuemus $t = t' = t'' = 0$.

Designabimus in sequentibus per (ab') expressionem

$$(ab') = ab'-a'b,$$

porro per $(ab'c'')$ expressionem

$$(ab'c'') = a(b'c'')+b(c'a'')+c(a'b'')$$
$$= ab'c''-ab''c'-b'ca''-c''a'b+a'b''c+a''bc'.$$

Quae errori locum non dabit notatio, cum monomen uncis inclusum alias inveniri non soleat. Sit

1) $ax+by+cz=u,\ a'x+b'y+c'z=u',\ a''x+b''y+c''z=u'';$

ponatur porro:

2) $$\begin{aligned}(b'c'')y-(c'a'')x &= c''u'-c'u'' = v,\\ (b'c'')z-(a'b'')x &= b'u''-b''u' = w,\\ (c''a)z-(a''b)y &= au''-a''u = v',\\ (c''a)x-(b''c)y &= c''u-cu'' = w',\\ (ab')x-(bc')z &= b'u-bu' = v'',\\ (ab')y-(ca')z &= au'-a'u = w''.\end{aligned}$$

Observo, siquidem ad dignitates elementorum a, b', c'' descendentes evolutionem instituas, expressiones

$\frac{1}{u}, \frac{1}{w'}, \frac{1}{v''}$ earumque dignitates ad dignitates descendentes ipsius x,

$\frac{1}{u'}, \frac{1}{w''}, \frac{1}{v}$ - - - - - - y,

$\frac{1}{v''}, \frac{1}{w}, \frac{1}{v'}$ - - - - - - z,

evolvendas esse. Fit porro e formula 1) paragraphi antecedentis:

3) $$\begin{aligned}\frac{1}{u'u''} &= \frac{(b'c'')}{vw}-\frac{c'}{u'v}-\frac{b''}{u''w},\\ \frac{1}{u''u} &= \frac{(c''a)}{v'w'}-\frac{a''}{u''v'}-\frac{c}{uw'},\\ \frac{1}{uu'} &= \frac{(ab')}{v''w''}-\frac{b}{uv''}-\frac{a'}{u'w''},\end{aligned}$$

His praeparatis, ad inveniendam discerptionem quaesitam proficiscimur ab aequatione identica:

4) $$\begin{aligned}(ab'c'')xyz = uu'u'' &-xu(a'a''x+a''b'y+a'c''z)\\ &-yu'(b''by+bc''z+b''ax)\\ &-zu''(cc'z+c'ax+cb'y),\end{aligned}$$

quae evolutione facta facile comprobatur. Qua divisa per $xyzuu'u''$, siquidem brevitatis causa ponitur:

$$\begin{aligned}a'a''x+a''b'y+a'c''z &= N,\\ b''by+bc''z+b''ax &= N',\\ cc'z+c'ax+cb'y &= N'',\end{aligned}$$

prodit:

5) $$\frac{(ab'c'')}{uu'u''} = \frac{1}{xyz}-\frac{N}{yzu'u''}-\frac{N'}{zxu''u}-\frac{N''}{xyuu'}.$$

Fit autem e 3):

$$\frac{1}{u'u''} = \frac{(b'c'')}{vw}-\frac{c'}{u'v}-\frac{b''}{u''w},$$

porro e 2):

$$(b'c'')N = a''b'v + a'c''w - (a'b'')(c'a'')x,$$
$$c'N = c'a''u' - c'(c'a'')z,$$
$$b''N = b''a'u'' - b''(a'b'')y,$$

unde

$$\frac{N}{yzu'u''} = -\frac{(a'b'')}{yzw} - \frac{(c'a'')}{yzv} - \frac{(a'b'')(c'a'')x}{yzvw} + \frac{c'(c'a'')}{yu'v} + \frac{b''(a'b'')}{zu''w}.$$

Prorsus eodem modo invenitur

$$\frac{N'}{zxu''u} = -\frac{(b''c)}{zxw'} - \frac{(a''b)}{zxv'} - \frac{(b''c)(a''b)y}{zxv'w'} + \frac{a''(a''b)}{zu''v'} + \frac{c(b''c)}{xuw'},$$
$$\frac{N''}{xyuu'} = -\frac{(ca')}{xyw''} - \frac{(bc')}{xyv''} - \frac{(ca')(bc')z}{xyv''w''} + \frac{b(bc')}{xuv''} + \frac{a'(ca')}{yu'w''}.$$

Unde tandem fit:

$$6)\quad \frac{(ab'c'')}{uu'u''} = \frac{1}{xyz} \quad \ldots\ldots\ldots\

$$7)\quad L = \frac{(ab'c'')}{(ab'c'')x-(b'c'')t-(b''c)t'-(bc')t''}\cdot \frac{(ab'c'')}{(ab'c'')y-(c''a)t'-(ca')t''-(c'a'')t}\cdot \frac{(ab'c'')}{(ab'c'')z-(ab')t''-(a'b'')t-(a''b)t'}\cdot$$

Ad quatuor pluresve variabiles haec extendere non lubet, cum iam pro tribus tam prolixa exstiterint. Progredimur ad alia.

4.

E theoremate 1. §. 2. fit:

$$1)\quad \frac{ab'-a'b}{(ax+by-t)(b'y+a'x-t')} = \frac{ab'-a'b}{(ab'-a'b)x-b't+bt'}\cdot\frac{ab'-a'b}{(ab'-a'b)y-at'+a't} - \frac{ab'-a'b}{(ab'-a'b)x-b't+bt'}\cdot\frac{b}{ax+by-t} - \frac{ab'-a'b}{(ab'-a'b)y-at'+a't}\cdot\frac{a'}{b'y+a'x-t'}\cdot$$

Porro obtinetur:

$$-\frac{1}{(ab'-a'b)x-b't+bt'}\cdot\frac{b}{ax+by-t} = \frac{1}{at'-a't-(ab'-a'b)y}\cdot\frac{ab'-a'b}{(ab'-a'b)x-b't+bt'} \frac{-1}{at'-a't-(ab'-a'b)y}\cdot\frac{a}{ax+by-t}\cdot$$

Quibus expressionibus, ut fieri debet, ad dignitates negativas ipsius x, positivas ipsius y evolutis, videmus,

$$\frac{1}{(ab'-a'b)x-b't+bt'}\cdot\frac{b}{ax+by-t}$$

non nisi positivas dignitates ipsius t',

$$\frac{1}{at'-a't-(ab'-a'b)y}\cdot\frac{1}{(ab'-a'b)x-b't+bt'}$$

et positivas et negativas ipsius t',

$$\frac{1}{at'-a't-(ab'-a'b)y}\cdot\frac{1}{ax+by-t}$$

nonnisi negativas dignitates ipsius t' cotinere. Unde

$$-\frac{ab'-a'b}{(ab'-a'b)x-b't+bt'}\cdot\frac{b}{ax+by-t} = \frac{ab'-a'b}{at'-a't-(ab'-a'b)y}\cdot\frac{ab'-a'b}{(ab'-a'b)x-b't+bt'},$$

rejectis, quae in evolutione huius expressionis inveniuntur, negativis ipsius t' dignitatibus. Pars autem, quae rejicitur, negativas ipsius t' dignitates continens, est:

$$\frac{ab'-a'b}{at'-a't-(ab'-a'b)y}\cdot\frac{a}{ax+by-t}.$$

Prorsus simili modo fit:

$$-\frac{ab'-a'b}{(ab'-a'b)y-at'+a't}\cdot\frac{a'}{b'y+a'x-t'}=$$
$$\frac{ab'-a'b}{b't-bt'-(ab'-a'b)x}\cdot\frac{ab'-a'b}{(ab'-a'b)y-at'+a't},$$

reiectis, quae in evolutione huius expressionis inveniuntur, negativis ipsius t dignitatibus. Unde iam e 1) nacti sumus, theorema curiosum, esse

$$2)\quad \frac{ab'-a'b}{(ax+by-t)(b'y+a'x-t')}=\frac{ab'-a'b}{(ab'-a'b)x-b't+bt'}\cdot\frac{ab'-a'b}{(ab'-a'b)y-at'+a't}$$
$$+\frac{ab'-a'b}{at'-a't-(ab'-a'b)y}\cdot\frac{ab'-a'b}{(ab'-a'b)x-b't+bt'}$$
$$+\frac{ab'-a'b}{b't-bt'-(ab'-a'b)x}\cdot\frac{ab'-a'b}{(ab'-a'b)y-at'+a't},$$

siquidem in evolutionibus harum expressionum, negativae, quae inveniuntur, ipsorum t, t' dignitates rejiciuntur.

5.

Generaliora adhuc sequenti modo eruis. Etenim serie utrinque infinita

$$\Sigma\frac{B^n}{A^{n+1}},$$

in qua numero integro n valores omnes tribuuntur a $-\infty$ ad $+\infty$, e notationis nostrae ratione designata per

$$\frac{1}{B-A}+\frac{1}{A-B},$$

ipsam quidem eiusmodi expressionem non pro evanescente habebimus; evanescet autem, ducta in $A-B$. Fit enim:

$$A\Sigma\frac{B^n}{A^{n+1}}=\Sigma\frac{B^n}{A^n},\quad B\Sigma\frac{B^n}{A^{n+1}}=\Sigma\frac{B^{n+1}}{A^{n+1}},$$

unde cum

$$\Sigma\frac{B^n}{A^n}=\Sigma\frac{B^{n+1}}{A^{n+1}},$$

fit etiam:

$$(A-B)\left(\frac{1}{A-B}+\frac{1}{B-A}\right)=0.$$

Hinc sequitur, fieri etiam:

$$1)\quad \frac{1}{C+m(A-B)}\left(\frac{1}{A-B}+\frac{1}{B-A}\right)=\frac{1}{C}\left(\frac{1}{A-B}+\frac{1}{B-A}\right).$$

Jam proposita expressione

$$\left(\frac{1}{ax+by-t}+\frac{1}{t-ax-by}\right)\cdot\left(\frac{1}{b'y+a'x-t'}+\frac{1}{t'-b'y-a'x}\right),$$

fit:

$$b'(ax+by-t) = (ab')x - b't + bt' + b(b'y + a'x - t'),$$

unde e 1) expressio proposita in hanc abit:

$$\left(\frac{b'}{(ab')x - b't + bt'} + \frac{b'}{b't - bt' - (ab')x}\right).\left(\frac{1}{b'y + a'x - t'} + \frac{1}{t' - b'y - a'x}\right).$$

Fit porro:

$$(ab')(b'y + a'x - t') = b'((ab')y - at' + a't) + a'((ab')x - b't + bt'),$$

unde rursus e 1) fit expressio proposita:

$$2)\quad (ab')\left(\frac{1}{ax+by-t} + \frac{1}{t-ax-by}\right).\left(\frac{1}{b'y+a'x-t'} + \frac{1}{t'-b'y-a'x}\right) =$$

$$\left(\frac{(ab')}{(ab')x - b't + bt'} + \frac{(ab')}{b't - bt' - (ab')x}\right).\left(\frac{(ab')}{(ab')y - at' + a't} + \frac{(ab')}{at' - a't - (ab')y}\right).$$

Quam etiam, uncis solutis, ita exhibere licet:

$$3)\quad \frac{1}{ax+by-t}\cdot\frac{(ab')}{b'y+a'x-t'} + \frac{1}{t-ax-by}\cdot\frac{(ab')}{t'-b'y-a'x} +$$

$$\frac{1}{ax+by-t}\cdot\frac{(ab')}{t'-b'y-a'x} + \frac{1}{t-ax-by}\cdot\frac{(ab')}{b'y+a'x-t'} =$$

$$\frac{(ab')}{(ab')x-b't+bt'}\cdot\frac{(ab')}{(ab')y-at'+a't} + \frac{(ab')}{b't-bt'-(ab')x}\cdot\frac{(ab')}{at'-a't-(ab')y} +$$

$$\frac{(ab')}{(ab')x-b't+bt'}\cdot\frac{(ab')}{at'-a't-(ab')y} + \frac{(ab')}{(ab')y-at'+a't}\cdot\frac{(ab')}{b't-bt'-(ab')x}.$$

E qua formula, reiectis ipsarum t, t' dignitatibus negativis, fluit formula 2) paragraphi antecedentis.

Formulam 3) etiam hunc in modum repraesentare licet:

$$4)\quad \Sigma\frac{t^m t'^n}{(ax+by)^{m+1}(b'y+a'x)^{n+1}} = \Sigma\frac{(b't-bt')^{\mu-1}(at'-a't)^{\nu-1}}{(ab'-a'b)^{\mu+\nu-1}x^\mu y^\nu},$$

designantibus m, n, μ, ν numeros omnes et positivos et negativos a $-\infty$ ad $+\infty$. Quam etiam proponere licet ut

Theorema 2.

Designantibus m, n numeros integros quoslibet sive positivos sive negativos, in expressione

$$\frac{1}{(ax+by)^{m+1}(b'y+a'x)^{n+1}}$$

coëfficientem termini $\frac{1}{x^\mu y^\nu}$ eundem nancisceris atque coëfficientem termini $t^m t'^n$ in expressione

$$\frac{1}{(ab'-a'b)^{\mu+\nu-1}}.(b't-bt')^{\mu-1}(at'-a't)^{\nu-1}.$$

Adnotare convenit, quoties m sit negativus, necessario etiam μ fieri

negativum, et vice versa, quoties μ sit positivus, necessario etiam m fieri positivum; eodemque modo, quoties n sit negativus, necessario etiam ν fieri negativum, et vice versa, quoties ν sit positivus, necessario etiam n fieri positivum; porro esse $m+n=\mu+\nu-2$. Observo, quoties m, n sint positivi, coëfficientes expressionis primae fieri series infinitas, secundae finitas; quoties m, n alter positivus, alter negativus, et primae et secundae expressionis coëfficientes fieri series finitas; quoties m, n negativi, primae fieri finitas, secundae series infinitas. Unde omnibus casibus hoc theoremate sive serierum infinitarum summationem, sive finitarum transformationem obtines.

Corollarium.

Evolvamus ipsum coëfficientem termini $\frac{1}{x^\mu y^\nu}$ in expressione

$$\frac{1}{(ax+by)^{m+1}(b'y+a'x)^{n+1}},$$

qui posito $\mu=m+1+\lambda$, $\nu=n+1-\lambda$, idem est atque coëfficiens termini $\left(\frac{y}{x}\right)^\lambda$ in expressione

$$\frac{1}{a^{m+1}b'^{n+1}}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{b}{a}\cdot\frac{y}{x}\right)^{m+1}\left(1+\frac{a'}{b'}\cdot\frac{x}{y}\right)^{n+1}}.$$

Quem coëfficientem, posito $\frac{ba'}{ab'}=u$, atque insuper

$$A=\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+\lambda)}{1.2\ldots\lambda}\cdot\frac{b^\lambda}{a^{m+1+\lambda}b'^{n+1}},$$

invenimus

$$(-1)^\lambda A\left(1+\frac{(m+\lambda+1)(n+1)}{\lambda+1.1}u+\frac{(m+\lambda+1)(m+\lambda+2)}{(\lambda+1)(\lambda+2)}\cdot\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}u^2+\ldots.\right).$$

Quaeramus porro coëfficientem termini $t^m t'^n$ in expressione

$$\frac{(b't-bt')^{\mu-1}(at'-a't)^{\nu-1}}{(ab'-a'b)^{\mu+\nu-1}}=\frac{(b't-bt')^{m+\lambda}(at'-a't)^{n-\lambda}}{(ab'-a'b)^{m+n+1}},$$

sive quod idem est, coëfficientem termini $\left(\frac{t'}{t}\right)^\lambda$ in expressione

$$\frac{1}{a^{m+\lambda+1}b'^{n-\lambda+1}(1-u)^{m+n+1}}\cdot\left(1-\frac{b}{b}\cdot\frac{t'}{t}\right)^{m+\lambda}\left(1-\frac{a'}{a}\cdot\frac{t}{t'}\right)^{n-\lambda},$$

quem, rursus posito

$$A=\frac{(m+\lambda)(m+\lambda-1)\ldots(m+1)}{1.2\ldots\lambda}\cdot\frac{b^\lambda}{a^{m+1+\lambda}b'^{n+1}},$$

facta evolutione, invenimus

$$\frac{(-1)^\lambda A}{(1-u)^{m+n+1}}\left(1+\frac{m(n-\lambda)}{\lambda+1}u+\frac{m(m-1)}{1.2}\cdot\frac{(n-\lambda)(n-\lambda-1)}{(\lambda+1)(\lambda+2)}u^2+\ldots.\right).$$

Unde cum e theoremate 2. utrique coëfficientes inter se aequales sint, posito

$$m+\lambda+1=\alpha,\quad n+1=\beta,\quad \lambda+1=\gamma,\quad m=-\alpha',\quad \lambda-n=\beta',$$

eruimus formulam:

$$5)\quad 1+\frac{\alpha\beta}{r}u+\frac{\alpha(\alpha+1).\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}u^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2).\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}u^3+\ldots.=$$
$$\frac{1}{(1-u)^{\alpha+\beta-\gamma}}\left(1+\frac{\alpha'\beta'}{\gamma}u+\frac{\alpha'(\alpha'+1).\beta'(\beta'+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}u^2+\frac{\alpha'(\alpha'+1)(\alpha'+2).\beta'(\beta'+1)(\beta'+2)}{1.2.3.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}u^3+\ldots.\right),$$

qua in formula $\alpha+\alpha'=\beta+\beta'=\gamma$. Quam olim **Eulerus** dedit.

6.

Similia de tribus variabilibus, tribusque factoribus inveniuntur sequenti modo. E formula 1) paragraphi antecedentis facile constat, fieri etiam:

$$1)\quad \frac{1}{E+m(A-B)+n(C-D)}\left(\frac{1}{A-B}+\frac{1}{B-A}\right)\left(\frac{1}{C-D}+\frac{1}{D-C}\right)$$
$$=\frac{1}{E}\left(\frac{1}{A-B}+\frac{1}{B-A}\right)\left(\frac{1}{C-D}+\frac{1}{D-C}\right),$$

porro:

$$2)\quad \frac{1}{C+m(A-B)}\cdot\frac{1}{D+n(A-B)}\left(\frac{1}{A-B}+\frac{1}{B-A}\right)=\frac{1}{CD}\left(\frac{1}{A-B}+\frac{1}{B-A}\right),$$

quas formulas ut lemmata antemittamus.

Jam e 2) paragraphi antecedentis, mutatis t, t' in $t-cz$, $t'-c'z$, obtines:

$$(ab')\left(\frac{1}{ax+by+cz-t}+\frac{1}{t-ax-by-cz}\right)\left(\frac{1}{b'y+c'z+a'x-t'}+\frac{1}{t'-b'y-c'z-a'x}\right)=$$
$$\left(\frac{(ab')}{(ab')x-(bc')z-b't+bt'}+\frac{(ab')}{b't-bt'-(ab')x+(bc')z}\right).$$
$$\left(\frac{(ab')}{(ab')y-(ca')z-at'+a't}+\frac{(ab')}{at'-a't-(ab')y+(ca')z}\right).$$

Ducatur haec aequatio in expressionem:

$$\frac{1}{c''z+a''x+b''y-t''}+\frac{1}{t''-c''z-a''x-b''y}.$$

Fit autem

$$(ab')(c''z+a''x+b''y-t'')=(ab'c'')z-(ab')t''-(a'b'')t-(a''b)t'$$
$$+a''((ab')x-(bc')z-b't+bt')$$
$$+b''((ab')y-(ca')z-at'+a't),$$

unde videmus, advocato lemmate 1), loco tertii factoris adiecti in altera aequationis parte adhiberi posse sequentem:

$$\frac{(ab')}{(ab'c'')z-(ab')t''-(a'b'')t-(a''b)t'}+\frac{(ab')}{(ab')t''+(a'b'')t+(a''b)t'-(a'b''c)z}.$$

Fit porro:

$$(ab'c'')[(ab')x-(bc')z-b't+bt'] =$$
$$(ab')[(ab'c'')x-(b'c'')t-(b''c)t'-(bc')t''] -$$
$$(bc')[(ab'c'')z-(ab')t''-(a'b'')t-(a''b)t'],$$

$$(ab'c'')[(ab')y-(ca')z-at'+a't] =$$
$$(ab')[(ab'c'')y-(c''a)t'-(ca')t''-(c'a'')t] -$$
$$(ca')[(ab'c'')z-(ab')t''-(a'b'')t-(a''b)t'].$$

Unde advocato lemmate 2), videmus post mutationem tertii factoris pro duobus primis factoribus, adhiberi posse hos:

$$\left(\frac{(ab'c'')}{(ab')[(ab'c'')x-(b'c'')t-(b''c)t'-(bc')t'']}+\frac{(ab'c'')}{(ab')[(b'c'')t+(b''c)t'+(bc')t''-(ab'c'')x]}\right).$$
$$\left(\frac{(ab'c'')}{(ab')[(ab'c'')y-(c''a)t'-(ca')t''-(c'a'')t]}+\frac{(ab'c'')}{(ab')[(c''a)t'+(ca')t''+(c'a'')t-(ab'c'')y]}\right).$$

Hinc tandem aequatio nostra in hanc abit:

$$3)\quad (ab'c'')\left(\frac{1}{ax+by+cz-t}+\frac{1}{t-ax-by-cz}\right).$$
$$\left(\frac{1}{b'y+c'z+a'x-t'}+\frac{1}{t'-b'y-c'z-a'x}\right).$$
$$\left(\frac{1}{c''z+a''x+b''y-t''}+\frac{1}{t''-c''z-a''x-b''y}\right) =$$
$$\left(\frac{(ab'c'')}{(ab'c'')x-(b'c'')t-(b''c)t'-(bc')t''}+\frac{(ab'c'')}{(b'c'')t+(b''c)t'+(bc')t''-(ab'c'')x}\right).$$
$$\left(\frac{(ab'c'')}{(ab'c'')y-(c''a)t'-(ca')t''-(c'a'')t}+\frac{(ab'c'')}{(c'a)t'+(ca')t''+(c'a'')t-(ab'c'')y}\right).$$
$$\left(\frac{(ab'c'')}{(ab'c'')z-(ab')t''-(a'b'')t-(a''b)t'}+\frac{(ab'c'')}{(ab')t''+(a'b'')t+(a''b)t'-(ab'c'')z}\right).$$

Positis, ut supra:

$ax+by+cz=u$, $a'x+b'y+c'z=u'$, $a''x+b''y+c''z$,

satisfaciant $x=p$, $y=q$, $z=r$ aequationibus $u=t$, $u'=t'$, $u''=t''$; quibus positis, formulam 3) brevius ita exhibere licet:

$$4)\quad (ab'c'')\left(\frac{1}{u-t}+\frac{1}{t-u}\right)\left(\frac{1}{u'-t'}+\frac{1}{t'-u'}\right)\left(\frac{1}{u''-t''}+\frac{1}{t''-u''}\right) =$$
$$\left(\frac{1}{x-p}+\frac{1}{p-x}\right)\left(\frac{1}{y-q}+\frac{1}{y-q}\right)\left(\frac{1}{z-r}+\frac{1}{r-z}\right),$$

siquidem adnotatur, $\frac{1}{u}$, $\frac{1}{w}$, $\frac{1}{u''}$ earumque dignitates respectivas ad descendentes ipsarum x, y, z, porro $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{q}$, $\frac{1}{r}$ earumque dignitates ad descendentes ipsarum t, t', t'' dignitates evolvendas esse.

Ubi in formula 4) eas tantum partes consideras, quae nonnisi positivas dignitates ipsarum t, t', t'' continent, fit

$$5)\quad \frac{(ab'c'')}{(u-t)(u'-t')(u''-t'')} =$$

$$\frac{1}{(x-p)(y-q)(z-r)}+\frac{1}{(p-x)(y-q)(z-r)}+\frac{1}{(x-p)(q-y)(z-r)}+\frac{1}{(x-p)(y-q)(r-z)}$$
$$+\frac{1}{(x-p)(q-y)(r-z)}+\frac{1}{(p-x)(y-q)(r-z)}+\frac{1}{(p-x)(q-y)(z-r)},$$

siquidem in hisce expressionibus, dictum in modum evolutis, reiiciuntur termini, qui negativas ipsarum t, t', t'' dignitates continent. Quae est repraesentatio nova septem partium, in quas expressio

$$\frac{(ab'c'')}{(u-t)(u'-t')(u''-t'')}$$

discerpitur. Cuius e. g. pars ea, quae nonnisi negativas dignitates omnium x, y, z continet, fit

$$\frac{1}{(x-p)(y-q)(z-r)},$$

sicuti invenimus formula 7) §. 3.

Formulam 3) etiam hunc in modum repraesentare licet:

$$6)\quad \Sigma\frac{t^m t'^n t''^p}{(ax+by+cz)^{m+1}(b'y+c'z+a'x)^{n+1}(c''z+a''x+b''y)^{p+1}} =$$
$$\Sigma\frac{[(b'c'')t+(b''c)t'+(bc')t'']^{\mu-1}[(c''a)t'+(ca')t''+(c'a'')t]^{\nu-1}[(ab')t''+(a'b'')t+(a''b)t']^{\pi-1}}{(ab'c'')^{\mu+\nu+\pi-1}x^\mu y^\nu z^\pi},$$

siquidem in summis designatis numeris integris m, n, p, μ, ν, π valores tribuuntur et positivi et negativi omnes a $-\infty$ ad $+\infty$. Quam formulam etiam proponere licet ut

Theorema 3.

Designantibus m, n, p numeros integros quoslibet sive positivos sive negativos, evoluta expressione

$$\frac{1}{(ax+by+cz)^{m+1}(b'y+c'z+a'x)^{n+1}(c''z+a''x+b''y)^{p+1}},$$

coëfficientem termini $\frac{1}{x^\mu y^\nu z^\pi}$ aequalem invenis coëfficienti termini $t^m t'^n t''^p$ in expressione

$$\frac{[(b'c'')t+(b''c)t'+(bc')t'']^{\mu-1}[(c''a)t'+(ca')t''+(c'a'')t]^{\nu-1}[(ab')t''+(a'b'')t+(a''b)t']^{\pi-1}}{(ab'c'')^{\mu+\nu+\pi-1}}.$$

Adnotare convenit, quoties m, n, p sint negativi, respective etiam μ, ν, π negativos fore, et vice versa, quoties μ, ν, π sint positivi, necessario etiam m, n, p respective positivos fore. Porro esse $m+n+p=\mu+\nu+\pi-3$.

Omnino similia theoremata de numero quolibet variabilium, quae §. 1. proposuimus, eruuntur.

7.

Commodam hoc loco inserere licet observationem. Consideremus expressionem:

$$(at+a't'+a''t'')^m(bt+b't'+b''t'')^n(ct+c't'+c''t'')^p.$$

Numerum factorum et variabilium eundem esse statuimus, qui in casu proposito est tres; eadem autem de numero alio quolibet valebunt. Statuamus porro, m, n, p esse integros positivos. Posito $\Pi x = 1.2.3....x$, constat per regulas notas evolutionis polynomii, expressione illa evoluta, fore coëfficientem termini $t^\mu t'^\nu t''^\pi$:

$$\frac{\Pi m\,\Pi n\,\Pi p}{\Pi\alpha\,\Pi\alpha'\,\Pi\alpha''.\Pi\beta\,\Pi\beta'\,\Pi\beta''.\Pi\gamma\,\Pi\gamma'\,\Pi\gamma''}.a^\alpha a'^{\alpha'} a''^{\alpha''}.b^\beta b'^{\beta'} b''^{\beta''}.c^\gamma c'^{\gamma'} c''^{\gamma''},$$

siquidem numeris integris positivis α, α', α'', β, β', β'', γ, γ', γ'' valores tribuuntur omnes, qui satisfaciunt aequationibus:

$$\alpha+\alpha'+\alpha''=m,\quad \beta+\beta'+\beta''=n,\quad \gamma+\gamma'+\gamma''=p,$$
$$\alpha+\beta+\gamma=\mu,\quad \alpha'+\beta'+\gamma'=\nu,\quad \alpha''+\beta''+\gamma''=\pi.$$

Iisdem positis, evoluta expressione

$$(at+bt'+ct'')^\mu(a't+b't'+c't'')^\nu(a''t+b''t'+c''t'')^\pi,$$

nanciscimur ut coëfficientem termini $t^m t'^n t''^p$ expressionem

$$\frac{\Pi\mu\,\Pi\nu\,\Pi\pi}{\Pi\alpha\,\Pi\beta\,\Pi\gamma.\Pi\alpha'\,\Pi\beta'\,\Pi\gamma'.\Pi\alpha''\,\Pi\beta''\,\Pi\gamma''}.a^\alpha b^\beta c^\gamma.a'^{\alpha'} b'^{\beta'} c'^{\gamma'}.a''^{\alpha''} b''^{\beta''} c''^{\gamma''}.$$

Qua cum priore comparata, invenitur, coëfficientes illos omnino inter se convenire, nisi quod loco $\Pi m\,\Pi n\,\Pi p$ in altero inveniatur $\Pi\mu\,\Pi\nu\,\Pi\pi$. Unde videmus, utrumque coëfficientem esse inter se ut $\Pi m\,\Pi n\,\Pi p$ ad $\Pi\mu\,\Pi\nu\,\Pi\pi$.

Ponamus iam, ipsis m, n, p valores quoslibet tribui, et evolvamus expressionem

$$(at+a't'+a''t'')^m(b't'+bt+b''t'')^n(c''t''+ct+c't')^p$$

ad descendentes dignitates ipsorum a, b', c'', sive quod idem est, factorem primum, secundum, tertium respective ad descendentes dignitates ipsorum t, t', t''. Quaeramus coëfficientem termini $t^\mu t'^\nu t''^\pi$, qui, ut omnino in evolutione illa inveniatur, sint $m-\mu$, $n-\nu$, $p-\pi$ numeri integri sive positivi sive negativi, necesse est. Adhibebo in sequentibus signum $\frac{\Pi m}{\Pi\mu}$ etiam casu, quo m, μ sunt quantitates quaelibet, quarum tamen

differentia est numerus integer, pro exprimendo producto $m(m-1)(m-2)\ldots$ $\ldots(\mu+1)$, quoties $m-\mu$ est positivum, sive $\frac{1}{(m+1)(m+2)\ldots\mu}$, quoties $\mu-m$ positivum est. Patet, si $m-u=\mu-v$, fore etiam

$$1) \quad \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-u)}{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-v)} = \frac{\Pi m}{\Pi n}.$$

Jam per regulas notas nanciscimur ut coëfficientem quaesitum in evolutione proposita expressionem:

$$\frac{m(m-1)\ldots(m+1-\alpha-\alpha')}{\Pi\alpha\,\Pi\alpha'}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n+1-\beta-\beta')}{\Pi\beta\,\Pi\beta'}\cdot\frac{p(p-1)\ldots(p+1-\gamma-\gamma')}{\Pi\gamma\,\Pi\gamma'}\cdot$$
$$a^{m-\alpha-\alpha'}a'^{\alpha}a''^{\alpha'}.b'^{n-\beta-\beta'}b''^{\beta}b^{\beta'}.c''^{p-\gamma-\gamma'}c^{\gamma}c'^{\gamma'},$$

siquidem numeris integris positivis α, α', β, β', γ, γ' tribuimus valores omnes, qui satisfaciunt aequationibus:

$$2) \quad m-\alpha-\alpha'+\beta'+\gamma=\mu, \quad n-\beta-\beta'+\gamma'+\alpha=\nu, \quad p-\gamma-\gamma'+\alpha'+\beta=\pi.$$

Modo simili, evoluta expressione

$$(at+bt'+ct'')^m(b't'+c't''+a't)^n(c''t''+a''t+b''t')^p,$$

nanciscimur ut coëfficientem termini $t^{\mu}t'^{\nu}t''^{\pi}$ expressionem

$$\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu+1-\beta'-\gamma)}{\Pi\beta'\,\Pi\gamma}\cdot\frac{\nu(\nu-1)\ldots(\nu+1-\gamma'-\alpha)}{\Pi\gamma'\,\Pi\alpha}\cdot\frac{\pi(\pi-1)\ldots(\pi+1-\alpha'-\beta)}{\Pi\alpha'\,\Pi\beta}\cdot$$
$$a^{\mu-\beta'-\gamma}b^{\beta}c^{\gamma}.b'^{\nu-\gamma'-\alpha}c'^{\gamma'}a'^{\alpha}.c''^{\pi-\alpha'-\beta}a''^{\alpha'}b''^{\beta},$$

designantibus α, α', β, β', γ, γ' numeros integros positivos omnes, qui satisfaciunt aequationibus:

$$\mu-\beta'-\gamma+\alpha+\alpha'=m, \quad \nu-\gamma'-\alpha+\beta+\beta'=n, \quad \pi-\alpha'-\beta+\gamma+\gamma'=p,$$

quae omnino eaedem sunt atque aequationes 2). Unde cum ex iisdem sit

$$\mu-\beta'-\gamma=m-\alpha-\alpha', \quad \nu-\gamma'-\alpha=n-\beta-\beta', \quad \pi-\alpha'-\beta=p-\gamma-\gamma',$$

utroque coëfficiente inter se comparato, videmus alterum ad alterum esse ut

$$1 \text{ ad } \frac{\Pi\mu}{\Pi m}\cdot\frac{\Pi\nu}{\Pi n}\cdot\frac{\Pi\pi}{\Pi p}.$$

Quaecum eodem modo se habeant de numero quolibet variabilium, nanciscimur

Theorema 4.

Sint m, n, p, ... quantitates quaelibet, $m-\mu$, $n-\nu$, $p-\pi$, ... numeri integri positivi vel negativi, porro $m+n+p+\ldots=\mu+\nu+\pi\ldots$; expressionibus

$$(at+a't'+a''t''+\ldots.)^m(b't'+bt+b''t''+\ldots.)^n(c''t''+ct+c't'+\ldots.)^p\ldots.,$$
$$(at+bt'+ct''+\ldots.)^{\mu}(b't'+a't+c't''+\ldots.)^{\nu}(c''t''+a''t+b''t'+\ldots.)^{\pi}\ldots.,$$

in quibus supponimus eundem esse numerum factorum et variabilium t, t', t'', ..., ad dignitates descendentes ipsarum a, b', c'', ..., sive quod idem est, factoribus earum primo, secundo, tertio, etc. respective ad dignitates descendentes ipsarum t, t', t'', ... evolutis, coëfficiens termini $t^{\mu}t'^{\nu}t''^{\pi}....$ in priore fit ad coëfficientem termini $t^{m}t'^{n}t''^{p}....$ in posteriore ut

$$1 \text{ ad } \frac{\Pi\mu}{\Pi m}\cdot\frac{\Pi\nu}{\Pi n}\cdot\frac{\Pi\pi}{\Pi p}....$$

8.

E theoremate 4) modo proposito, theoremata 2), 3), ubi insuper loco t, t', t'', ... ponitur x, y, z, in sequentia abeunt:

Theorema 5.

Coëfficiens termini $\frac{1}{x^{\mu}y^{\nu}}$ in expressione

$$\frac{1}{(ax+by)^{m+1}}\cdot\frac{1}{(b'y+a'x)^{n+1}},$$

aequalis est ipsi

$$\frac{\Pi(\mu-1)}{\Pi m}\cdot\frac{\Pi(\nu-1)}{\Pi n}\cdot\frac{1}{(ab'-a'b)^{m+n+1}}$$

ducto in coëfficientem termini $x^{\mu-1}y^{\nu-1}$ expressionis

$$(b'x-a'y)^{m}(ay-bx)^{n}.$$

Theorema 6.

Coëfficiens termini $\frac{1}{x^{\mu}y^{\nu}z^{\pi}}$ in expressione

$$\frac{1}{(ax+by+cz)^{m+1}}\cdot\frac{1}{(b'y+c'z+a'x)^{n+1}}\cdot\frac{1}{(c''z+a''x+b''y)^{p+1}}$$

aequalis est ipsi

$$\frac{\Pi(\mu-1)}{\Pi m}\cdot\frac{\Pi(\nu-1)}{\Pi n}\cdot\frac{\Pi(\pi-1)}{\Pi p}\cdot\frac{1}{(ab'c'')^{m+n+p+1}},$$

ducto in coëfficientem termini $x^{\mu-1}y^{\nu-1}z^{\pi-1}$ expressionis

$$[(b'c'')x+(c'a'')y+(a'b'')z]^{m}[(c''a)y+(a''b)z+(b''c)x]^{n}[(ab')z+(bc')x+(ca')y]^{p}.$$

Corollarium.

Designemus coëfficientem termini $\left(\frac{y}{x}\right)^{\lambda}$ in expressione

$$\frac{1}{\left[\left(a+b.\frac{y}{x}\right)\left(b'+a'\frac{x}{y}\right)\right]^{n+1}}$$

per P_{λ}; porro coëfficientem termini $\left(\frac{x}{y}\right)^{\lambda}$ in expressione

$$\left[\left(b'-a'.\frac{y}{x}\right)\left(a-b\,\frac{x}{y}\right)\right]^n$$

per Q_λ; ubi in theoremate 5) ponimus $m=n$, $\mu=n+1+\lambda$, $\nu=n+1-\lambda$, videmus fieri

$$1)\quad P_\lambda = \frac{\Pi(n+\lambda)\,\Pi(n-\lambda)}{\Pi n\,.\,\Pi n\,.\,(ab')^{2n+1}}\,Q_\lambda.$$

Porro posito $\frac{y}{x}=e^{i\varphi}$, $a=b'=1$, $b=a'=-\alpha$, ubi supponimus $\alpha<1$, facile constat, esse:

$$\frac{1}{(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha\alpha)^{n+1}} = P_0+2P_1\cos\varphi+2P_2\cos 2\varphi+\ldots+2P_\lambda\cos\lambda\varphi+\ldots$$

$$(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha\alpha)^n = Q_0+2Q_1\cos\varphi+2Q_2\cos 2\varphi+\ldots+2Q_\lambda\cos\lambda\varphi+\ldots$$

Unde e notissimis calculi integralis praeceptis:

$$P_\lambda = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\partial\varphi\,.\cos\lambda\varphi}{(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha\alpha)^{n+1}},$$

$$Q_\lambda = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \partial\varphi\,(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha\alpha)^n\cos\lambda\varphi.$$

Quibus substitutis in aequationem 1), obtinemus:

$$2)\int_0^\pi \frac{\partial\varphi\,.\cos\lambda\varphi}{(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha\alpha)^{n+1}} = \frac{\Pi(n+\lambda)\,\Pi(n-\lambda)}{\Pi n\,\Pi n}\int_0^\pi \frac{\partial\varphi\cos\lambda\varphi\,(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha\alpha)^n}{(1-\alpha\alpha)^{2n+1}}.$$

Quae olim ab Eulero inventa est formula.

30.

Über die Relationen der Functionen, welche der Gleichung $F_1 y . \varphi_1 x + F_2 y . \varphi_2 x \ldots . + F_n y . \varphi_n x = F_1 x . \varphi_1 y + F_2 x . \varphi_2 y \ldots . + F_n x . \varphi_n y$ genugthun.

(Von Herrn *L. J. Magnus* zu Berlin.)

In der 41. Abhandlung des 2. Bandes dieses Journals hat Herr Abel, indem er die Functionen bestimmte, welche der Gleichung $\varphi x + \varphi y = \psi(x f y + y f x)$ genugthun, ein Verfahren angegeben, wie man in jeder Gleichung mit zwei unabhängig veränderlichen Gröfsen die unbekannten Functionen finden kann. Dieses Verfahren ist in der That allgemein anwendbar, aber man wird zugeben, dafs es auf sehr ermüdende Rechnungen führen kann, wenn die gegebene Gleichung eine gröfsere Anzahl unbekannter Functionen enthält. Ich will in dem Folgenden einige Gleichungen aufstellen, welche dazu dienen können, die Lösung der in Rede stehenden Aufgabe in den meisten Fällen bedeutend zu erleichtern. Diese Gleichungen haben mit denen, welche Herr Professor Jacobi in seiner schönen Abhandlung über die Pfaffsche Integrations-Methode, ebenfalls im zweiten Bande dieses Journals mitgetheilt hat, eine auffallende Ähnlichkeit.

1.

Es sei

$$1)\quad F_1 y . \varphi_1 x + F_2 y . \varphi_2 x + F_3 y . \varphi_3 x + \ldots . + F_n y . \varphi_n x = F_1 x . \varphi_1 y + F_2 x . \varphi_2 y + F_3 x . \varphi_3 y + \ldots . + F_n x . \varphi_n y$$

eine gegebene symmetrische Gleichung mit zwei unabhängig veränderlichen Gröfsen x und y. Wir wollen diejenigen Relationen zwischen den Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots . \varphi_n$ und $F_1, F_2, \ldots . F_n$ suchen, welche Statt finden müssen, damit diese Gleichung bestehen kann. Das nächste Mittel zur Lösung, welches sich darbietet, besteht darin, die Gleichung in n zweigliedrige Gleichungen zu theilen, in welchen sich die Variabeln separiren lassen. Man könnte z. B.

$F_1 y . \varphi_1 x = F_1 x . \varphi_1 y;\ F_2 y . \varphi_2 x = F_2 x . \varphi_2 y;\ \ldots . \ F_n y . \varphi_n x = F_n x . \varphi_n y$

setzen, und aus diesen würde man durch Division

$$\frac{\varphi_1 x}{F_1 x} = \frac{\varphi_1 y}{F_1 y};\quad \frac{\varphi_2 x}{F_2 x} = \frac{\varphi_2 y}{F_2 y};\quad \ldots\ldots\quad \frac{\varphi_n x}{F_n x} = \frac{\varphi_n y}{F_n y}$$

erhalten, welche Gleichungen wegen der Unabhängigkeit von x und y nur Statt haben können, wenn

$$\frac{\varphi_1 x}{F_1 x} = c';\quad \frac{\varphi_2 x}{F_2 x} = c'';\quad \ldots\ldots\quad \frac{\varphi_n x}{F_n x} = c^{(n)}$$

ist, wo c', c'', $\ldots\ldots$ $c^{(n)}$ n willkürliche Constanten bedeuten. Diese Lösung ist aber nur eine singuläre, und da wir noch nicht wissen, aus wie vielen Gleichungen die vollständige Lösung besteht, und wie viele willkürliche Constanten dazu gehören, so bleibt uns nichts übrig als von dem Falle einer zweigliedrigen Gleichung

$$2.\quad F_1y.\varphi_1x = F_1x.\varphi_1y,$$

deren vollständige Lösung durch

$$3.\quad \varphi_1x = c_1F_1x$$

ausgedrückt wird, zu dem Falle einer viergliedrigen fortzugehen.

2.

Dividirt man die viergliedrige Gleichung

$$4.\quad F_1y.\varphi_1x + F_2y.\varphi_2x = F_1x.\varphi_1y + F_2x.\varphi_2y$$

durch $F_2y\,F_2x$, so kommt:

$$\frac{F_1 y}{F_2 y}\cdot\frac{\varphi_1 x}{F_2 x} + \frac{\varphi_2 x}{F_2 x} = \frac{F_1 x}{F_2 x}\cdot\frac{\varphi_1 y}{F_2 y} + \frac{\varphi_2 y}{F_2 y},$$

und differentiirt man nun nach x, so erhält man:

$$\frac{F_1 y}{F_2 y}\,\partial\frac{\varphi_1 x}{F_2 x} + \partial\frac{\varphi_2 x}{F_2 x} = \frac{\varphi_1 y}{F_2 y}\,\partial\frac{F_1 x}{F_2 x};$$

diese Gleichung aber nach y differentiirt, giebt:

$$\partial\frac{F_1 y}{F_2 y}\,\partial\frac{\varphi_1 x}{F_2 x} = \partial\frac{F_1 x}{F_2 x}\,\partial\frac{\varphi_1 y}{F_2 y},$$

wo, der Kürze wegen, die Differential-Coëfficienten $\frac{\partial\frac{F_1x}{F_2x}}{\partial x}$, $\frac{\partial\frac{F_1y}{F_2y}}{\partial y}$, etc. durch $\partial\frac{F_1x}{F_2x}$, $\partial\frac{F_1y}{F_2y}$ etc. bezeichnet sind. Die zuletzt erhaltene Gleichung ist aber nur zweigliedrig und hat die Form (2.); daher ist

$$\partial\frac{\varphi_1 x}{F_2 x} = c_1\,\partial\frac{F_1 x}{F_2 x},$$

und durch Integration ergiebt sich

$$\frac{\varphi_1 x}{F_2 x} = c_1\frac{F_1 x}{F_2 x} + c_{1,2}\quad\text{oder}\quad \varphi_1 x = c_1F_1x + c_{1,2}F_2x,$$

wo wir der, durch die Integration hinzugekommenen Constante einen

doppelten Index geben. Setzt man für $\varphi_1 x$ den eben gefundenen Werth, und für $\varphi_1 y$ den entsprechenden, nämlich $c_1 F_1 + c_{1,2} F_2 y$, so verwandelt sich die Gleichung (4.) in

$$c_{1,2} F_1 y . F_2 x + F_2 y . \varphi_2 x = c_{1,2} F_1 x . F_2 y + F_2 x . \varphi_2 y,$$

oder in

$$F_2 y [\varphi_2 x - c_{1,2} F_1 x] = F_2 x [\varphi_2 y - c_{1,2} F_1 y],$$

wiederum eine zweigliedrige Gleichung von der Form (2.), aus welcher also

$$\varphi_2 x - c_{1,2} F_1 x = c_2 F_2 x$$

folgt. Man hat daher zur vollständigen Lösung der Gleichung (4.) das System der beiden Gleichungen:

$$5. \quad \begin{cases} \varphi_1 x = c_1 F_1 x + c_{1,2} F_2 x, \\ \varphi_2 x = c_{1,2} F_1 x + c_2 F_2 x. \end{cases}$$

3.

Dividirt man die sechsgliedrige Gleichung

$$6. \quad F_1 y . \varphi_1 x + F_2 y . \varphi_2 x + F_3 y . \varphi_3 x = F_1 x . \varphi_1 y + F_2 x . \varphi_2 y + F_3 x . \varphi_3 y$$

durch $F_3 x F_3 y$, so kommt:

$$\frac{F_1 y}{F_3 y} \cdot \frac{\varphi_1 x}{F_3 x} + \frac{F_2 y}{F_3 y} \cdot \frac{\varphi_2 x}{F_3 x} + \frac{\varphi_3 x}{F_3 x} = \frac{F_1 x}{F_3 x} \cdot \frac{\varphi_1 y}{F_3 y} + \frac{F_2 x}{F_3 x} \cdot \frac{\varphi_2 y}{F_3 y} + \frac{\varphi_3 y}{F_3 y},$$

und differentiirt man diese Gleichung nach einander nach x und nach y, so ergiebt sich

$$\partial \frac{F_1 y}{F_3 y} \partial \frac{\varphi_1 x}{F_3 x} + \partial \frac{F_2 y}{F_3 y} \partial \frac{\varphi_2 x}{F_3 x} = \partial \frac{F_1 x}{F_3 x} \partial \frac{\varphi_1 y}{F_3 y} + \partial \frac{F_2 x}{F_3 y} \partial \frac{\varphi_2 y}{F_3 y}.$$

Dieses ist eine viergliedrige Gleichung von der Form (4.), daher ist nach den Gleichungen (5.):

$$\partial \frac{\varphi_1 x}{F_3 x} = c_1 \partial \frac{F_1 x}{F_3 x} + c_{1,2} \partial \frac{F_2 x}{F_3 x},$$

$$\partial \frac{\varphi_2 x}{F_3 x} = c_{1,2} \partial \frac{F_1 x}{F_3 x} + c_2 \partial \frac{F_2 x}{F_3 x},$$

und wenn man integrirt:

$$\frac{\varphi_1 x}{F_3 x} = c_1 \frac{F_1 x}{F_3 x} + c_{1,2} \frac{F_2 x}{F_3 x} + c_{1,3},$$

$$\frac{\varphi_2 x}{F_3 x} = c_{1,2} \frac{F_1 x}{F_3 x} + c_2 \frac{F_2 x}{F_3 x} + c_{2,3},$$

oder

$$\varphi_1 x = c_1 F_1 x + c_{1,2} F_2 x + c_{1,3} F_3 x,$$

$$\varphi_2 x = c_{1,2} F_1 x + c_2 F_2 x + c_{2,3} F_3 x.$$

Setzt man diese Werthe für φ_1 und φ_2 in die Gleichung (6.), so ergiebt sich:

$c_{1,3} F_1 y . F_3 x + c_{2,3} F_2 y . F_3 x + F_3 y . \varphi_3 x = c_{1,3} F_1 x . F_3 y + c_{2,3} F_2 x . F_3 y + F_3 x . \varphi_3 y$
oder

$$F_3 y . [\varphi_3 x - c_{1,3} F_1 x - c_{2,3} F_2 x] = F_3 x . [\varphi_3 y - c_{1,3} F_1 y - c_{2,3} F_2 y],$$

eine zweigliedrige Gleichung, aus welcher

$$\varphi_3 x - c_{1,3} F_1 x - c_{2,3} F_2 x = c_3 F_3 x$$

folgt. Die vollständige Lösung der Gleichung (6.) besteht also in dem Systeme der 3 Gleichungen

$$7. \quad \begin{cases} \varphi_1 x = c_1 F_1 x + c_{1,2} F_2 x + c_{1,3} F_3 x, \\ \varphi_2 x = c_{1,2} F_1 x + c_2 F_2 x + c_{2,3} F_3 x, \\ \varphi_3 x = c_{1,3} F_1 x + c_{2,3} F_2 x + c_3 F_3 x. \end{cases}$$

4.

Dividirt man die achtgliedrige Gleichung

$$8. \quad F_1 y . \varphi_1 x + F_2 y . \varphi_2 x + F_3 y . \varphi_3 x + F_4 y . \varphi_4 x = F_1 x . \varphi_1 y + F_2 x . \varphi_2 y + F_3 x . \varphi_3 y + F_4 x . \varphi_4 y$$

durch $F_4 x F_4 y$ und differentiirt das Resultat nach einander nach x und nach y, so erhält man eine sechsgliedrige Gleichung von der Form (6.), und daraus die Werthe von $\partial \frac{\varphi_1 x}{F_4 x}$, $\partial \frac{\varphi_2 x}{F_4 x}$, $\partial \frac{\varphi_3 x}{F_4 x}$, welche integrirt, geben:

$$\begin{aligned} \varphi_1 x &= c_1 F_1 x + c_{1,2} F_2 x + c_{1,3} F_3 x + c_{1,4} F_4 x, \\ \varphi_2 x &= c_{1,2} F_1 x + c_2 F_2 x + c_{2,3} F_3 x + c_{2,4} F_4 x, \\ \varphi_3 x &= c_{1,3} F_1 x + c_{2,3} F_2 x + c_3 F_3 x + c_{3,4} F_4 x, \end{aligned}$$

wo $c_{1,4}$, $c_{2,4}$, $c_{3,4}$ die durch die letzte Integration hinzugekommenen Constanten bedeuten. Substituirt man diese Werthe für φ_1, φ_2, φ_3 in die Gleichung (8.), so ergiebt sich die zweigliedrige Gleichung

$$\begin{aligned} & F_4 y . [\varphi_4 x - c_{1,4} F_1 x - c_{2,4} F_2 x - c_{3,4} F_3 x] \\ = & F_4 x . [\varphi_4 y - c_{1,4} F_1 y - c_{2,4} F_2 y - c_{3,4} F_3 y], \end{aligned}$$

aus welcher

$$\varphi_4 x - c_{1,4} F_1 x - c_{2,4} F_2 x - c_{3,4} F_3 x = c_4$$

folgt, und die vollständige Lösung der Gleichung (8.) besteht somit in dem System der 4 Gleichungen:

$$9. \quad \begin{cases} \varphi_1 x = c_1 F_1 x + c_{1,2} F_2 x + c_{1,3} F_3 x + c_{1,4} F_4 x, \\ \varphi_2 x = c_{1,2} F_1 x + c_2 F_2 x + c_{2,3} F_3 x + c_{2,4} F_4 x, \\ \varphi_3 x = c_{1,3} F_1 x + c_{2,3} F_2 x + c_3 F_3 x + c_{3,4} F_4 x, \\ \varphi_4 x = c_{1,4} F_1 x + c_{2,4} F_2 x + c_{3,4} F_3 x + c_4 F_4 x, \end{cases}$$

Ohne Gleichungen mit noch mehreren Gliedern vorzunehmen, sieht man jetzt deutlich, dafs die vollständige Lösung der Gleichung (1.) von $2n$ Gliedern in einem Systeme von n Gleichungen, nämlich:

$$B. \quad \begin{cases} \varphi_1 x = c_1 F_1 x + c_{1,2} F_2 x + c_{1,3} F_3 x + c_{1,4} F_4 x + \ldots . + c_{1,n} F_n x, \\ \varphi_2 x = c_{1,2} F_1 x + c_2 F_2 x + c_{2,3} F_3 x + c_{2,4} F_4 x + \ldots . + c_{2,n} F_n x, \\ \varphi_3 x = c_{1,3} F_1 x + c_{2,3} F_2 x + c_3 F_3 x + c_{3,4} F_4 x + \ldots . + c_{3,n} F_n x, \\ \varphi_4 x = c_{1,4} F_1 x + c_{2,4} F_2 x + c_{3,4} F_3 x + c_4 F_4 x + \ldots . + c_{4,n} F_n x, \\ \vdots \\ \varphi_n x = c_{1,n} F_1 x + c_{2,n} F_2 x + c_{3,n} F_3 x + c_{4,n} F_4 x + \ldots . + c_n F_n x, \end{cases}$$

bestehen mufs; und die Vervollständigung des Beweises für die Richtigkeit des Gesetzes dadurch, dafs man zeigt, es müsse dasselbe für eine Gleichung der angegebenen Form von $2n$ Gliedern Statt finden, wenn es für eine solche Gleichung von $2(n-1)$ Gliedern gilt, hat keine weitere Schwierigkeit.

Jede einzelne Gleichung des Systems (*B.*) enthält n von einander unabhängige Constanten; das ganze System aber enthält deren in allem $\frac{n(n+1)}{2}$. Die Horizontalreihen, welche von diesen Constanten gebildet werden, sind den von ihnen formirten Verticalreihen gleich, und die nur einmal vorkommenden Constanten machen daher eine Diagonalreihe aus.

Es ist fast überflüssig zu bemerken, dafs unsere Lösung auch für den Fall pafst, wenn die gegebene Gleichung Glieder ohne x und ohne y enthält, wie z. B. die Gleichung

$$F_1 y . \varphi_1 x + F_2 y . \varphi_2 x + \varphi_3 x = F_1 x . \varphi_1 y + F_2 x . \varphi_2 y + \varphi_3 y.$$

Denn diese Gleichung entsteht aus der Gleichung (6.), wenn man darin $F_3 x = F_3 y = 1$ setzt, und durch dieselbe Substitution verwandeln sich die Gleichungen (7.) in

$$\begin{aligned} \varphi_1 x &= c_1 F_1 x + c_{1,2} F_2 x + c_{1,3}, \\ \varphi_2 x &= c_{1,2} F_1 x + c_2 F_2 x + c_{2,3}, \\ \varphi_3 x &= c_{1,3} F_1 x + c_{2,3} F_2 x + c_3. \end{aligned}$$

5.

Wir wollen jetzt einige Anwendungen der aufgestellten Gleichungen zeigen.

1. Es seien zuerst die Functionen ψ, f_1 und f_2 zu bestimmen, welche der Gleichung

$$10. \quad \psi(x+y) = f_1 y . f_2 x + f_2 y . f_1 x$$

genugthun.

Differentiirt man diese Gleichung sowohl nach x als nach y, so erhält man, die Differential-Coëfficienten von ψ, f_1 und f_2 durch ψ', f_1', f_2' bezeichnend:

$$\psi'(x+y) = f_1 y f_2' x + f_2 y f_1' x,$$
$$\psi'(x+y) = f_1' y f_2 x + f_2' y f_1 x,$$

und wenn man $\psi'(x+y)$ eliminirt,

$$f_1 y . f_2' x + f_2 y . f_1' x = f_1 x . f_2' y + f_2 x . f_1' y$$

eine viergliedrige Gleichung von der Form (1.). Sollen nun die Gröfsen x und y von einander unabhängig sein, so müssen die Gleichungen (5.) Statt finden, und wenn man, um diese auf den gegenwärtigen Fall anzuwenden, für φ_1, φ_2, F_1 und F_2 respective f_2', f_1', f_1 und f_2 setzt, und, der Leichtigkeit wegen, c_1, $c_{1,2}$, c_2 mit a^2, b^2, c^2 vertauscht, so hat man unmittelbar:

$$f_2' x = a^2 f_1 x + b^2 f_2 x,$$
$$f_1' x = b^2 f_1 x + c^2 f_2 x:$$

zwei gleichzeitige Differential-Gleichungen, welche hinreichend sind, die Functionen f_1 und f_2 zu bestimmen. Führt man die Integration nach der bekannten Methode aus, so ergiebt sich

$$11. \quad \begin{cases} f_1 x = & h e^{m_1 x} + k e^{m_2 x} \\ f_2 x = \alpha [h e^{m_1 x} - & k e^{m_2 x}], \end{cases}$$

wenn wir nämlich $b^2 + ac$ durch m_1, $b^2 - ac$ durch m_2, $\frac{a}{c}$ durch α und zwei neue Constanten durch h und k bezeichnen.

Setzt man, um ψ zu bestimmen, in (10.) $y = 0$, so kommt

$$\psi(x) = f_1(0) f_2 x + f_2(0) f_1 x,$$

und da aus (11.) $f_1(0) = h + k$ und $f_2 0 = \alpha(h - k)$ folgt, so ist

$$12. \quad \psi(x) = 2\alpha [h^2 e^{m_1 x} - k^2 e^{m_2 x}].$$

2. Es seien ferner die Functionen f_1, f_2 und ψ zu bestimmen, welche der Gleichung

$$13. \quad \psi(x+y) = f_1 y f_1 x + f_2 y f_2 x$$

genugthun.

Differentiirt man und eliminirt $\psi'(x+y)$, so erhält man

$$f_1 y . f_1' x + f_2 y . f_2' x = f_1 x . f_1' y + f_2 x . f_2' y,$$

und unsere Gleichungen (5.) geben, auf den gegenwärtigen Fall angewendet, unmittelbar:

$$f_1' x = a f_1 x + b f_2 x,$$
$$f_2' x = b f_1 x + c f_2 x,$$

wenn man statt c_1, $c_{1,2}$, c_2 die Buchstaben a, b, c schreibt. Die Integration dieser beiden gleichzeitigen Differentialgleichungen giebt

$$14. \quad \begin{cases} f_1 x = h e^{m_1 x} + k e^{m_2 x}, \\ f_2 x = \alpha h e^{m_1 x} + \frac{1}{\alpha} k e^{m_2 x}, \end{cases}$$

wo α eine Wurzel der Gleichung $b\alpha^2 + (a+c)\alpha - b = 0$, m_1 und m_2 die Werthe des Ausdrucks $a + b\alpha$ bezeichnen, die man erhält, wenn diese und die andere Wurzel jener Gleichung für α gesetzt werden, und wo h und k zwei neue Constanten bedeuten. Aus (13. u. 14.) findet man:

$$15. \quad \psi(x) = (1+\alpha^2)\left(h^2 e^{m_1 x} + \frac{1}{\alpha^2} k^2 e^{m_2 x}\right).$$

3. Es seien die Functionen $f_1, f_2, \ldots . f_n$ zu bestimmen, welche der Gleichung

$$16. \quad \psi(x+y) = f_n y . f_1 x + f_{n-1} y . f_2 x + f_{n-2} y . f_3 x + \ldots . + f_2 y . f_{n-1} x + f_1 y . f_n x$$

genugthun.

Differentiirt man und eliminirt $\psi'(x+y)$, so kommt

$$f_n y . f_1' x + f_{n-1} y . f_2' x + f_{n-2} y . f_3' x + \ldots . + f_1 y . f_n' x$$
$$= f_n x . f_1' y + f_{n-1} x . f_2' y + f_{n-2} x . f_3' y + \ldots . + f_1 x . f_n' y.$$

Obgleich nun die Anzahl der zu findenden Functionen unbestimmt gelassen ist, so läfst sich doch vermittelst der Gleichungen (*B.*) ihre Form finden. Denn diese geben für den gegenwärtigen Fall:

$$\begin{aligned} f_1' x &= c_1 f_n x + c_{1,2} f_{n-1} x + \ldots . + c_{1,n} f_1 x, \\ f_2' x &= c_{1,2} f_n x + c_2 f_{n-1} x + \ldots . + c_{2,n} f_1 x, \\ &\vdots \\ f_n' x &= c_{1,n} f_n x + c_{2,n} f_{n-1} x + \ldots . + c_n f_1 x, \end{aligned}$$

aus welchen, durch Integration, für fx die Form

$$C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + \ldots . + C_n e^{m_n x}$$

gefunden wird.

6.

Wenn man erstens $\sin\alpha$ durch $\varphi\alpha$ und $\cos\alpha = \frac{\partial \sin\alpha}{\partial \alpha}$ durch $\varphi'\alpha$ bezeichnet, so ist

$$\varphi(\alpha+\beta) = \frac{\varphi\alpha . \varphi'\beta + \varphi\beta . \varphi'\alpha}{R} \text{ und } \varphi(\alpha-\beta) = \frac{\varphi\alpha . \varphi'\beta - \varphi\beta . \varphi'\alpha}{R},$$

wenn $R = 1$ ist. Wenn man zweitens $\int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-c^2x^2).(1+e^2x^2)]}}$ durch α, x aber durch $\varphi\alpha$ bezeichnet, so hat man ebenfalls:

$$\varphi(\alpha+\beta) = \frac{\varphi\alpha . \varphi'\beta + \varphi\beta . \varphi'\alpha}{R} \text{ und } \varphi(\alpha-\beta) = \frac{\varphi\alpha . \varphi'\beta - \varphi\beta . \varphi'\alpha}{R},$$

wenn nämlich $R = 1 + e^2 c^2 \varphi^2\alpha . \varphi^2\beta$ ist *).

*) Wegen der letztern Gleichungen kann man Herrn Abel's vortreffliche Abhandlung „*Recherches sur les fonctions elliptiques*" im zweiten Bande dieses Journals p. 101. nachsehen.

Wir wollen untersuchen, ob es aufser der erwähnten circulairen und elliptischen Function $\varphi\alpha$ noch andere Functionen giebt, welche die Eigenschaft haben, dafs bei ihnen die beiden genannten Gleichungen, oder noch allgemeiner die Gleichungen

$$\varphi(\alpha+\beta)=\frac{F\alpha.f\beta+F\beta.f\alpha}{\varrho(\alpha_1\beta)} \quad \text{und} \quad \varphi(\alpha-\beta)=\frac{F\alpha.f\beta-F\beta.f\alpha}{\varrho(\alpha_1\beta)}$$

zu gleicher Zeit Statt finden.

Zu dem Ende dividiren wir beide Gleichungen durch einander; dann kommt:

$$\frac{\varphi(\alpha+\beta)}{\varphi(\alpha-\beta)}=\frac{F\alpha.f\beta+F\beta.f\alpha}{F\alpha.f\beta-F\beta.f\alpha}, \quad \text{oder} \quad \frac{\varphi(\alpha+\beta)}{\varphi(\alpha-\beta)}=\frac{\frac{f\alpha}{F\alpha}+\frac{f\beta}{F\beta}}{\frac{f\alpha}{F\alpha}-\frac{f\beta}{F\beta}},$$

und wenn wir $\frac{f\beta}{F\beta}$ durch $\psi\beta$ bezeichnen:

$$\frac{\varphi(\alpha+\beta)}{\varphi(\alpha-\beta)}=\frac{\psi\alpha+\psi\beta}{\psi\alpha-\psi\beta}.$$

Setzt man nun $\alpha+\beta=x$ und $\alpha-\beta=y$, und entwickelt $\psi\left(\frac{x+y}{2}\right)$, so kommt:

$$\psi\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{\varphi x+\varphi y}{\varphi x-\varphi y}.\psi\left(\frac{x-y}{2}\right),$$

oder, $\frac{\varphi x+\varphi y}{\varphi x-\varphi y}$ durch a bezeichnend:

$$\psi\left(\frac{x+y}{2}\right)=a\psi\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Wir differentiiren diese Gleichung nun nach x und nach y; dies giebt:

$$\psi'\left(\frac{x+y}{2}\right)=\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right).\psi\left(\frac{x-y}{2}\right)+a.\psi'\left(\frac{x-y}{2}\right),$$
$$\psi'\left(\frac{x+y}{2}\right)=\left(\frac{\partial a}{\partial y}\right).\psi\left(\frac{x-y}{2}\right)-a.\psi'\left(\frac{x-y}{2}\right),$$

woraus, wenn man $\psi'\left(\frac{x+y}{2}\right)$ eliminirt,

$$\left[\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial a}{\partial y}\right)\right].\psi\left(\frac{x-y}{2}\right)+2a.\psi'\left(\frac{x-y}{2}\right)=0,$$

oder, wenn durch $\psi'\left(\frac{x-y}{2}\right)$ dividirt und $\frac{\psi\left(\frac{x-y}{2}\right)}{2\psi'\left(\frac{x-y}{2}\right)}$ durch $\pi(x-y)$ bezeichnet wird:

$$\pi(x-y)=\frac{\left(\frac{\partial a}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)}{a}$$

folgt. Differentiirt man diese Gleichung wieder nach x und nach y, so kommt

$$\pi(x-y) = \frac{a.\left[\left(\frac{\partial^2 a}{\partial y\,\partial x}\right)-\left(\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}\right)\right]+\left[\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial a}{\partial y}\right)\right].\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)}{a^2}$$

$$-\pi(x-y) = \frac{a.\left[\left(\frac{\partial^2 a}{\partial y^2}\right)-\left(\frac{\partial^2 a}{\partial x\,\partial y}\right)\right]+\left[\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial a}{\partial y}\right)\right].\left(\frac{\partial a}{\partial y}\right)}{a^2},$$

und, wenn man addirt und mit a^2 multiplicirt:

$$a.\left[\left(\frac{\partial^2 a}{\partial y^2}\right)-\left(\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}\right)\right]+\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial a}{\partial y}\right)^2 = 0.$$

Substituirt man hierin die Werthe der Differential-Coëfficienten, die sich aus der Gleichung $a = \frac{\varphi x + \varphi y}{\varphi x - \varphi y}$ ergeben, so hat man

$$\varphi y.(2\varphi x.\varphi'^2 x - \varphi^2 x.\varphi'' x) + \varphi^3 y.\varphi'' x = \varphi x.(2\varphi y.\varphi'^2 y - \varphi^2 y.\varphi'' y) + \varphi^3 x.\varphi'' y.$$

Unsere Formeln (4.) geben für diese Gleichung, wenn man die 3 Constanten durch $2a$, $2b$ und $2c$ bezeichnet:

$$2\varphi'^2 x - \varphi x.\varphi'' x = 2a + 2b\varphi^2 x,$$
$$\varphi'' x = 2b\varphi x + 2c\varphi x^3.$$

Diese beiden Differential-Gleichungen müssen übereinstimmen, wenn eine Function φ von der vorausgesetzten Beschaffenheit existiren soll. Eliminiren wir $\varphi'' x$, so erhalten wir

$$\varphi'^2 x = a + 2b\varphi^2 x + c\varphi^4 x,$$

und statt der zuletzt genannten Gleichungen können wir also die beiden folgenden setzen:

$$\varphi'^2 x = a + 2b\varphi^2 x + c\varphi^4 x,$$
$$\varphi'' x = 2b\varphi x + 2c\varphi^3 x,$$

von denen die letzte, wie man leicht sieht, die Differential-Gleichung der ersten ist. Es stimmen also beide Gleichungen wirklich mit einander überein. Setzt man nun $\varphi x = z$, und also $\varphi' x = \frac{\partial z}{\partial x}$, so giebt die erste Differential-Gleichung:

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{(a+2bz^2+cz^4)}}, \quad \text{also} \quad x = \int \frac{\partial z}{\sqrt{(a+2bz^2+cz^4)}},$$

und folglich gehört z oder φx zu den elliptischen Functionen, von welchen die Kreisfunction nur ein besonderer Fall ist, und es giebt keine andere Functionen weiter, welche die genannte Eigenschaft haben.

Am 28. November 1828.

31.

Recherches sur la figure et le mouvement d'une bulle d'air dans un liquide de densité constante.

(Par Mr. *Theremin,* capitaine du génie des voies de communications à Ircoutsk en Sibérie.)

(Suite du mémoire No. 4. tom. V. cah. 1.)

3me Partie. Figure de la bulle en mouvement.

Le seul mouvement qu'il importe de connaître dans le problème qui nous occupe, est celui d'une bulle libre, qui s'élève dans un liquide en vertu de la différence de la densité.

Il n'est pas évident si la figure de la bulle en mouvement sera ou ne sera pas la même que celle de la bulle en repos, car on sait qu'un corps en mouvement dans un fluide éprouve de la part de ce fluide une résistance égale au produit d'une constante par le carré de la vitesse; la quantité constante dépend de la densité du fluide, de celle du corps en mouvement, et en supposant que le corps en mouvement soit une sphère, le rayon de cette sphère entre aussi dans l'expression de cette constante. Ainsi en nommant d la densité du fluide, D celle de l'air de la bulle, et r le rayon de la sphère osculatrice au point culminant, on aura pour expression de la résistance du fluide:

$$\frac{M d}{D} \cdot \frac{v^2}{r},$$

M étant une constante donnée par l'expérience, et v étant la vitesse du corps en mouvement, qui est ici la bulle.

La résistance du fluide étant directement opposée à la direction du mouvement de la bulle qui est verticale, l'expression de cette résistance contre un élément ∂A de la surface supérieure doit être ajoutée à la pression que cet élément éprouve de la part du fluide en repos; donc, l'équation qui caractérise la surface supérieure de la bulle, étant, comme nous l'avons trouvé précédemment:

$$\partial p . \partial A - p . \partial^2 A = 0, \text{ d'où l'on tire } \frac{\partial p}{\partial A} = \text{const.}:$$

il ne s'agit que de remplacer la pression p sur un élément ∂A, par les quantités dont elle se compose; nous aurons pour p, 1°. La pression du

liquide, qui est

$$g\,d(h-z).\partial x.\partial y.$$

2°. La pression due à la résistance au mouvement, qui agit dans le même sens que la pression due à la hauteur du fluide, et dont l'expression est:

$$\frac{Md}{D}.\frac{v^2}{r}.\partial x.\partial y.$$

3°. Enfin la résistance due à la cohésion c, dont l'expression, comme nous l'avons trouvé précédemment, est:

$$C\frac{\partial z}{\partial s}.\partial A$$

et qui agit en sens contraire aux deux premières forces.

L'équation fondamentale $\frac{P}{\partial A} = \text{const.}$, donnera donc:

$$\frac{\left(g\,d(h-z)+\frac{Md}{D}.\frac{v^2}{r}\right)\partial x.\partial y - C\frac{\partial z}{\partial s}.\partial A}{\partial A} = \text{constante.}$$

Mais si l'on se rappelle que $\partial A = \partial x.\partial y\sqrt{\left(1+\frac{\partial z^2}{\partial x^2}+\frac{\partial z^2}{\partial y^2}\right)}$, et que pour $z=a$ on a $\frac{\partial z}{\partial x}=0$, $\frac{\partial z}{\partial y}=0$, on aura, en passant à l'équation de la génératrice plane en z et x, et remplaçant ∂s par $\left(\sqrt{\left(1+\frac{\partial z^2}{\partial x^2}\right)}\right)\partial x$, l'équation suivante de la génératrice plane:

$$1.\quad g\,d(h-z)+M\frac{d}{D}.\frac{v^2}{r}-C\frac{\partial z}{\partial x} = g\,d(h-a)\sqrt{\left(1+\frac{\partial z^2}{\partial x^2}\right)}.$$

Il faut observer que cette équation convient à la bulle dans tous les points de son mouvement, et que pour chaque point la hauteur h varie; donc en nommant h' l'ordonnée verticale du mouvement, à partir du fond du vase, la hauteur du liquide en un instant quelconque sera $h-h'$; et en mettant cette quantité au lieu de h dans l'équation (1.), elle donne:

$$(2.)\quad g\,d(h-h'-z)+\frac{Md}{D}.\frac{v^2}{r}-C\frac{\partial z}{\partial x} = g\,d(h-h'-a)\sqrt{\left(1+\frac{\partial z^2}{\partial x^2}\right)}.$$

La densité D de l'air n'est pas non plus constante et dépend évidemment de la hauteur à laquelle la bulle se trouve dans le liquide; ainsi en nommant par exemple D' la densité de l'air libre, et H la hauteur du liquide qui fait équilibre à la pression atmosphérique, on aura suivant la loi de Mariotte:

$$D' : D = H : H+h-h',$$

d'où l'on tire:

$$3.\quad D = \frac{D'}{H}(H+h-h').$$

Nous ferons plus tard usage de cette expression.

On peut simplifier l'équation (2.) en posant $\frac{M}{gD} = m$, $\frac{C}{gd} = n$; alors l'équation (2.) donne:

4. $(h - h' - z) + \frac{m}{r} . v^2 - n\frac{\partial z}{\partial x} = (h - h' - a)\sqrt{\left(1 + \frac{\partial z^2}{\partial x^2}\right)}$:

équation dont nous tirerons celle de la surface supérieure de la bulle, si nous pouvons en éliminer la quantité v: opération à laquelle les équations du mouvement de la bulle sont nécessaires.

Si l'on nomme a le volume de la bulle à la hauteur h', et a' son volume dans l'air libre, on aura suivant la loi de Mariotte:

$$a : a' = H : H + h - h',$$

d'où l'on tire:

5. $$a = \frac{a' H}{H + h - h'},$$

D étant la densité de l'air de la bulle à la hauteur h', et d celle de l'eau, la force qui fait monter la bulle dans le liquide sera $g a (d - D)$, ou bien, en mettant au lieu de D et a leurs valeurs (3. et 5.):

$$\frac{g a' H\left(d - \frac{D'}{H}(H + h - h' h)\right)}{H + h - h'}.$$

En faisant les réductions, et posant pour abréger:

6. $$\frac{\partial H}{D'} - H - h = P,\ H + h = Q,\ g a' D' = R,$$

cette expression prend la forme plus simple:

7. $$R\frac{(P + h')}{(Q - h')}.$$

D'un autre côté nous avons trouvé $\frac{Md}{D} . \frac{v^2}{r}$ pour la résistance du liquide; donc comme cette résistance diminue la force qui fait monter la bulle, on aura, en retranchant cette expression de la valeur (7.), l'expression de la force accélératrice totale qui fait monter la bulle, et l'équation de la force sera:

8. $$\frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} = R\frac{(P + h')}{(Q - h')} - \frac{Md}{D} . \frac{v^2}{r}.$$

Si nous observons que la vitesse v a pour expression $v = \frac{\partial h'}{\partial t}$, il sera facile d'éliminer v et ∂t entre cette expression, l'équation (8.) et l'équation (4), et il viendra:

9. $$(h - h' - z) + \frac{m(\partial h')^2 (P + h') D . R}{(Dr\partial^2 h' + Md . (\partial h')^2)(Q - h')} - n\frac{\partial z}{\partial x} = (h - h' - a)\sqrt{\left(1 + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)}$$

Voilà l'équation générale de la génératrice plane pour un instant quelconque. Observons que dans cette équation, h' et a, sont variables tous les deux; h' comme étant l'ordonnée du mouvement et a, qui exprime la hauteur de la bulle, variera 1° avec la figure de la bulle, c'est à dire avec h', et 2°, avec le volume de la bulle α, qui est aussi fonction de de h'; mais si nous désirons l'équation de la surface pour une hauteur déterminée h', il faut poser à la fois $a = \text{const.}$ et $h' = \text{const.}$, d'où $\partial h' = 0$, ce qui réduit l'équation (9.) à celle ci plus simple:

$$10.\quad (h-h'-z)-n\frac{\partial z}{\partial x} = (h-h'-a)\sqrt{\left(1+\frac{\partial z^2}{\partial x^2}\right)}$$

d'où l'on tire aisément:

$$11.\quad \frac{\partial z}{n(h-h'-z)\pm\sqrt{[((h-h'-a)^2-1+n^2)(h-h'-z)^2-((h-h'-a)^2-1)(h-h'-a)^2]}} = \frac{\partial x}{(h-h'-a)^2-1},$$

équation différentielle qui exprime la courbe cherchée, et dans laquelle il ne faut prendre que le signe inférieur du radical. Avec ce signe, si $z = a$, on trouve $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$.

Pour comparer la figure de la bulle en repos avec celle de la bulle en mouvement, rappellons nous que nous avons trouvé pour la bulle en repos:

$$12.\quad \frac{\partial z}{n(h-z)-(h-a)\sqrt{[(h-z)^2-((h-a)^2-n^2)]}} = \frac{\partial x}{(h-a)^2-n^2}.$$

Pour comparer cette équation avec celle (11.), il faut que les hauteurs du liquide, au dessus de la bulle, soient égales dans l'une et dans l'autre; donc il faut poser $h-h' = h$, et l'équation (11.) donne:

$$13.\quad \frac{\partial z}{n(h-z)-\sqrt{[((h-a)^2+n^2-1)(h-z)^2-(h-a)^2((h-a)^2-1)]}} = \frac{\partial x}{(h-a)^2-1}.$$

Mais rien n'empêche de faire dans les équations (12.) et (13.) $n = 1$, et alors ces équations, si l'on en tire $\frac{\partial z}{\partial x}$, donnent:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(h-z)-(h-a)\sqrt{[(h-z)^2-((h-a)^2-1)]}}{(h-a)^2-1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(h-z)-(h-a)\sqrt{[(h-z)^2-((h-a)^2-1)]}}{(h-a)^2-1},$$

Cela fait voir que pour des hauteurs égales de liquide, la bulle en repos et la bulle en mouvement ont absolument la même forme.

Passons à la recherche du mouvement de la bulle. Pour cela mettons dans l'expression (8.) de la force accélératrice au lieu de r sa valeur

tirée de l'équation (4.), il viendra:

$$14.\quad \frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} = R\left(\frac{R+h'}{Q-h'}\right) - \frac{Md}{mD}\cdot\left[(h-h'-a)\sqrt{\left(1+\frac{\partial z^2}{\partial x^2}\right)} + n\frac{\partial z}{\partial x} - (h-h'-z)\right].$$

C'est l'expression de la force accélératrice d'un point quelconque de la bulle. Pour avoir l'expression de cette force, relative à un point particulier de la bulle, il faut donner à z et à $\frac{\partial z}{\partial x}$ les valeurs qui leurs conviennent dans ce point; ainsi, si l'on voulait avoir la valeur de la force accélératrice au point culminant, il faudrait faire $z = a$, $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, et l'expression (14.) se réduirait à celle-ci plus simple:

$$15.\quad \frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} = R\left(\frac{P+h'}{Q-h'}\right),$$

que nous pouvons prendre pour l'équation du mouvement de la bulle même.

En multipliant chaque membre par $\partial h'$ et intégrant, il vient:

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial h'}{\partial t}\right)^2 = \tfrac{1}{2}v^2 = (P+Q)R\left(\log\frac{1}{(Q-h')} - \frac{h'}{P+Q}\right) + \text{const.}$$

Substituant dans cette équation les valeurs (6.) de P, Q et R, elle donne:

$$\tfrac{1}{2}v^2 = g\alpha'\partial H\left(\log\frac{1}{(H+h-h')} - \frac{D'h'}{\partial H}\right) + \text{const.}$$

et si l'on observe qu'à l'origine du mouvement on a à la fois $v = 0$, $h' = 0$, on en tirera: const. $= g\alpha' D' \log(H+h)$, et

$$16.\quad v = \pm\sqrt{\left[g\alpha'\partial H\left(\log\left(\frac{H+h}{H+h-h'}\right) - \frac{D'h'}{\partial H}\right)\right]}.$$

C'est l'expression de la vitesse au bout du temps dans lequel la bulle s'est élevée à la hauteur h'. On peut tirer sur le champ un résultat remarquable de l'équation (16.). Pour cela nommons φ le volume d'une autre bulle dans le même vase, nous aurons pour la vitesse v' de cette bulle à la hauteur h', l'expression:

$$v' = \pm\sqrt{\left[g\varphi\partial H\left(\log\left(\frac{H+h}{H+h-h'}\right) - \frac{D'h'}{\partial H}\right)\right]};$$

en divisant cette équation par celle (16.), élevant au carré et réduisant, il vient:

$$\frac{v'^2}{v^2} = \frac{\varphi}{\alpha'};$$

c'est à dire: les carrés des vitesses de deux bulles, qui ont parcourues des espaces égaux dans le même vase, sont entr'eux comme les volumes de ces bulles.

Si la hauteur du liquide h était assez petite pour qu'on put considérer α et D comme constants, les équations du mouvement se simpli-

fieraient beaucoup. En effet, le second membre de l'équation (15.) qui n'est autre chose que $g\alpha(d-D)$, serait constant, et en faisant $g(d-D)=k$, on aurait simplement:

$$\frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} = \alpha.k,$$

d'où l'on tire:

$$\frac{\partial h'}{\partial t} = \alpha k.t + \text{const.}, \text{ ou bien } v = \alpha.kt + C.$$

Mais v et t étant nuls en même temps, on a simplement

$$17. \quad \frac{\partial h'}{\partial t} = \alpha k.t, \quad v = \alpha.kt.$$

Intégrant la première de ces équations, on a $h' = \frac{1}{2}\alpha k t^2 + C$. Mais $C=0$, puisque h' et t sont zéro à la fois. Donc $h' = \frac{1}{2}\alpha k t^2$ est l'expression de l'espace en fonction du temps. Mettant la valeur de t, tirée de l'équation (17.), dans cette expression, on aura:

$$h' = \tfrac{1}{2}\frac{v^2}{\alpha k}.$$

Mais pour une bulle du volume φ on aurait aussi $h' = \frac{1}{2}\frac{v'^2}{\varphi k}$, donc

$$\frac{v'^2}{v^2} = \frac{\varphi}{\alpha}:$$

résultat, que nous avons déjà obtenu dans le cas général.

Si nous nommons v' la vitesse d'une bulle φ au bout d'un temps t, nous aurons en vertu de l'équation (17.): $v' = \varphi k t$, d'où $\frac{v'}{v} = \frac{\varphi}{\alpha}$, c'est à dire, qu'au bout d'un même temps les vitesses sont entr'elles comme les volumes; si au contraire on suppose les vitesses égales, on aura, en nomment t' le tems du mouvement de la seconde bulle: $t' : t = \alpha : \varphi$, c'est à dire, que les temps nécessaires pour acquérir la même vitesse, sont en raison inverse des volumes des bulles. De l'expression de l'espace, $h' = \frac{1}{2}\alpha k t^2$, nous conclurons encore, que les espaces parcourus dans le même temps, sont entr'eux comme les volumes des bulles; et que les carrés des temps employés à parcourir des espaces égaux, sont en raison inverse de ces volumes.

Je ne pousserai pas plus loin ces recherches, la figure de la bulle et son mouvement me paraissant suffisamment connus par ce que j'en ai dit; d'ailleurs, les recherches ultérieures ne présenteroient évidemment que des difficultés de calcul, peut être insurmontables, sans offrir d'autres résultats intéressans.

A Ircoutsk le 20. Octobre 1829.

32.

Über die Summe der Reihen $1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}\ldots.$ und $1+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{13^2}+\frac{1}{19^2}+\ldots.$

(Von Herrn *Th. Clausen* zu München.)

Da diese Reihen sehr langsam convergiren, so hat Euler sie in andere, schneller convergirende verwandelt, die aber, da die Coëfficienten von den Bernoullischen Zahlen abhängen, nach einer gewissen Anzahl Glieder wieder divergiren. Dieses hat Legendre bewogen (*Traité de fonct. ellipt. T. II. p.* 397.), andere ganz convergirende Reihen zu suchen, die die Summe derselben darstellen. Da aber die Glieder der von ihm gefundenen Reihen nach einem nicht so einfachen Gesetze fortgehen, als nachstehende, auf die ich beim Studium des Legendreschen Werks gekommen bin, so erlaube ich mir dieselben hier mitzutheilen.

1. Es sei:

$$1.\quad z = \int\theta^2\,\partial\log\sin\theta - 2\theta\int\theta\,\partial\log\sin\theta + \theta^2\log\sin\theta,$$

so ist:

$$\partial^2 z = 2\log\sin\theta\,\partial\theta^2,$$

folglich auch:

$$2.\quad z = 2\iint\log\sin\theta\,\partial\theta^2.$$

Es ist aber:

$$\log\sin\theta = -\log 2 - \cos 2\theta - \tfrac{1}{2}\cos 4\theta - \tfrac{1}{3}\cos 6\theta - \tfrac{1}{4}\cos 8\theta - \ldots\ldots,$$

und wenn man das Integral jedesmal von $\theta = 0$ anfangen läfst:

$$\int\log\sin\theta\,\partial\theta = -\theta\log 2 + \tfrac{1}{2}(\sin 2\theta + (\tfrac{1}{2})^2\sin 4\theta + (\tfrac{1}{3})^2\sin 6\theta + (\tfrac{1}{4})^2\sin 8\theta + \ldots.)$$

$$\iint\log\sin\theta\,\partial\theta^2 = -\tfrac{1}{2}\theta^2\log 2 + \tfrac{1}{4}(\cos 2\theta + \tfrac{1}{2^3}\cos 4\theta + \tfrac{1}{3^3}\cos 6\theta + \tfrac{1}{4^3}\cos 8\theta + \ldots.)$$
$$-\tfrac{1}{4}(1 + \tfrac{1}{2^3} + \tfrac{1}{3^3} + \tfrac{1}{4^3} + \ldots.),$$

also:

$$3.\quad z = \tfrac{1}{2}(\cos 2\theta + \tfrac{1}{2^3}\cos 4\theta + \tfrac{1}{3^3}\cos 6\theta + \tfrac{1}{4^3}\cos 8\theta + \ldots.)$$
$$-\tfrac{1}{2}(1 + \tfrac{1}{2^3} + \tfrac{1}{3^3} + \tfrac{1}{4^3} + \ldots.) - \theta^2\log 2.$$

Substituirt man nun in die Gleichung (1.)

$$\theta = \sin\theta + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3}\sin\theta^3 + \frac{1.3}{2.4}\cdot\tfrac{1}{5}\sin\theta^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\tfrac{1}{7}\sin\theta^7 + \ldots.,$$

$$\theta^2 = \sin\theta^2 + \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{2}\sin\theta^4 + \frac{2.4}{3.5}\cdot\tfrac{1}{3}\sin\theta^6 + \frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\tfrac{1}{4}\sin\theta^8 + \ldots.,$$

so erhält man:

$$4.\quad z = \tfrac{1}{2}\Big(\sin\theta^2+\tfrac{2}{3}(\tfrac{1}{2})^2\sin\theta^4+\frac{2.4}{3.5}.(\tfrac{1}{3})^2\sin\theta^6+\frac{2.4.6}{3.5.7}.(\tfrac{1}{4})^2\sin\theta^8+\ldots.\Big)$$
$$-2\theta\Big(\sin\theta+\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{3}^3)\sin\theta^3+\frac{1.3}{2.4}.(\tfrac{1}{5})^2\sin\theta^5+\frac{1.3.5}{2.4.6}.(\tfrac{1}{7})^2\sin\theta^7+\ldots.\Big)$$
$$+\theta^2\log\sin\theta.$$

Setzt man mit **Legendre**:

$$(1,6)^3 = 1+\frac{1}{7^3}+\frac{1}{13^3}+\ldots.$$
$$(2,6)^3 = \frac{1}{2^3}+\frac{1}{8^3}+\frac{1}{14^3}+\ldots.$$

u. s. w.

so giebt die Reihe (3.) für $\theta=\frac{\pi}{6}$:

$$z=\tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{2}(1,6)^3-\tfrac{1}{2}(2,6)^3-(3,6)^3+\tfrac{1}{2}(4,6)^3+\tfrac{1}{2}(5,6)^3+(6,6)^3]-\tfrac{1}{2}S_3-\frac{\pi^2}{36}\log 2,$$

wo $S_3=1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\ldots.$ ist.

Es ist aber, wie man leicht sieht,

$$\begin{aligned}(1,6)^3+(2,6)^3+(3,6)^3+(4,6)^3+(5,6)^3+(6,6)^3 &= 216(6,6)^3 = S_3\\ (2,6)^3\qquad\quad+(4,6)^3\qquad\quad+(6,6)^3 &= 27(6,6)^3\\ +(3,6)^3\qquad\qquad\qquad\quad+(6,6)^3 &= 8(6,6)^3\\ (6,6)^3 &= (6,6)^3\end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen resp. mit $\frac{1}{2}$, -1, $-\frac{3}{2}$, $+3$, und addirt die Producte, so erhält man:

$$\tfrac{1}{2}(1,6)^3-\tfrac{1}{2}(2,6)^3-(3,6)^3-\tfrac{1}{2}(4,6)^3+\tfrac{1}{2}(5,6)^3+(6,6)^3=27(6,6)^3=\tfrac{1}{3}S_3,$$

folglich für $\theta=\frac{\pi}{6}$:

$$5.\quad z=-\tfrac{1}{3}S_3-\frac{\pi^2}{36}\log 2.$$

Vergleicht man diesen Werth mit der Gleichung (4.), nach Substitution von $\theta=\frac{\pi}{6}$, so folgt:

$$6.\quad S_3=\pi\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.\frac{1}{3^2.2^3}+\frac{1.3}{2.4}.\frac{1}{5^2.2^5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{1}{7^2.2^7}+\ldots.\Big)$$
$$-\frac{3}{4}\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}.\frac{1}{2^2.2^2}+\frac{1.2}{3.5}.\frac{1}{2^3.3^2}+\frac{1.2.3}{3.5.7}.\frac{1}{2^4.4^2}+\ldots.\Big).$$

Die numerischen Werthe der beiden Reihen bis auf 22 Decimalstellen genau, sind:

$$\begin{aligned}&1,59426\ \ 65472\ \ 59595\ \ 61676\ \ 81\\ \text{folglich:}\quad &0,39220\ \ 96441\ \ 00001\ \ 33136\ \ 84,\\ S_3 = &1,20205\ \ 69031\ \ 59594\ \ 28539\ \ 97.\end{aligned}$$

2. Wenn man ferner:

$$(1,6)^2 = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{13^2}+\ldots.$$

$$(2,6)^2 = \frac{1}{2^2}+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{14^2}+\ldots.$$

u. s. w.

setzt, so ist nach den umstehenden Formeln:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \log\sin\theta\,\partial\theta = -\frac{\pi}{6}\log 2 - \frac{\sqrt{3}}{4}[(1,6)^1+(2,6)^2-(4,6)^2-(5,6)^2],$$

und da (Legendre am angeführten Orte):

$$(1,6)^2+(2,6)^2-(4,6)^2-(5,6)^2 = \tfrac{12}{5}(1,6)^2-\tfrac{2}{15}\pi^2$$

so ist:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \log\sin\theta\,\partial\theta = \frac{\pi^2\sqrt{3}}{30}-\frac{\pi}{6}\log 2-\frac{3.\sqrt{3}}{5}(1,6)^2.$$

Nun ist aber auch:

$$\int \log\sin\theta\,\partial\theta = \theta\log\sin\theta - \int\theta\,\partial\log\sin\theta,$$

mithin:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \log\sin\theta\,\partial\theta = -\frac{\pi}{6}\log 2-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^2.2^3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5^2.2^5}+\ldots\right).$$

Setzt man die in Parenthesen eingeschlossene Reihe $= R$, dessen numerischer Werth

$$0,50747\quad 08032\quad 04826\quad 81251\quad 060$$

ist, und vergleicht die beiden für $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \log\sin\theta\,\partial\theta$ gefundenen Werthe, so ergiebt sich:

$$(1.6)^2 = \frac{\pi^2}{18}+\frac{5R}{3.\sqrt{3}},$$

und also:

$$(2.6)^2 = \frac{\pi^2}{54}+\frac{R}{3.\sqrt{3}},$$

$$(4.6)^2 = \frac{\pi^2}{54}-\frac{R}{3.\sqrt{3}},$$

$$(5.6)^2 = \frac{\pi^2}{18}-\frac{5R}{3.\sqrt{3}}.$$

Es ist $\frac{R}{3.\sqrt{3}} = 0,09766\quad 28016\quad 12060\quad 78710\quad 840$

und $\frac{\pi^2}{54} = 0,18277\quad 04518\quad 72025\quad 15960\quad 805,$

folglich $(4.6)^2 = 0,08510\quad 76502\quad 59964\quad 37249\quad 965,$

welches man gleichfalls durch die Eulersche Formel erhält.

München, den 8. Januar 1830.

33.

Über die Bestimmung der Lage der Haupt-Umdrehungs-Axen eines Körpers.

(Von Herrn *Th. Clausen* zu München.)

Die gewöhnlich angegebene Auflösung dieser Aufgabe führt auf eine cubische Gleichung, die sich aber in einer etwas verwickelten Gestalt darstellt. Das folgende Verfahren, welches Gaufs zur Auflösung einer andern Aufgabe: „*Determinatio attractionis etc. etc.*" angewandt hat, giebt auf einem directeren Wege eine Gleichung von symmetrischer Form.

Es seien die Momente in Beziehung auf die bekannten Axen der x, y, z, und auf den Schwerpunct bezogen:

$$1.\quad \begin{cases} \int x x\, \partial m = \alpha; & \int x y\, \partial m = \delta, \\ \int y y\, \partial m = \beta; & \int y z\, \partial m = \varepsilon, \\ \int z z\, \partial m = \gamma; & \int z x\, \partial m = \theta, \end{cases}$$

und die Coordinaten, auf die Haupt-Umdrehungs-Axen bezogen, x', y', z'; und

$$2.\quad \begin{cases} \int x' x'\, \partial m = \xi; & \int x' y'\, \partial m = 0, \\ \int y' y'\, \partial m = \upsilon; & \int y' z'\, \partial m = 0, \\ \int z' z'\, \partial m = \zeta; & \int z' x'\, \partial m = 0: \end{cases}$$

Sei nun:

$$3.\quad \begin{cases} x' = a x + b y + c z, \\ y' = a' x + b' y + c' z, \\ z' = a'' x + b'' y + c'' z. \end{cases}$$

Da die Entfernung jedes Puncts vom Anfangspuncte der Coordinaten bei beiden Systemen dieselbe ist, so mufs $x'x' + y'y' + z'z' = xx + yy + zz$ sein. Folglich:

$$4.\quad \begin{cases} a a + a' a' + a'' a'' = 1; & a b + a' b' + a'' b'' = 0, \\ b b + b' b' + b'' b'' = 1; & b c + b' c' + b'' c'' = 0, \\ c c + c' c' + c'' c'' = 1; & c a + c' a' + c'' a'' = 0. \end{cases}$$

Wir haben also zur Bestimmung der 12 unbekannten Gröfsen ξ, υ, ζ, a, b, c, a' etc. eben so viele Gleichungen (2.) und (4.), so dafs also die Auflösung der Aufgabe algebraisch möglich ist. Man hat ferner, wenn man die Gleichungen (3.) resp. mit a, a', a''; b, b', b'' und c, c', c'' multi-

plicirt, die Producte je drei und drei addirt, und die Gleichungen (4.) berücksichtigt:

$$5.\quad \begin{cases} x = a x' + a' y' + a'' z', \\ y = b x' + b' y' + b'' z', \\ z = c x' + c' y' + c'' z'; \end{cases}$$

demnach auch, in Folge der bei den Gleichungen (3.) gemachten Bemerkung:

$$6.\quad \begin{cases} a\,a + b\,b + c\,c = 1; & a\,a' + b\,b' + c\,c' = 0, \\ a'a' + b'b' + c'c' = 1; & a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0, \\ a''a'' + b''b'' + c''c'' = 1; & a''a + b''b + c''c = 0. \end{cases}$$

Werden nun in die Gleichungen (1.) die Gleichungen (5.) und (2.) substituirt, so findet man:

$$7.\quad \begin{cases} \alpha = a\,a.\xi + a'a'.\upsilon + a''a''.\zeta, \\ \beta = b\,b.\xi + b'b'.\upsilon + b''b''.\zeta, \\ \gamma = c\,c.\xi + c'c'.\upsilon + c''c''.\zeta, \\ \delta = a\,b.\xi + a'b'.\upsilon + a''b''.\zeta, \\ \varepsilon = b\,c.\xi + b'c'.\upsilon + b''c''.\zeta, \\ \vartheta = c\,a.\xi + c'a'.\upsilon + c''a''.\zeta. \end{cases}$$

Diese geben, mit Berücksichtigung der Gleichungen (6.):

$$8.\quad \begin{cases} \alpha a + \delta b + \vartheta c = \xi a, \\ \delta a + \beta b + \varepsilon c = \xi b, \\ \vartheta a + \varepsilon b + \gamma c = \xi c, \end{cases}$$

$$9.\quad \begin{cases} \alpha a' + \delta b' + \vartheta c' = \upsilon a', \\ \delta a' + \beta b' + \varepsilon c' = \upsilon b', \\ \vartheta a' + \varepsilon b' + \gamma c' = \upsilon c', \end{cases}$$

$$10.\quad \begin{cases} \alpha a'' + \delta b'' + \vartheta c'' = \zeta a'', \\ \delta a'' + \beta b'' + \varepsilon c'' = \zeta b'', \\ \vartheta a'' + \varepsilon b'' + \gamma c'' = \zeta c''. \end{cases}$$

Durch Elimination von a, b und c aus den Gleichungen (8.) findet man folgende Gleichung zwischen ξ und den bekannten Gröfsen α, β, γ etc.

$$11.\quad 0 = (\alpha-\xi)(\beta-\xi)(\gamma-\xi) - \delta\delta(\gamma-\xi) - \varepsilon\varepsilon(\alpha-\xi) - \vartheta\vartheta(\beta-\xi) + 2\delta\varepsilon\vartheta.$$

Eben dieselbe Gleichung findet man, wie auf den ersten Anblick erhellet, durch Elimination von a', b', c' aus (9.) zwischen υ und α, β, etc.; und durch Elimination von a'', b'', c'' aus (10.) zwischen ζ und α, β, etc. Also ist, wenn man die Gleichung (11.) nach den Potenzen ordnet, und statt ξ, u setzt:

$$12.\quad u^3-(\alpha+\beta+\gamma)u^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha-\delta\delta-\varepsilon\varepsilon-\theta\theta)u + \alpha\varepsilon\varepsilon+\beta\theta\theta+\gamma\delta\delta-2\delta\varepsilon\theta-\alpha\beta\gamma=0,$$

deren drei Wurzeln die Werthe von ξ, υ und ζ sind.

Aus den Gleichungen (8.) hat man ferner:

$$a((\alpha-\xi)\xi-\delta\theta)=b((\beta-\xi)\xi-\delta\varepsilon)=c((\gamma-\xi)\xi-\theta\varepsilon);$$

woraus folgt:

$$13.\quad \begin{cases} \lambda a = \dfrac{1}{(\alpha-\xi)\xi-\delta\theta}, \\ \lambda b = \dfrac{1}{(\beta-\xi)\xi-\varepsilon\delta}, \\ \lambda c = \dfrac{1}{(\gamma-\xi)\xi-\theta\varepsilon}, \end{cases}$$

und also:

$$\lambda\lambda = \frac{1}{((\alpha-\xi)\xi-\delta\theta)^2}+\frac{1}{((\beta-\xi)\xi-\varepsilon\delta)^2}+\frac{1}{((\gamma-\xi)\xi-\theta\varepsilon)^2}.$$

Auf gleiche Weise findet man a', b' und c' durch υ, und a'', b'' und c'' durch ζ.

München, den 20. October 1829.

34.
Théorème sur les nombres.

Théorème. Si trois nombres entiers sont tels que le quarré du plus grand soit égal à la somme des quarrés des deux plus petits, le produit de ces trois nombres sera nécessairement divisible par soixante. (Annales de mathém. de Mr. Gergonne, tome XX. cahier VII. page 212.)

Démonstration. (Par un abonné.)

Les trois nombres r, s, t dans l'équation $r^2+s^2=t^2$ peuvent être supposés débarassés de tout diviseur commun, car si l'on peut prouver que le produit des nombres ainsi réduits est un multiple de 60, la même conséquence s'étendra au produit des nombres primitifs. L'équation étant dans cet état, deux des nombres qui entrent dans notre équation, seront impairs, et le troisième sera pair. Il est facile de voir que r et s ne sauraient être l'un et l'autre impairs. En effet, comme tout quarré impair est de la forme $8n+1$, la somme r^2+s^2 aurait dans ce cas la forme $8n+2$, qui ne saurait convenir au quarré t^2. L'un des nombres r, s est donc pair. Supposons que ce soit r. Comme on a $r^2=t^2-s^2$, t^2 et s^2 étant des quarrés impairs et par conséquent de la forme $8n+1$, r^2 sera divisible par 8, et r par conséquent multiple de 4. Il est donc prouvé que l'un des nombres r, s est divisible par 4.

On prouve avec la même facilité que l'un de ces nombres r, s est divisible par 3. Il suffit pour cela de remarquer que le quarré de tout nombre non-divisible par 3 étant de la forme $3n+1$, la somme r^2+s^2 aurait la forme $3n+2$, si aucun des nombres r, s n'était divisible par 3, tandisque le quarré t^2 aurait la forme $3n+1$, ou serait divisible par 3.

Prouvons enfin que des 3 nombres r, s, t l'un est toujours divisible par 5. C'est ce que nous allons faire en démontrant que si ni r ni s ne le sont, t le sera nécessairement. Tout quarré non divisible par 5 étant de l'une des formes $5n+1$, $5n+4$, il peut arriver trois cas différens, lorsque r et s ne sont ni l'un ni l'autre divisibles par 5. Les quarrés de ces

nombres peuvent être l'un et l'autre de la forme $5n+1$, ou l'un et l'autre de la forme $5n+4$, ou enfin l'un de la forme $5n+1$, l'autre de la forme $5n+4$. Les deux premiers cas ne sauraient avoir lieu, car dans le premier r^2+s^2 aurait la forme $5n+2$ et dans le second la forme $5n+3$, qui ne sauraient convenir ni l'une ni l'autre au quarré t^2. Il ne reste donc que le troisième cas dans lequel t^2 sera de la forme $5n$, c'est à dire divisible par 5; t est donc toujours divisible par 5, si ni r ni s ne le sont.

En réunissant ce qui précède, on voit que le produit rst est divisible par 4, par 3 et par 5, et comme 3, 4 et 5 sont premiers entre eux, rst sera aussi un multiple du produit $3.4.5$, ce qu'il s'agissoit de prouver.

35.

Sur un principe général dans la théorie des séries.

(Par Mr. *de Schmidten*, prof. des mathém. à Copenhague.)

Après avoir exposé le principe général pour le développement en série de forme quelconque d'une fonction, soit explicite, soit implicite, je considère en particulier les séries proprement dites, ou celles qui ne sont qu'une somme de termes.

Le principe que je présente à leur égard, renferme beaucoup de résultats qui ont été trouvés par des méthodes diverses, et dont la liaison est souvent difficile à saisir. Mais l'objet de cette note étant surtout de ramener à un seul point de vue les résultats différens les plus généraux, je ne m'occupe pas de l'évaluation qui d'ailleurs n'est possible que dans des cas fort particuliers, et je ne fais qu'indiquer les corrolaires dont les développemens n'auroient d'autre difficulté que la longueur du calcul.

1.

Pour développer une fonction en série de la manière la plus générale, on lui donne la forme

$$F(x) = \varphi[A_1 + f_1(x)\varphi(A_2 + f_2 x\varphi(A_3 + \ldots.))],$$

où φ est le signe d'une fonction quelconque, $f_1(x)$, $f_2(x)$ etc. sont des fonctions quelconques de x, et A_1, A_2, A_3, ... des quantités qui dépendent de la fonction $F(x)$ et qu'il s'agit de déterminer.

Soit $\psi(x)$ la fonction inverse de $\varphi(x)$, telle que $\psi(\varphi(x)) = x$, et x_1, x_2, x_3, ... des valeurs de x telles que

$$f_1(x_1) = 0, \quad f_2(x_2) = 0, \quad f_3(x_3) = 0,$$

on aura pour A_1, A_2 etc. les valeurs suivantes:

$$\psi(F(x_1)) = A_1, \quad \psi\left(\frac{\psi(F(x_2)) - A_1}{f_1(x_2)}\right) = A_2, \quad \psi\left(\frac{\psi\left(\frac{\psi(F(x_3)) - A_1}{f_1(x_3)}\right)}{f_2(x_3)}\right) = A_3 \text{ etc.}$$

On voit que les quantités A_1, A_2, etc. se déterminent d'autant de manières différentes qu'il y a des combinaisons entre les racines des équations:

$$f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = 0, \quad f_3(x) = 0 \text{ etc.}$$

Soit $\varphi(x) = \frac{1}{x}$, on aura:

$$A_1 = \frac{1}{f(x_1)}, \quad A_2 = \frac{f_1(x_2)}{\frac{1}{F(x_2)} - A_1}, \quad A_3 = \frac{f_2(x_3)}{\frac{f_1(x_3)}{\frac{1}{F(x_3)} - A_1} - A_2},$$

Si l'on fait $\varphi(x) = x$, on a la forme d'une série proprement dite, ou une somme de termes qu'on pourroit appeler série linéaire, savoir:

$$F(x) = A_1 + A_2 f_1(x) + A_3 f_1(x) f_2(x) + \ldots.$$

Si toutes les valeurs de x qu'on tire des équations:

$$f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = 0, \quad \text{etc.}$$

sont égales à zéro, on trouvera que les valeurs de A_1, A_2 etc. se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$, dont les vraies valeurs se trouvent par le calcul differentiel.

Si les fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... sont toutes égales à x, on tombe dans le cas le plus simple, la série de Taylor.

2.

Si la fonction est donnée implicitement, on la développe en série par le principe de substitutions successives. Soit donnée l'équation

$$y = \varphi(x, y),$$

on aura:

$$y = \varphi[x, \varphi(x, \varphi(x, \ldots.))].$$

Si l'équation est différentielle, on peut toujours lui donner la forme

$$\varphi\left(\frac{\partial^n y}{\partial x^n}, \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}, \ldots. y, x\right) = \psi\left(\frac{\partial^n y}{\partial x^n}, \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}, \ldots. y, x\right)$$

de sorte que le premier membre soit intégrable par des fonctions connues. On en tire une équation intégrale, renfermant n constantes arbitraires de la forme

$$y = f(x, y),$$

d'où l'on aura

$$y = f[x, f(x, f(x, \ldots.))],$$

$f(x, y)$ étant une fonction de x et de y qui renferme n coëfficiens différentiels avec autant d'intégrations et de constantes arbitraires.

Comme une équation quelconque peut être partagée de beaucoup de manières en deux membres tels que le premier soit intégrable, on peut aussi lui trouver beaucoup de formes d'intégration différentes.

Ce n'est que dans le cas où l'équation elle-même est linéaire que l'intégrale aura la forme des séries auxquelles nous avons donné ce nom. Aussi est-il facile de voir que chaque terme de la série se dérive du précédent par autant de différentiations et d'intégrations, qu'indiquent re-

spectivement les coëfficiens différentiels les plus élevés sous les signes ψ et φ.

3.

La forme générale d'une série linéaire est:

$$F(t) = \Sigma . y_x t^x,$$

où x peut être prise depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$. Celle-ci mène en général à deux problèmes, celui de la transformer en une autre, et celui d'en dériver de nouvelles relations entre des fonctions et des séries correspondantes. Le premier se résoud de la manière la plus générale par la théorie des fonctions génératrices, et le second se réduit à un principe général dont le développement est l'objet de ce qui va suivre.

Soit ∇z une fonction quelconque linéaire de z, telle que

$$\nabla(z+y) = \nabla z + \nabla y;$$

comme par exemple

$$\nabla z = \frac{\partial^n z}{\partial x^n} \text{ ou } \nabla z = \int X z \, \partial x,$$

X étant une fonction quelconque de x, etc.

Soient u et v des fonctions quelconques de t, on aura:

$$1. \quad \nabla . u F(v) = \Sigma . y_x \nabla (u v^x).$$

Les signes d'intégration ou de différentiation contenus dans ∇ se rapportent à la variable t.

De l'équation $F(t) = \Sigma y_x t^x$ on tire par l'introduction des imaginaires celles-ci:

$$2. \quad f(t) = \Sigma . y_x \cos tx,$$

$$3. \quad \varphi(t) = \Sigma . y_x \sin tx,$$

$f(t)$ étant $= \frac{F(e^{t\sqrt{-1}}) + F(e^{-t\sqrt{-1}})}{2}$ et $\varphi(t) = \frac{F(e^{t\sqrt{-1}}) - F(e^{-t\sqrt{-1}})}{2\sqrt{-1}}$

et par le même procédé que ci-dessus:

$$\nabla . u f(v) = \Sigma . y_x \nabla (u \cos vx),$$

$$\nabla . u \varphi(v) = \Sigma . y_x \nabla (u \sin vx).$$

4.

Les corollaires des équations (1., 2. et 3.) les plus simples, se trouvent en supposant ∇ le signe de différentiation et supposant u et v de la forme t^m ou e^{mt}.

Faisant $\nabla = \Sigma$, on aura de l'un coté du signe $=$ une série ordinaire et de l'autre coté une série à double entrée. Ainsi, en ne prenant les Σ qu'entre les limites 0 et $+\infty$, on aura de l'équation (1.):

$$u_1F(v_1)+u_2F(v_2)+u_3F(v_3)+\ldots. = (u_1v_1+u_2v_2+\ldots.)y_1 + (u_1v_1^2+u_2v_2^2+\ldots.)y_2 + (u_1v_1^3+u_2v_2^3+\ldots.)y_3 + \ldots..$$

et de l'équation (2.):

$$u_1f(v_1)+u_2f(v_2)+\ldots. = (u_1\cos v_1+u_2\cos v_2+\ldots.)y_1 + (u_1\cos 2v_1+u_2\cos 2v_2+\ldots.)y_2 + (u_1\cos 3v_1+u_2\cos 3v_3+\ldots.)y_3 + \ldots..,$$

u_1, u_2, ... v_1, v_2, ... étant les valeurs de u et de v qui répondent aux valeurs de $t=1$, 2, 3 etc. On tirera une expression semblable de l'équation (3.).

Déterminant convenablement les fonctions u_n et v_n, les séries infinies du second membre se réduiront à des fonctions connues, et l'on aura ainsi une égalité de deux séries de formes différentes.

Supposant dans l'équation (1.) $v_n=(nt)^2$, $u_n=(-1)^{n+1}(nt)^{-2k}$, k étant un nombre entier quelconque, et remarquant que

$$1^{2n}-2^{2n}+3^{2n}-\ldots. = 0,\ \tfrac{1}{2} = 1-1+1-1\ldots.,$$

n étant un nombre entier positif, on aura:

$$\frac{1}{t^{2k}}\left(\frac{F(t^2)}{1^{2k}}-\frac{F(4t^2)}{2^{2k}}+\frac{F(9t^2)}{3^{2k}}\ldots.\right) = y_1\Sigma.(-1)^{n+1}(nt)^{-2(k-1)} + y_2\Sigma.(-1)^{n+1}(nt)^{-2(k-2)} + \ldots.. + y_k\Sigma.(-1)^{n+1}$$

le nombre n étant pris depuis 0 jusqu'à ∞.

De l'équation (2.), en faisant $v_n=nt$ et $u_n=(-1)^{n+1}$, et observant que $\tfrac{1}{2}=\cos\theta-\cos 2\theta+\cos 3\theta-\ldots.$, on tire l'équation:

$$f(t)-f(2t)+f(3t)-\ldots. = \tfrac{1}{2}y_1+\tfrac{1}{2}y_2+\tfrac{1}{2}y_3+\ldots. = \tfrac{1}{2}f(0).$$

Ces formules ont été presentées par M. Babbage dans un mémoire fort intéressant (Philos. transact. 1816), dans lequel il s'occupe de l'évaluation de ces séries et indique les circonstances sous lesquelles la divergence des séries rend le résultat inexact.

Soit encore $v_n=nv$, $u_n=u^n$, on aura:

$$uf(v)+u^2f(2v)+u^3f(3v)+\ldots. = \frac{u(\cos v-u)}{1-2u\cos v+u^2}y_1+\frac{u(\cos 2v-u)}{1-2u\cos 2v+u^2}y_2+\ldots.$$

De la formule

$$\nabla . u\varphi(v) = \Sigma . y_x \nabla u \sin vx,$$

en supposant $\nabla = \Sigma$, $u_n = \sin\frac{np\pi}{m}$, $v_n = \frac{n\pi}{m}$, et les intégrales aux différences finies étant prises depuis $n = 1$ jusqu'à $n = m$, et depuis $x = 1$ jusqu'à $x = m$; p, m, n étant des nombres entiers, on tire:

$$\begin{aligned}
&\Sigma . u\varphi(v)\\
&= \left(\sin\frac{p\pi}{m}\sin\frac{\pi}{m} + \sin\frac{2p\pi}{m}\sin\frac{2\pi}{m} + \ldots + \sin\frac{(m-1)p\pi}{m}\sin\frac{(m-1)\pi}{m}\right) y_1\\
&+ \left(\sin\frac{p\pi}{m}\sin\frac{2\pi}{m} + \sin\frac{2p\pi}{m}\sin\frac{4\pi}{m} + \ldots + \sin\frac{(m-1)p\pi}{m}\sin\frac{2(m-1)\pi}{m}\right) y_2\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+ \left(\sin\frac{p\pi}{m}\sin\frac{(m-1)\pi}{m} + \sin\frac{2p\pi}{m}\sin\frac{2(m-1)\pi}{m} + \ldots + \sin\frac{(m-1)p\pi}{m}\sin\frac{(m-1)(m-1)\pi}{m}\right) y_{m-1},
\end{aligned}$$

et observant que le coëfficient d'un membre quelconque y_r est

$$= \frac{\sin p\pi \sin\frac{(m-1)r\pi}{m} - \sin r\pi \sin\frac{(m-1)p\pi}{m}}{2\left(\cos\frac{p\pi}{m} - \cos\frac{r\pi}{m}\right)},$$

on voit que tous les coëfficiens doivent s'évanouir excepté le cas où $p = r$, dans lequel cette expression deviendra $= \frac{m}{2}$, et l'on aura:

$$\Sigma \sin\frac{np\pi}{m}\varphi\left(\frac{n\pi}{m}\right) = \frac{m}{2}y_p \quad \text{ou} \quad \frac{2}{m}\Sigma\Sigma . y_x \sin\frac{np\pi}{m}\sin\frac{nx\pi}{m} = y_p,$$

ce qui est la formule connue de Lagrange, de laquelle découlent celles de M. Fourier:

$$f(a) = \frac{2}{\pi}\iint f(z)\sin ax \sin zx\, \partial z\, \partial x \begin{Bmatrix} x = 0, & z = 0 \\ x = \infty, & z = \infty \end{Bmatrix}.$$
$$f(a) = \frac{2}{\pi}\iint f(z)\cos ax \cos zx\, \partial z\, \partial x \begin{Bmatrix} x = 0, & z = 0 \\ x = \infty, & z = \infty \end{Bmatrix}.$$

Ces beaux théorèmes donnent aussi les relations les plus remarquables entre des intégrales définies et des fonctions connues. Ainsi, en supposant $fz = e^{-qz}$, et observant que

$$\int e^{-qz}\cos xz\, \partial z = \frac{q}{x^2+q^2} \quad \text{et} \quad \int e^{-qz}\sin xz\, \partial z = \frac{x}{x^2+q^2}\begin{Bmatrix} z = 0 \\ z = \infty \end{Bmatrix},$$

on a

$$\frac{\pi}{2}e^{-qa} = \int \frac{x\sin ax}{x^2+q^2}\partial x, \quad \frac{\pi}{2}e^{-qa} = \int \frac{q\cos ax}{x^2+q^2}\partial x.$$

De même en supposant

$$f(z) = \int e^{-u^2 - \frac{z^2}{u^2}} . \partial u \begin{Bmatrix} u = 0 \\ u = \infty \end{Bmatrix},$$

et observant que

$$\int e^{-\frac{z^2}{u^2}} \cos z x \, \partial z = \frac{\sqrt{\pi}}{2} u e^{-\frac{x^2 u^2}{4}}, \text{ on a:}$$

$$\int e^{-u^2 - \frac{a^2}{u^2}} . \partial u = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int \frac{\cos x a \, \partial a}{1+\frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2a}.$$

5.

Faisant $\nabla = \int$ entre des limites indéterminées, on aura:

$$\int u F(v) \partial t = \Sigma . y_x \int u v^x \partial t,$$

$$\int \frac{u}{2} (e^{w\sqrt{-1}} F(e^{v\sqrt{-1}}) + e^{-w\sqrt{-1}} F(e^{-v\sqrt{-1}})) \partial t = \Sigma . y_x \int \cos (w + v x) \partial t,$$

$$\int \frac{u}{2\sqrt{-1}} (e^{w\sqrt{-1}} F(e^{v\sqrt{-1}}) - e^{-w\sqrt{-1}} F(e^{-v\sqrt{-1}})) \partial t = \Sigma . y_x \int \sin (w + v x) \partial t,$$

w étant une nouvelle fonction de t.

Déterminant convenablement les fonctions u, v, w, et Ft on en tire un grand nombre de corollaires remarquables.

L'équation

$$\int u F(v) \partial t = \Sigma y_x \int u v^x \partial t \begin{Bmatrix} x = 0 \\ x = \infty \end{Bmatrix}$$

en faisant

$$\alpha) \quad u = t^m (1 - a t)^p, \quad v = t,$$

$m - 1$ et p étant des nombres positifs et les limites de l'intégrale étant $t = 0$, $t = \frac{1}{a}$, donne:

$$\frac{\int t^m (1-at)^p F(t) \partial t}{\int t^{m-1} (1-at)^p \partial t} = \Sigma . \frac{m(m+1)\ldots.(m+x)}{(p+m+1)\ldots.(p+m+1+x)} . \frac{y_x}{a^{x+1}},$$

ou, si l'on fait $p = \frac{n}{a}$, $a = 0$:

$$\frac{\int t^m e^{-nt} F(t) \partial t}{\int t^{m-1} e^{-nt} \partial t} = \Sigma . \frac{m(m+1)\ldots.(m+x)}{n^{x+1}} y_x,$$

$$\beta) \quad \text{Si } u = t^\gamma (1-at)^\delta, \quad v = t^\alpha (1-at)^\beta,$$

γ et α étant des nombres entiers, on a:

$$\int t^\gamma (1-at)^\delta F(t^\alpha (1-at)^\beta) \partial t = \Sigma . \frac{1.2\ldots.(\gamma+\alpha x)}{(1+\delta+\beta x)\ldots.(1+\delta+\gamma+(\beta+\alpha)x)} . \frac{y_x}{a^{\gamma+\alpha x+1}},$$

ou, si l'on fait $\beta = \frac{m}{a}$, $a = 0$:

$$\int t^\gamma e^{-nt} F(t^\alpha e^{-mt}) \partial t = \Sigma . \frac{1.2\ldots.(\gamma+\alpha x).y_x}{(n+m x)^{\gamma+\alpha x+1}},$$

$$\gamma) \quad \text{Soit } u = (1 - a t^n)^p, \quad v = t,$$

les limites de $t = 0$

$$\text{et} \quad = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}},$$

n, p, $x - \gamma n$ étant positifs et n entier. Soit $\int t^x (1 - a t^n)^p \partial t$ compris entre les limites assignées $= f(x)$, on aura:

$$\begin{aligned}\int (1 - a t^n)^p F(t) \partial t = {} & f(0) \Sigma \frac{1.(1+n)\ldots.(1+(x-1)n) y_{xn}}{(1+(p+1)n)\ldots.(1+(p+x)n) a^x} \\ & + f(1) \Sigma \frac{2.(2+n)\ldots.(2+(x-1)n) y_{xn+1}}{(2+(p+1)n)\ldots.(2+(p+x)n) a^x} \\ & + \ldots\ldots \\ & + f(n-1) \Sigma \frac{n(n+n)\ldots.(n+(x-1)n) y_{xn+n-1}}{(n+(p+1)n)\ldots.(n+(p+x)n) a^x},\end{aligned}$$

ou, si l'on fait $p = \frac{m}{a}$, $a = 0$:

$$\begin{aligned}\int e^{-mt^n} F(t) \partial t = {} & \int e^{-mt^n} \partial t \, \Sigma \frac{1.(1+n)\ldots.(1+(x-1)n)}{(mn)^x} y_{xn} \\ & + \int e^{-mt^n} t \partial t \, \Sigma \frac{2.(2+n)\ldots.(2+(x-1)n) y_{xn+1}}{(mn)^x} \\ & + \ldots\ldots \\ & + \int e^{-mt^n} t^{n-1} \partial t \, \Sigma \frac{n.2n\ldots.xn.y_{xn+n-1}}{(mn)^x}.\end{aligned}$$

En faisant $n = 2$, on aura entre les limites $-\frac{1}{\sqrt{a}}$ et $+\frac{1}{\sqrt{a}}$:

$$\int (1 - a t^2)^p t \partial t = 0,$$

d'où

$$\int e^{-mt^2} F(t) \partial t = \left(y_0 + \frac{1}{2m} y_2 + \frac{1.3}{2^2 m^2} y_4 + \frac{1.3.5}{2^3 m^3} y_6 + \ldots\right) \int e^{-mt^2} \partial t.$$

δ) Soit $u = t^{2m} e^{-\delta t^2}$, $v = t^2 e^{-\beta t^2}$,

m étant un nombre entier, on a:

$$\frac{\int t^{2m} e^{-\delta t^2} F(t^2 e^{-\beta t^2}) \partial t}{\int e^{-t^2} \partial t} = \Sigma \frac{1.3.5\ldots.(2(m+x)-1) y_x}{2^{m+x} (\delta + \beta x)^{m+x+\frac{1}{2}}} \begin{matrix} t = -\infty \\ t = +\infty \end{matrix}.$$

Ces corollaires donnent d'autres en vertu des formes particulières de la fonction $F(t)$ ou de y_x. Ainsi du corollaire (δ.) on aura, en faisant $\beta = 0$, $m = 0$, $F(x) = \cos\sqrt{x}$ ou $y_x = \pm \frac{1}{1.2\ldots.2x}$:

$$\int e^{-\delta t^2} \cos t \partial t = \frac{e^{-\frac{1}{4\delta}} \int e^{-t^2} \partial t}{\sqrt{\delta}} \begin{matrix} t = -\infty \\ t = +\infty \end{matrix} = \frac{e^{-\frac{1}{4\delta}} \sqrt{\pi}}{\sqrt{\delta}}.$$

Faisant dans le second (β.) $F(t) = \cos t$, $\gamma = 0$, $\alpha = 1$, on aura:

$$\frac{1}{\delta} - \frac{1}{(\delta + 2\beta)^3} + \frac{1}{(\delta + 4\beta)^5} - \ldots. = \int e^{-\delta t} \cos(t e^{-\beta t}) \partial t,$$

et du premier (α.), en faisant $F(t) = \cos(ct)$ ou $F(t) = \sin(ct)$, on aura

$$\int t^m e^{-pt} \cos(ct)\,\partial t = \frac{p^{m+1}}{(p^2+c^2)^{\frac{m+1}{2}}} \cos\left((m+1)\operatorname{arc\,tang} = \frac{c}{p}\right) \int t^m e^{-pt}\,\partial t,$$

$$\int t^m e^{-pt} \sin(ct)\,\partial t = \frac{p^{m+1}}{(p^2+c^2)^{\frac{m+1}{2}}} \sin\left((m+1)\operatorname{arc\,tang} = \frac{c}{p}\right) \int t^m e^{-pt}\,\partial t.$$

6.

Les formules

$$A) \quad \int \frac{u}{2} \left(e^{w\sqrt{-1}} F(e^{v\sqrt{-1}}) + e^{-w\sqrt{-1}} F(e^{-v\sqrt{-1}})\right) \partial t = \Sigma y_x \int u \cos(w+vx)\,\partial t,$$

$$B) \int \frac{u}{2\sqrt{-1}} \left(e^{w\sqrt{-1}} F(e^{v\sqrt{-1}}) - e^{-w\sqrt{-1}} F(e^{-v\sqrt{-1}})\right) \partial t = \Sigma y_x \int u \sin(w+vx)\,\partial t,$$

donnent lieu à deux corollaires remarquables.

α) Faisant dans la première $u = \Sigma A_m \cos mt$, dans la seconde $u = \Sigma A_m \sin mt$, dans l'une et l'autre $v = t$, $w = n - t$, les limites de m et de x étant $+\infty$ et $-\infty$, et observant que

$$\cos mt \cos xt = \frac{\cos(m+x)t - \cos(m-x)t}{2},$$

$$\sin mt \sin xt = \frac{\cos(m+x)t - \cos(m-x)t}{2},$$

on aura entre les limites $t = 0$, $t = \pi$:

$$C) \quad \frac{1}{\pi} \int \left(e^{-nt} F(e^{t\sqrt{-1}}) + e^{nt} F(e^{-t\sqrt{-1}})\right) \Sigma A_m \cos mt\,\partial t = \Sigma y_x A_{n-x} + \Sigma y_x A_{x-n},$$

$$D) \quad \frac{1}{\pi\sqrt{-1}} \int \left(e^{-nt} F(e^{t\sqrt{-1}}) - e^{nt} F(e^{-t\sqrt{-1}})\right) \Sigma A_m \sin mt\,\partial t = \Sigma y_x A_{x-n} - \Sigma y_x A_{n-x}.$$

En faisant dans la première de ces formules

$$\Sigma A_m \cos mt = A_0 = 1,$$

on aura:

$$E) \quad \frac{1}{2\pi} \int \left(e^{-nt} F(e^{t\sqrt{-1}}) + e^{nt} F(e^{-t\sqrt{-1}})\right) \partial t = y_n,$$

et faisant dans l'une et l'autre $A_m = p^m$, $n = 0$, et ne prenant x et m que depuis 0 jusqu'à ∞, on tombe dans les formules de M. Poisson:

$$\frac{1}{\pi} \int \left(F(e^{t\sqrt{-1}}) + F(e^{-t\sqrt{-1}})\right) \frac{1 - p\cos t}{1 - 2p\cos t + p^2}\,\partial t = y_0 + \Sigma y_x p^x = F(0) + F(p),$$

$$\frac{1}{\pi\sqrt{-1}} \int \left(F(e^{t\sqrt{-1}}) - F(e^{-t\sqrt{-1}})\right) \frac{p\sin t}{1 - 2p\cos t + p^2}\,\partial t = \Sigma y_x p^x - y_0 = F(p) - F(0).$$

β) Faisant dans la première $u = \int \varphi(z) \cos tz\,\partial z$, dans la seconde $u = \int \varphi(z) \sin tz\,\partial z$ $\begin{cases} t = 0 \\ t = \infty \end{cases}$ $\begin{cases} z = 0 \\ z = \infty \end{cases}$ $w = -nt$, $v = t$, on aura:

$$\frac{1}{\pi} \iint \left(e^{-nt\sqrt{-1}} F(e^{t\sqrt{-1}}) + e^{nt\sqrt{-1}} F(e^{-t\sqrt{-1}})\right) \varphi(z) \cos tz\,\partial t\,\partial z = \Sigma y_x \varphi(x-n),$$

$$\frac{1}{\pi\sqrt{-1}} \iint \left(e^{-nt\sqrt{-1}} F(e^{t\sqrt{-1}}) - e^{nt\sqrt{-1}} F(e^{-t\sqrt{-1}})\right) \varphi(z) \sin tz\,\partial t\,\partial z = \Sigma y_x \varphi(x-n)$$

Soit par exemple

$$\varphi(z) = e^{-qz},$$

on trouvera celles-ci:

$$\frac{1}{\pi}\int (e^{-nt}F(e^{t\sqrt{-1}}) + e^{nt\sqrt{-1}}F(e^{-t\sqrt{-1}}))\frac{q\,\partial t}{t^2+q^2} = e^{-nq}F(e^{-q}).$$

$$\frac{1}{\pi\sqrt{-1}}\int (e^{-nt}F(e^{t\sqrt{-1}}) - e^{nt\sqrt{-1}}F(e^{-t\sqrt{-1}}))\frac{t\,\partial t}{t^2+q^2} = e^{-nq}F(e^{-q}).$$

En donnant à $F(t)$ ou à y_x des formes particulières, on parvient à d'autres corollaires des formules (*A.* et *B.*).

α) En supposant $F(t) = \Sigma A_m t^m . \Sigma B_n t^{-n}$, les intégrales étant prises depuis n et $m = 0$ jusqu'à n et $m = \infty$, et faisant dans la formule (*E.*) $n = 0$, on aura la formule de **M. Parceval**:

$$\frac{1}{2\pi}\int (F(e^{t\sqrt{-1}}) + Fe^{-t\sqrt{-1}})\,\partial t = A_0B_0 + A_1B_1 + A_2B_2 + \ldots.$$

β) Supposant $F(t) = f\left(t + \frac{1}{t}\right)$, les formules (*A.* et *B.*) deviendront:

$$\int u\cos w f(2\cos v)\,\partial t = \Sigma y_x \int u\cos(w+vx)\,\partial t,$$

$$\int u\sin w f(2\cos v)\,\partial t = \Sigma y_x \int u\sin(w+vx)\,\partial t,$$

et si l'on donne à $f(t)$ la forme $A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \ldots.$, on aura:

$$\frac{1}{\pi}\int \cos nt\, f(2\cos t)\,\partial t = A_n + (n+2)A_{n+2} + \frac{(n+4)(n+3)}{1.2}A_{n+4} + \ldots. \begin{Bmatrix} t=0 \\ t=\pi \end{Bmatrix}.$$

Soit encore $f(t) = e^t$, on aura:

$$\frac{1}{\pi}\int e^{2\cos t}\,\partial t = 1 + 1 + \frac{1}{1.2.1.2} + \frac{1}{1.2.3.1.2.3} + \ldots.$$

En faisant $f(t) = \frac{1}{(a+bt)^n}$, on aura une autre série connue.

Si l'on fait

$$F(t) = \log\left[1 + t\left(1 + \frac{a}{t}\right)^n\right],$$

on aura:

$$\frac{1}{2\pi}\int \log\Big(1 + 2\cos t + 2na + \frac{2n(n-1)}{1.2}a^2\cos t + \frac{2n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^3\cos 2t + \ldots.$$

$$\ldots. + (1 + 2a\cos t + a^2)^n\Big)\,\partial t \begin{Bmatrix} t=0 \\ t=\pi \end{Bmatrix}$$

$$= na - \frac{2n(2n-1)}{1.2}\cdot\frac{a^2}{2} + \frac{3n(3n-1)(3n-2)}{1.2.3}\cdot\frac{a^3}{3} - \ldots.$$

36.

Auflösung einiger Aufgaben der analytischen Geometrie vermittelst des barycentrischen Calculs.

(Von dem Herrn Ober-Lehrer *F. Minding* zu Berlin.)

Die im Folgenden, mit Hülfe des von Herrn Prof. Möbius erfundenen barycentrischen Calculs zu lösenden Aufgaben sind für diese Methode blofse Eliminationsprobleme. Eben deswegen schien es, bei ihrer Wichtigkeit, interessant, sie einmal auf diesem Wege zu lösen.

1. Es sind die barycentrischen Ausdrücke dreier Puncte in einer Ebene gegeben; man sucht den Flächenraum des Dreiecks, welches diese drei Puncte zu Spitzen hat.

Seien die Ausdrücke der drei Puncte:

$qP = aA + bB + cC$; $q'P' = a'A + b'B + c'C$; $q''P'' = a''A + b''B + c''C$.

Eliminirt man den Fundamentalpunct A, so erhält man:

$$a'qP - aq'P' = \beta'B + \gamma'C \quad \text{und} \quad a''q'P' - a'q''P'' = \beta''B + \gamma''C,$$

wo:

$$\beta' = ba' - b'a, \quad \gamma' = ca' - c'a, \quad \beta'' = b'a'' - b''a', \quad \gamma'' = c'a'' - c''a'.$$

Eliminirt man ferner den Fundamentalpunct B, so kommt:

$$\beta''a'qP - (\beta''a + \beta'a'')q'P' + \beta'a'q''P'' = \beta''\gamma' - \gamma''\beta'.C.$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\begin{aligned} ABC : BCP &= q : a. \\ BCP : CPP' &= -aq' : \beta'. \\ CPP' : PP'P'' &= \beta'a'q'' : \beta''\gamma' - \beta'\gamma''. \end{aligned}$$

$$\text{Mithin:} \quad ABC : PP'P'' = a'.qq'q'' : \beta'\gamma'' - \beta''\gamma'.$$

Die Gröfse $\frac{\beta'\gamma'' - \beta''\gamma'}{a'}$ ist $= a(b'c'' - b''c') + a'(b''c - bc'') + a''(bc' - b'c)$.

Bezeichnet man $a(b'c'' - b''c')$ mit A, $a'(b''c - bc'')$ mit A', $a''(bc' - b'c)$ mit A'', so sieht man, dafs A in A' übergeht, wenn man die Accente in dem Ausdrucke für A um eine Einheit erhöht, und statt c''' immer wieder c schreibt. Auf ähnliche Weise entsteht auch A'' aus A'.

Man hat also:

$$\text{I.} \quad \frac{PP'P''}{ABC} = \frac{A + A' + A''}{qq'q''}.$$

2. Es sind die Ausdrücke dreier gerader Linien in einer Ebene gegeben; man soll das Dreieck finden, welches sie einschliefsen.

Seien die Ausdrücke:

$$A+xB+(a+bx)C;\quad A+xB+(a'+b'x)C;\quad A+xB+(a''+b''x)C.$$

Heifsen die Durchschnittspuncte der ersten und zweiten, zweiten und dritten, dritten und ersten, der Reihe nach, Π, Π', Π''. Man findet:

$$q\Pi = (b-b')A-(a-a')B+(a'b-ab')C.$$ Auf gleiche Weise:

$$q'\Pi' = (b'-b'')A-(a'-a'')B+(a''b'-a'b'')C.$$

$$q''\Pi'' = (b''-b)A-(a''-a)B+(ab''-a''b)C.$$

Bezeichnet man nun die Gröfse: $a(b'-b'')+a'(b''-b)+a''(b-b')$ mit M, so erhält man für den ersten Theil A des Zählers in I.:

$$A = -a''(b-b')M.$$

Eben so:

$$A' = -a(b'-b'')M,\quad A'' = -a'(b''-b)M.$$

Hieraus folgt, wie man leicht sieht:

$$\text{II.}\quad \frac{\Pi\Pi'\Pi''}{ABC} = \frac{M^2}{-qq'q''}.$$

3. Es sind vier Puncte im Raume gegeben; man finde das Tetraëder, welches sie zu Spitzen hat.

Heifsen die Puncte: P, P', P'', P''', und sei:

$$qP = aA+bB+cC+dD.$$

Für P', P'', P''' gelten die nemlichen Coëfficienten, resp. mit den Accenten $'$, $''$, $'''$ versehen. Man findet, ganz wie vorhin, durch Elimination von A, B, C:

$$\text{III.}\quad \frac{PP'P''P'''}{ABCD} = \frac{A+A'+A''}{qq'q''q'''.a'a''},$$

wobei man hat:

$$A=\delta'(\beta''\gamma'''-\beta'''\gamma'');\quad A'=\delta''(\beta'''\gamma'-\beta'\gamma''');\quad A''=\delta'''(\beta'\gamma''-\beta''\gamma'),$$

und

$$\beta' = a'b-ab',\quad \gamma' = a'c-ac',\quad \delta' = a'd-ad'.$$
$$\beta'' = a''b'-a'b'',\quad \gamma'' = a''c'-a'c'',\quad \delta'' = a''d'-a'd''.$$
$$\beta''' = a'''b''-a''b''',\quad \gamma''' = a'''c''-a''c''',\quad \delta''' = a'''d''-a''d'''.$$

Man kann den Ausdruck: $A+A'+A''$ leicht entwickeln, und wird ihn dann durch $a'a''$ theilbar finden. Ohnehin stand es auch frei, $a=a'=a''=a'''=1$ zu setzen.

4. Vier Ebenen sind gegeben; man soll das Tetraëder finden, welches sie einschliefsen.

Bezeichnen wir einen beliebigen Punct der ersten Ebene mit P, die drei andern resp. mit P', P'', P'''.

Sei $P \equiv A + xB + yC + (a + bx + cy)C$; um die drei andern Ebenen auszudrücken, accentuiren wir a, b, c resp. ein-, zwei- und dreimal.

Die Durchschnittspuncte der Ebenen 123, 234, 341, 412 heifsen der Reihe nach Π, Π', Π'', Π'''.

Man findet: $q\Pi = (bc')A + (ca')B + (ab')C + (abc)D$, wo

$$(bc') = b(c'-c'') + b'(c''-c) + b''(c-c').$$
$$(ca') = a(c''-c') + a'(c-c'') + a''(c'-c).$$
$$(ab') = a(b'-b'') + a'(b''-b) + a''(b-b').$$
$$(abc) = a(bc') + b(ca') + c(ab') = a(b'c''-b''c') + a'(b''c-bc'') + a''(bc'-b'c).$$
$$q = (bc') + (ca') + (ab') + (abc).$$

Um die Ausdrücke von Π', Π'', Π''' zu finden, darf man nur die Accente in den Coëfficienten des Ausdrucks von Π successive um eine Einheit erhöhen, und statt a^{IV} immer a, statt b^{IV} b, statt c^{IV} c schreiben.

Man findet nach III.:

$$\frac{\Pi\Pi'\Pi''\Pi'''}{ABCD} = \frac{A + A' + A''}{qq'q''q'''(b'c'')(b''c''')}.$$

In diesem Ausdrucke ist $A = \delta'(\beta''\gamma''' - \beta'''\gamma'')$, wie vorhin; eben so A' und A''.

Für die Gröfsen β', γ', δ', etc. hat man:

$$\beta' = (b'c'')(ca') - (bc')(c'a''); \quad \gamma' = (b'c'')(ab') - (a'b'')(bc');$$
$$\delta' = (b'c'')(abc) - (bc')(a'b'c').$$

Man darf nur die Accente erhöhen, um der Reihe nach β'', β''', γ'', γ''', δ'', δ''' zu erhalten. Man setze:

$$a'''(bc') - a(b'c'') + a'(b''c''') - a''(b'''c) = M.$$

Nach den nöthigen Reductionen erhält man:

$$\beta' = -(c''-c')M; \quad \gamma' = -(b'-b'')M; \quad \delta' = -(b'c''-b''c)M.$$
$$\beta'' = +(c'''-c'')M; \quad \gamma'' = +(b''-b''')M; \quad \delta'' = +(b''c'''-b'''c'')M.$$
$$\beta''' = -(c-c''')M; \quad \gamma''' = -(b'''-b)M; \quad \delta''' = -(b'''c-bc''')M.$$

Hieraus erhält man weiter:

$$A = -M^3(b''c'-b'c'').(b''c'''); \quad A' = -M^3(b'''c''-b''c''')((b''c''')-(b'''c));$$
$$A'' = -M^3(bc'''-b'''c)(b'c'').$$

Eine weitere Reduction ergiebt:

$$(bc'''-b'''c)(b'c'') - (b''c)(b'''c''-b''c''') = (c'''b'-c'b''')(b''c''').$$

Hieraus folgt $A+A'+A''=M^3(b'c'')(b''c''')$, und als Resultat:

$$\text{IV.}\quad \frac{\Pi\Pi'\Pi''\Pi'''}{ABCD}=\frac{M^3}{qq'q''q'''}.$$

5. Die Ausdrücke II. und IV. bedürfen leichter Modificationen in den Fällen, wo der zu Grunde gelegte barycentrische Ausdruck für eine gerade Linie oder Ebene nicht unmittelbar anzuwenden ist. Um keine Lücke zu lassen, mögen diese Fälle noch angegeben werden.

Man sieht, dafs wenn die Linie, deren Ausdruck ist

$$A+xB+(a+bx)C,$$

mit der Fundamentallinie AB zusammenfallen soll, man nur $a=b=0$ zu setzen hat.

Soll dagegen diese Linie mit AC zusammenfallen, so betrachte man zunächst den allgemeinen Ausdruck: $A+exB+(a+bx)C$, wo e ein constanter Coëfficient ist. Die durch diesen Ausdruck dargestellte Linie fällt mit AC zusammen, wenn $e=0$. Setzt man nun $ex=y$, so geht der Ausdruck über in: $A+yB+\left(a+\frac{b}{e}y\right)C$, woraus zu ersehen ist, dafs man, wenn die gegebene Linie AC selbst sein soll, in dem Ausdrucke II. nur b als eine unendliche Gröfse anzusehen hat. Man erhält demnach für ein Dreieck, welches von der Fundamentallinie AC und den beiden andern: $A+xB+(a'+b'x)C$, $A+xB+(a''+b''x)C$ eingeschlossen wird, den Ausdruck:

$$\frac{(a''-a')^2}{(1+a')(1+a'')(b'-b''-a'+a''+a''b'-a'b'')}.$$

Soll die Linie mit BC zusammenfallen, so darf man nur a als unendlich ansehen.

Soll dieselbe Linie durch den Fundamentalpunct A gehen, so mufs $a=0$ sein. Soll sie durch B gehen, $b=0$. Soll dieselbe aber durch C gehen, so müfste ihr Ausdruck eigentlich sein:

$$A+gB+\gamma C.$$

Nach der zum Grunde gelegten Form findet man aber das richtige Resultat, wenn man nur $a=-g\,b=\infty$ setzt. Es ergiebt sich dann nach II.:

$$\frac{\Pi\Pi'\Pi''}{ABC}=\frac{(a'-a''+g(b'-b''))^2}{1+g+a'+gb'.\,1+g+a''+gb''.q'}.$$

Man könnte auch das Dreieck für diesen Fall direct aus den Ausdrük-

ken der drei Geraden berechnen, und würde dann genau das nemliche Resultat finden.

6. Soll die Ebene: $A + xB + yC + (a + bx + cy)D$ mit der Fundamental-Ebene zusammenfallen, so mufs $a = b = c = 0$ sein. Soll sie mit ABD zusammenfallen, so darf man in dem Ausdrucke IV. nur c als unendlich betrachten. Soll sie mit ACD zusammenfallen, so ist $b = \infty$, und, wenn sie mit BCD zusammenfällt, $a = \infty$ zu setzen.

Soll diese Ebene durch einen der Fundamentalpuncte A, B, C gehen, so darf man nur resp. a, b, c, $= 0$ setzen. Geht sie durch D, so mufs ihr Ausdruck die Form haben:

$$A + xB + (e + fx)C + yD.$$

In diesem Falle hat man in dem Ausdrucke IV. $b = -fc$, $a = -ec$ zu setzen, und c als unendlich anzusehn.

Hieraus folgt $A+A'+A''=M^3(b'c'')(b''c''')$, und als Resultat:

$$\text{IV.}\quad \frac{\Pi\Pi'\Pi''\Pi'''}{ABCD}=\frac{M^3}{qq'q''q'''}.$$

5. Die Ausdrücke II. und IV. bedürfen leichter Modificationen in den Fällen, wo der zu Grunde gelegte barycentrische Ausdruck für eine gerade Linie oder Ebene nicht unmittelbar anzuwenden ist. Um keine Lücke zu lassen, mögen diese Fälle noch angegeben werden.

Man sieht, dafs wenn die Linie, deren Ausdruck ist

$$A+xB+(a+bx)C,$$

mit der Fundamentallinie AB zusammenfallen soll, man nur $a=b=0$ zu setzen hat.

Soll dagegen diese Linie mit AC zusammenfallen, so betrachte man zunächst den allgemeinen Ausdruck: $A+exB+(a+bx)C$, wo e ein constanter Coëfficient ist. Die durch diesen Ausdruck dargestellte Linie fällt mit AC zusammen, wenn $e=0$. Setzt man nun $ex=y$, so geht der Ausdruck über in: $A+yB+\left(a+\frac{b}{e}y\right)C$, woraus zu ersehen ist, dafs man, wenn die gegebene Linie AC selbst sein soll, in dem Ausdrucke II. nur b als eine unendliche Gröfse anzusehen hat. Man erhält demnach für ein Dreieck, welches von der Fundamentallinie AC und den beiden andern: $A+xB+(a'+b'x)C$, $A+xB+(a''+b''x)C$ eingeschlossen wird, den Ausdruck:

$$\frac{(a''-a')^2}{(1+a')(1+a'')(b'-b''-a'+a''+a''b'-a'b'')}.$$

Soll die Linie mit BC zusammenfallen, so darf man nur a als unendlich ansehen.

Soll dieselbe Linie durch den Fundamentalpunct A gehen, so mufs $a=0$ sein. Soll sie durch B gehen, $b=0$. Soll dieselbe aber durch C gehen, so müfste ihr Ausdruck eigentlich sein:

$$A+gB+\gamma C.$$

Nach der zum Grunde gelegten Form findet man aber das richtige Resultat, wenn man nur $a=-g\,b=\infty$ setzt. Es ergiebt sich dann nach II.:

$$\frac{\Pi\Pi'\Pi''}{ABC}=\frac{(a'-a''+g(b'-b''))^2}{1+g+a'+gb'.1+g+a''+gb''.q'}.$$

Man könnte auch das Dreieck für diesen Fall direct aus den Ausdrük-

ken der drei Geraden berechnen, und würde dann genau das nemliche Resultat finden.

6. Soll die Ebene: $A + xB + yC + (a + bx + cy)D$ mit der Fundamental-Ebene zusammenfallen, so mufs $a = b = c = 0$ sein. Soll sie mit ABD zusammenfallen, so darf man in dem Ausdrucke IV. nur c als unendlich betrachten. Soll sie mit ACD zusammenfallen, so ist $b = \infty$, und, wenn sie mit BCD zusammenfällt, $a = \infty$ zu setzen.

Soll diese Ebene durch einen der Fundamentalpuncte A, B, C gehen, so darf man nur resp. a, b, c, $= 0$ setzen. Geht sie durch D, so mufs ihr Ausdruck die Form haben:

$$A + xB + (e + fx)C + yD.$$

In diesem Falle hat man in dem Ausdrucke IV. $b = -fc$, $a = -ec$ zu setzen, und c als unendlich anzusehn.

37.

Combinatorisch-analytische Abhandlung, enthaltend den Beweis der vier Summationsformeln Band 3. Heft 2. S. 207. d. Journals.

(Von Herrn Pr. *Gudermann* in Cleve.)

1.

Die zu beweisenden Formeln sind einfache Folgerungen aus einem Satze, den wir in einer Allgemeinheit entwickeln und aufstellen werden, welche überflüssig sein würde, wenn es blofs auf den Beweis der vier Summationsformeln ankäme. Die Potenz $(x+z)^n$ kann nämlich, wenn n eine positive ganze Zahl ist, also entwickelt werden, dafs das allgemeine Glied des in der Form einer geschlossenen Reihe erhaltenen Ausdrucks die Form $\varphi x.\psi z$ erhält, wie im Newtonschen Binomialtheoreme; aber der von uns aufzustellende Ausdruck wird, aufser einer willkürlich zu bestimmenden positiven ganzen Zahl m, noch $m+n+1$, und also beliebig viele, völlig willkürliche Gröfsen $\overset{0}{a}, \overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}$, etc. enthalten, so dafs er nicht blofs der allgemeinste Ausdruck für die Potenz $(x+z)^n$, sondern bei aller Allgemeinheit noch eben so einfach sein wird, wie es die Newtonsche Formel selbst ist. Es wird hier ein combinatorisches Theorem vorausgeschickt, worauf die Herleitung des gesuchten Ausdrucks gegründet ist. Es wird $\underset{A}{\overset{r}{C}}$ eine aus den Elementen einer Scale A gebildete Combinationsklasse des $r$ten Grades bezeichnen, wenn die Wiederholungen der Elemente in den Formen gestattet sind; sind diese aber verboten, so dient das Zeichen $\underset{A}{\overset{r}{C}}'$. Ich nehme die Reihe oder primitive Scale $\overset{0}{a}, \overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}$, etc., welche mit völlig willkürlichen Elementen besetzt ist (für die Arithmetik sind sie Zahlen) und leite daraus besondere Scalen her, die ich wie folgt bezeichne:

$$(1) = \overset{0}{a},$$
$$(2) = \overset{0}{a}, \overset{1}{a},$$
$$(3) = \overset{0}{a}, \overset{1}{a}, \overset{2}{a},$$
$$\vdots$$
$$(\alpha) = \overset{0}{a}, \overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \ldots \overset{\alpha-1}{a},$$
$$(n+\alpha) = \overset{0}{a}, \overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \ldots \overset{n}{a}, \overset{n+1}{a}, \ldots \overset{n+\alpha-1}{a},$$

Wird alsdann der folgende Ausdruck gebildet:

$$\varphi(r,n) = S(-1)^{\alpha} . \underset{(n+\alpha-1)}{\overset{\alpha}{C'}} . \underset{(n+\alpha)}{\overset{\beta}{C}} \quad \text{conditione: } (\alpha+\beta=r),$$

in welchem α und β veränderliche positive ganze Zahlen sind, welche der beigefügten Bedingungsgleichung $\alpha+\beta=r$ Genüge leisten und das dem allgemeinen Gliede vorgesetzte Zeichen S das Summationszeichen ist, so ist immer:

$$\varphi(r,n) = 0, \text{ wenn } r > 0.$$

Denn für $r=0$ haben wir offenbar $\varphi(0,n)=1$.

Die Veränderlichkeit der Scalen $(n+\alpha-1)$ und $(n+\alpha)$, die das allgemeine Glied aufweiset, macht einige Schwierigkeit, und es ist eine wohl zu bemerkende Eigenthümlichkeit, dafs die Scale, woraus die Combinationsformen mit unbedingten Wiederholungen gebildet sind, immer ein Glied oder Element mehr enthalten mufs, als die Scale, woraus die Combinationsformen mit verbotenen Wiederholungen zusammengesetzt werden *).

2.

Um den Beweis zu führen, bemerke man, dafs nach den Grundregeln des Combinirens:

$$\underset{(n+\alpha)}{\overset{\beta}{C}} = \underset{(n+\alpha-1)}{\overset{\beta}{C}} + \overset{n+\alpha-1}{a} . \underset{n+\alpha}{\overset{\beta-1}{C}} \text{ und}$$

$$\underset{(n+\alpha)}{\overset{\alpha+1}{C'}} = \underset{(n+\alpha-1)}{\overset{\alpha+1}{C'}} + \overset{n+\alpha-1}{a} . \underset{(n+\alpha-1)}{\overset{\alpha}{C'}}$$

ist, und dafs man aus diesen beiden Gleichungen das Element $\overset{n+\alpha-1}{a}$ eliminiren kann. Die neue Gleichung enthält dann freilich dieses Element

*) Über den hier vorkommenden Gebrauch des Zeichens S sehe man Rothe's Theorie combinatorischer Integrale. Da aber nach Eulers Bezeichnung $Sy = \Sigma y + y +$ const. ist, so habe ich das von Rothe gebrauchte Zeichen Σ in S abgeändert.

noch, aber nicht mehr explicite. Dadurch erhält man:

$$\overset{\alpha}{C}_{(n+\alpha-1)} \cdot \overset{\beta}{C}_{(n+\alpha)} = \overset{\alpha}{C}_{(n+\alpha-1)} \cdot \overset{\beta}{C}_{(n+\alpha-1)} - \overset{\alpha+1}{C}_{(n+\alpha-1)} \cdot \overset{\beta-1}{C}_{(n+\alpha)} + \overset{\alpha+1}{C}_{(n+\alpha)} \cdot \overset{\beta-1}{C}_{(n+\alpha)},$$

und wird dieser Ausdruck substituirt, so ist:

$$\varphi(r,n) = S(-1)^{\alpha} \cdot \sum_{\alpha+\beta=r} \overset{\alpha}{C}_{(n+\alpha-1)} \cdot \overset{\beta}{C}_{(n+\alpha-1)} + S(-1)^{\alpha+1} \cdot \sum_{\alpha+\beta=r} \overset{\alpha+1}{C}_{(n+\alpha-1)} \cdot \overset{\beta-1}{C}_{(n+\alpha)} + S(-1)^{\alpha} \cdot \sum_{\alpha+\beta=r} \overset{\alpha+1}{C}_{(n+\alpha)} \cdot \overset{\beta-1}{C}_{(n+\alpha)}$$

Wird er nun reducirt (man sehe die einfachen Regeln der erwähnten Schrift), so findet man:

$$\varphi(r,n) = S(-1)^{\alpha} \cdot \overset{\alpha}{C}_{(n+\alpha-2)} \cdot \overset{\beta}{C}_{(n+\alpha-1)} \quad \text{cond. } (\alpha+\beta=r).$$

Also:

$$\varphi(r,n) = \varphi(r,n-1).$$

Man hat also auch $\varphi(r,1) = \varphi(r,n)$, und da $\overset{\alpha}{C}_{(\alpha)}$ nur noch eine einzige Combinationsform begreift, nämlich: $\overset{0}{a}\,\overset{1}{a}\,\overset{2}{a} \ldots \overset{\alpha-1}{a}$, so kann der Rest des Beweises der Kürze wegen hier wegbleiben, wofern man aus der Formel $\varphi(r,n) = \varphi(r,n-1)$ nicht sogleich $\varphi(r,n) = \varphi(r,0)$ schliefsen will; denn $\varphi(r,0)$ ist offenbar $= 0$, weil $\overset{\alpha}{C}_{(\alpha-1)} = 0$ ist.

Zusatz. Nimmt man an, dafs $\overset{n}{a} = \overset{n+1}{a} = \overset{n+2}{a} \ldots = \overset{n+\alpha}{a} = 0$ sei, so haben alle Glieder des Ausdrucks $\varphi(r,n)$ eine gemeinschaftliche Scale $(n) = \overset{0}{a}, \overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \ldots \overset{n-1}{a}$ mit n Elementen, und für diesen einfachen Fall ist die Wahrheit des Satzes $\varphi(r,n) = 0$ allgemein bekannt.

3.

Die bewiesene Formel kann auch also dargestellt werden:

$$S(-1)^{\alpha} \cdot \overset{\alpha}{C}_{(m-\beta)} \cdot \overset{\beta}{C}_{(m-\beta+1)} = 0,$$

wenn wieder $\alpha+\beta = r$ die Bedingungs-Gleichung ist; denn es ist $n+\alpha-1 = n+r-1-\beta$, und man hat also nur m für $n+r-1$ gesetzt, welches, da n unbestimmt war, erlaubt ist und die Allgemeinheit der Formel um nichts vermindert.

Führen wir die folgende Bezeichnung ein:

$$[x|\overset{n}{a}] = (x-\overset{0}{a})(x-\overset{1}{a})(x-\overset{2}{a}) \ldots (x-\overset{n-1}{a}),$$

so ist bekanntlich nach den Elementen des combinatorischen Analysis:

$$1. \quad [x|\overset{n}{a}] = S(-1)^{\alpha} \cdot \overset{\alpha}{C}_{(n)} \cdot x^{n-\alpha},$$

$$2.\quad \frac{1}{[x|a]^{n}} = S\overset{\alpha}{C}_{(n)}.x^{-n-\alpha},$$

und die Reihe (2.) bricht dann nicht ab, wohl aber die Reihe (1.). Durch diese Formeln sind die Producte $[x|a]^{n}$ und ihre reciproken Werthe auf Potenzen von x zurückgeführt. Daher wird man nach geschehener Umkehrung die Potenzen von x durch Producte von der Form $[x|a]^{n}$ ausgedrückt erhalten. Für die Formel (1.) werden wir aber andere an die Stelle setzen, welche allgemeiner sind als sie. Dabei kommen aber die numerischen Facultäten in Anwendung, deren Beziehungsart nach Vandermonde gewählt wird, weil sie vor der von Kramp gewählten viele Vorzüge hat. Es sei nämlich:

$[x,d]^{n}=x(x-d)(x-2d)\ldots.(x-nd+d)$ und $[x,d]^{-n}=\frac{1}{(x+d)(x+2d)\ldots.(x+nd)}$,

und wenn $d=+1$ ist, so werde gesetzt:

$[x]^{n}=x(x-1)(x-2)\ldots.(x-n+1)$ und $[x]^{-n}=\frac{1}{(x+1)(x+2)\ldots.(x+n)}$.

Die sogenannten Permutationszahlen sind zwar ebenfalls Facultäten; aber für sie sei des häufigeren Gebrauches wegen noch einfacher:

$0'=1;\ 1'=1;\ 2'=1.2;\ 3'=1.2.3;\ldots.$ also $\alpha'=[\alpha]^{\alpha}=[1,-1]^{\alpha}=\frac{1}{[0]^{-\alpha}}$.

4.

Nehmen wir nun nach diesen Vorbereitungen die folgende Scale zweitheiliger Elemente:

$(x,m)=(x-\overset{0}{a}),\ (x-\overset{1}{a}),\ (x-\overset{2}{a}),\ \ldots.\ (x-\overset{m-1}{a})$ und daneben noch:

$(m)=\ \overset{0}{a},\ \ \overset{1}{a}\ \ \overset{2}{a}\ \ \ldots.\ \ \overset{m-1}{a},$

so haben wir die beiden Formeln:

$$3.\ \overset{n}{C}_{(x,m)}=\frac{[m]^{n}}{n'}.x^{n}-\frac{[m-1]^{n-1}}{(n-1)'}.\overset{1}{C}_{(m)}.x^{n-1}\ldots.+(-1)^{\alpha}\frac{[m-\alpha]^{n-\alpha}}{(n-\alpha)'}.\overset{\alpha}{C}_{(m)}.x^{n-\alpha}\ldots.+(-1)^{n}.\overset{n}{C}_{(m)}.x^{0},$$

$$4.\ \overset{n}{C'}_{(x,m)}=\frac{[m,-1]^{n}}{n'}.x^{n}-\frac{[m+1,-1]^{n-1}}{(n-1)'}.\overset{1}{C}_{(m)}x^{n-1}\ldots.+(-1)^{\alpha}\frac{[m+\alpha,-1]^{n-\alpha}}{(n-\alpha)'}.\overset{\alpha}{C}_{(m)}x^{n-\alpha}\ldots.+(-1)^{n}.\overset{n}{C}_{(m)}x^{0}.$$

Man kann diese aus den Formeln (1. und 2.) leicht herleiten; man kann sie aber auch unmittelbar aus den Gesetzen des Combinirens finden, wobei dann der Gebrauch der ungeschlossenen Reihe (2.), welcher anstöfsig sein könnte, unnöthig ist. Die Formel (4.) findet man endlich auch in „*Dissertatio analytica de functionibus quibusdam symmetricis, auctore*

J. F. Posselt," aus einem analytischen Ausdrucke für $\overset{n}{C}_{(m)}$ sehr einfach hergeleitet.

Diese beiden Formeln sind sich nun, wie man sieht, sehr ähnlich, und sie gestatten eine Reversion, wobei das früher bewiesene combinatorische Theorem $\varphi(r,n)=0$ in Anwendung kommt. Es hilft aber die Bemerkung, dafs es nur nöthig ist, die eine dieser Formeln umzukehren; das Resultat stimmt nämlich mit der Formel, welche durch die zweite Reversion gefunden wird, im Wesen überein.

5.

Nehmen wir also die Formel $\overset{n}{C'}_{(x,m)} = S(-1)^{\alpha}\frac{\overset{n-\alpha}{[m-\alpha]}}{(n-\alpha)'}.\overset{\alpha}{C'}_{(m)}.x^{n-\alpha}$, um sie zur Reversion geeigneter zu machen. Weil nämlich $(-1)^{n-\alpha}.\frac{\overset{n-\alpha}{[m-\alpha]}}{(n-\alpha)'} = \overset{n-\alpha}{[-m+n-1]}$ ist, so erhalten wir, $m+n$ statt m setzend, weil ohnehin $\overset{n}{C'}_{(x,m)}=0$ ist', wenn $n>m$:

$$(-1)^n.\overset{n}{C'}_{(x,m+n)} = S\frac{\overset{n-\gamma}{[-m-1]}}{(n-\gamma)'}.\overset{\gamma}{C'}_{(m+n)}.x^{n-\gamma}.$$

Multipliciren wir diese Gleichung mit $(-1)^{\beta}.\overset{\beta}{C}_{(m+n+1)}$ und setzen wir dann α für n, so giebt eine Summation nach der Bedingungsgleichung $\alpha+\beta=n$:

$$(-1)^n.S\underset{\alpha+\beta=n}{\overset{\alpha}{C'}_{(x,m+\alpha)}.\overset{\beta}{C}_{(m+\alpha+1)}} = S\frac{\overset{\alpha-\gamma}{[-m-1]}}{(\alpha-\gamma)'}x^{\alpha-\gamma}.(-1)^{\beta}\underset{\alpha+\beta=n}{\overset{\gamma}{C'}_{(m+\alpha)}.\overset{\beta}{C}_{(m+\alpha+1)}}$$

Führen wir zu gröfserer Deutlichkeit auf der rechten Seite eine neue Veränderliche $\alpha-\gamma=\delta$ ein und setzen wir zur Abkürzung $m+\alpha=\mu$, so ist, wenn wir α eliminiren, $\alpha=\gamma+\delta$ und $\mu=m+\delta+\gamma$, also $\gamma+\delta+\beta=n$, und daher:

$$(-1)^n.S\underset{\alpha+\beta=n}{\overset{\alpha}{C'}_{(x,m+\alpha)}.\overset{\beta}{C}_{(m+\alpha+1)}} = S\frac{\overset{\delta}{[-m-1]}}{\delta'}.x^{\delta}.(-1)^{\beta}\underset{\substack{\beta+\gamma+\delta=n\\ \mu=m+\gamma+\delta}}{\overset{\gamma}{C'}_{(\mu)}.\overset{\beta}{C}_{(\mu+1)}}$$

Nun sind aber in Anwendung des Theorems $\varphi(n-\delta, m+\delta+1)=0$ die Coëfficienten von $\frac{\overset{\delta}{[-m-1]}}{\delta'}.x^{\delta}$ für die einzelnen Werthe $\delta=0,1,2,3,$ etc. gleich Null, wobei nur der für $\delta=n$, also für $\beta=\gamma=0$ ausgenommen und $=1$ ist; also hat man

$$[-m-1|^{n}_{n'}.x^n = (-1)^n.S\underset{(m+\alpha+1)}{{}^{\beta}C}.\underset{(x,\,m+\alpha)}{{}^{\alpha}C'} \qquad \text{cond. } (\alpha+\beta=r).$$

Multiplicirt man auf beiden Seiten mit $(-1)^n$, setzt dann $x+z$ für x und $-\overset{0}{a}$ für $x-\overset{0}{a}$; auch $-\overset{1}{a}$ für $x-\overset{2}{a}$; $-a$ für $x-\overset{2}{a}$; u. s. w., so hat man den allgemeinsten Ausdruck für $(x-z)^n$; nämlich:

$$5.\quad (x+z)^n = n'.[m]^{-n}.S\underset{(x,\,m+\alpha+1)}{{}^{\beta}C}.\underset{(z,\,m+\alpha)}{{}^{\alpha}C'} \qquad \text{cond. } (\alpha+\beta=n).$$

Es ist dann aber die Scale $(z,m+\alpha)=(z-\overset{0}{a}),\ (z-\overset{1}{a}),\ (z-\overset{2}{a})\ \ldots.\ (z-\overset{m+\alpha-1}{a})$

und $(x,m+\alpha+1)=(x+\overset{0}{a}),\ (x+\overset{1}{a}),\ (x+\overset{2}{a})\ \ldots.\ (x+\overset{m+\alpha}{a})$,

so dafs also die zweite Scale ein Element mehr enthält als die erste. Der Ausdruck enthält überhaupt die folgenden ersten Elemente der primitiven Scale:

$$\overset{0}{a},\ \overset{1}{a},\ \overset{2}{a},\ \ldots.\ \overset{m}{a},\ \overset{m+1}{a},\ \ldots.\ \overset{m+n}{a},$$

deren Menge $=m+n+1$, und da m willkürlich ist, also ebenfalls willkürlich ist. Diese Elemente können willkürliche Werthe haben und können selbst einzeln oder sämmtlich Null sein. In dem Falle aber, dafs einige dieser Elemente gleich sind, werden auch eben so viele Elemente in jeder der beiden Scalen $(z, m+\alpha)$ und $(x, m+\alpha+1)$ einander gleich und man hat sie dann aber gleichwohl so zu behandeln, als wären sie verschieden. Einfacher wird der Ausdruck z. B., wenn $\overset{m}{a}=\overset{m-1}{a}\ \ldots.$ $=\overset{m+1}{a}\ldots.=0$ gesetzt wird. Werden alle Elemente $=0$ gesetzt, so erhält man die Newtonsche Formel, wenn auch nicht in der einfachsten Gestalt; diese findet man dann für $m=0$. Wird $m=0$ gesetzt, so erhalten wir, weil $\underset{(z,\,\alpha)}{{}^{\alpha}C'}=[z|\overset{\alpha}{a}]$ ist, die specielle Formel, aus der wir die Summationsformeln des Herrn Steiner herleiten werden. Da die allgemeine Formel (5.) zu einer Reihe interessanter Folgerungen Anlafs giebt, wir aber hier der Kürze wegen darauf nicht eingehen wollen, so wenden wir uns zu der Herleitung der erwähnten Summationsformeln, indem wir in der That $m=0$ setzen und dadurch die folgende Formel erhalten:

$$6.\quad (x+z)^n = S\underset{(x,\,\alpha+1)}{{}^{\beta}C}.[z|\overset{\alpha}{a}] \qquad \text{cond. } (\alpha+\beta=n).$$

6.

Wir müssen aber von der Allgemeinheit der Formel (6.) noch einiges fahren lassen, wenn wir die Formeln des Herrn Steiner finden

wollen, und $x = 0$ setzen. Setzen wir zugleich $\overset{\circ}{a} = 0$, so haben wir:

$$z^n = S \underset{(\alpha)}{\overset{\beta}{C}} . [z|\overset{\alpha}{a}] \qquad \text{cond. } (\alpha + \beta = n),$$

und es ist dann $(\alpha) = (\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}, \ldots . \overset{\alpha}{a})$ die Scale. Nehmen wir ferner $z = x^2$, $\overset{1}{a} = 1^2$, $\overset{2}{a} = 2^2$, $\overset{3}{a} = 3^2$, ... $\overset{\alpha}{a} = \alpha^2$, so ist:

$$[z|\overset{\alpha}{a}] = x^2(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)\ldots.(x-\alpha+1)(x+\alpha-1) = x \,.\, [x+\alpha-\overset{2\alpha-1}{1}],$$

und also:

$$7. \quad x^{2n-1} = S \underset{(\alpha)}{\overset{\beta}{C}} . [x+\alpha-\overset{2\alpha-1}{1}] \qquad \text{cond. } (\alpha+\beta=n).$$

Wenn wir aber, statt durch x auf der linken Seite zu dividiren, mit $x = (x+\alpha) - \alpha$ auf der rechten Seite multipliciren, so erhalten wir:

$$8. \quad x^{2n} = S \underset{(\alpha)}{\overset{\beta}{C}} \{[x+\alpha\overset{2\alpha}{]} - \alpha \,.\, [x+\alpha-\overset{2\alpha-1}{1}]\} \qquad \text{cond. } (\alpha+\beta=n)$$

$$\text{oder} \qquad x^{2n} = S \underset{(\alpha)}{\overset{\beta}{C}} \{[x+\alpha-\overset{2\alpha}{1}] + \alpha[x+\alpha-\overset{2\alpha-1}{1}]\},$$

und aus diesen Formeln finden sich die des Herrn Steiner, unmittelbar. Da nämlich allgemein:

$$\Delta [x, \overset{n}{\Delta x}] = n \,.\, [x, \overset{n-1}{\Delta x}] . \Delta x, \quad \text{ähnlich mit} \quad \partial x^n = n \,.\, x^{n-1} . \partial x,$$

$$\Delta^r [x, \overset{n}{\Delta x}] = [\overset{r}{n}] . [x, \overset{n-r}{\Delta x}] . \Delta x^r, \quad \text{ähnlich mit} \quad \partial^r_{\,i} x^n = [\overset{r}{n}] . x^{n-r} . \partial x^r,$$

$$\Sigma [x, \overset{n}{\Delta x}] \Delta x = [x, \underset{\overline{n+1}}{\overset{n+1}{\Delta x}}], \quad \text{ähnlich mit} \quad \int x^n \partial x = \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

$$\Sigma^r [x, \overset{n}{\Delta x}] \Delta x^r = [\overset{-r}{n}] . [x, \overset{n+r}{\Delta x}], \quad \text{ähnlich mit} \quad \int^r x^n \partial x^r = [n] . x^{n+r},$$

welche Formeln ich beiläufig zur Rechtfertigung meiner Bezeichnung der Facultäten aufstelle; da ferner allgemein:

$$\overset{x}{S} \varphi x = \Sigma \varphi x + \varphi x + \text{const.},$$

und also:

$$\overset{x}{S} [x, \overset{n}{\Delta x}] = [x + \Delta x, \underset{(n+1)\,\Delta x}{\overset{n+1}{\Delta x}}],$$

wie auch

$$\overset{x}{S^r} [x, \overset{n}{\Delta x}] = [x + r\Delta x, \overset{n+r}{\Delta x}] . \frac{[\overset{-r}{n}]}{\Delta x^r}$$

ist, so giebt die Anwendung dieser Formel auf (7.), wobei $\Delta x = 1$ ist, auf der Stelle

$$9. \quad \overset{x}{S^r} x^{2n-1} = S \underset{(\alpha)}{\overset{\beta}{C}} [2\alpha-\overset{-r}{1}] . [x+r+\alpha-\overset{2\alpha+r-1}{1}] \qquad \text{cond. } (\alpha+\beta=n).$$

Wird hierin $n+1$ für n gesetzt, so hat man die Formel III., wovon die

Formel I. ein specieller Fall ist. Unsere Formel (8.) giebt eben so:

$$\overset{x}{S}{}^{r} x^{2n} = S \overset{\beta}{\underset{(\alpha)}{C}} \left\{ \frac{x+r+\alpha}{2\alpha+r} - \tfrac{1}{2} \right\} . [2\alpha]^{-r+1} . [x+r+\alpha-1]^{2\alpha+1-1},$$

und da $\frac{x+r+\alpha}{2\alpha+r} - \frac{1}{2} = \frac{x+\frac{1}{2}r}{2\alpha+r}$ ist, so hat man

$$10. \quad \overset{x}{S}{}^{r} x^{2n} = \{ S \overset{\beta}{\underset{(\alpha)}{C}} [2\alpha]^{-r} . [x+r+\alpha-1]^{2\alpha+r-1} \} . (x+\tfrac{1}{2}r) \quad \text{cond.} (\alpha+\beta=n).$$

Wird auch hierin $n+1$ für n gesetzt, so hat man die zu beweisende Formel IV., wovon die Formel II. ein specieller Fall ist.

Die Umkehrung der Formel (2.) giebt aber die neue Formel:

$$11. \quad x^{-n} = S(-1)^{\alpha} . \overset{\alpha}{\underset{(\beta+1)}{C}} . \frac{1}{[x|a]^{\beta}} \quad \text{cond.} (\beta = n\alpha),$$

welche ich nur der Vollständigkeit wegen hierher stelle. Man könnte auch in ihr $x+z$ für z, dann $-\overset{0}{a}$ für $x-\overset{0}{a}$; $-\overset{1}{a}$ für $x-\overset{1}{a}$; etc. wie vorhin setzen und erhielte dann für $(x+z)^{-n}$ eine ins Unendliche fortgehende Reihe.

7.

Der Beweis der Summationsformeln des Herrn Steiner forderte eine nähere Bestimmung der Elemente $\overset{0}{a}$, $\overset{1}{a}$, $\overset{2}{a}$, etc.; statt derselben setzen wir nun aber in der Formel (1.) $\overset{0}{a} = 0$, $\overset{1}{a} = d$, $\overset{2}{a} = 2d$, ... allgemein $\overset{\alpha}{a} = \alpha . d$, und erhalten:

$$[x, d]^{n} = S(-1)^{\alpha} \overset{\alpha}{\underset{(n)}{C}} . d^{\alpha} . x^{n-\alpha},$$

und es ist die Scale $(n) = 0, 1, 2, 3, \ldots . (n-1)$. Wir setzen $\overset{\alpha}{C} = {}^{+n}\overset{\alpha}{f}$.

In der Formel (2.) setzen wir $\overset{0}{a} = -d$, $\overset{1}{a} = -2d$, $\overset{2}{a} = -3d$, etc. allgemein $\overset{\alpha}{a} = -(\alpha+1)d$, und erhalten dadurch:

$$[x, d]^{-n} = S(-1)^{\alpha} \overset{\alpha}{\underset{(n)}{C}} . d^{\alpha} . x^{-n-\alpha},$$

die hier vorkommende Scale (n) ist 1, 2, 3, ... n, und indem wir $\overset{\alpha}{\underset{(n)}{C}} = {}^{-n}\overset{\alpha}{f}$ setzen, finden wir dafs die Formel

$$12. \quad {}^{n-1}\overset{r}{f} = {}^{n}\overset{r}{f} + n . {}^{n}\overset{r-1}{f}$$

immer richtig ist, es mag n positiv oder negativ sein. Daher ist auch immer:

$$13. \quad [x, d]^{n} = S(-1)^{\alpha} {}^{n}\overset{\alpha}{f} . d^{\alpha} . x^{n-\alpha},$$

es mag n positiv oder negativ sein. Die umgekehrte Formel ist eben so allgemein:

$$14. \quad x^n = S^{\alpha-n}\overset{\alpha}{f}.[x, \overset{n-\alpha}{d}].d^\alpha,$$

und die beiden Formeln brechen nur dann ab, wenn n eine positive ganze Zahl ist. Man kann dann dieselben auch so ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned} [x, \overset{n}{d}] &= S(-1)^\alpha\, {}^n\overset{\alpha}{f}.d^\alpha.x^\beta \\ x^n &= S^{-\beta}\overset{\alpha}{f}[x, \overset{\beta}{d}].d^\alpha \end{aligned}\right\} \text{ cond. } (\alpha+\beta=n).$$

In Anwendung der letzten Formel erhält man z. B. auf der Stelle:

$$1^n+2^n+3^n\ldots.+x^n = \overset{x}{S}x^n = S^{-\beta}\overset{\alpha}{f}[x+\frac{\overset{\beta+1}{1}]}{\beta+1} \quad \text{cond. } (\alpha+\beta=n)$$

$$\text{und } \overset{x}{S}{}^r x^n = S^{-\beta}\overset{\alpha}{f}[\overset{-r}{\beta}].[x+\overset{\beta+r}{r}] \text{ cond. } (\alpha+\beta=n).$$

Die Functionen ${}^n\overset{1}{f}$, ${}^n\overset{2}{f}$, ${}^n\overset{3}{f}$ etc. können auf viele verschiedene Arten durch n ausgedrückt werden, so dafs man ihre Werthe auch dann, wenn n keine ganze Zahl ist, zu berechnen vermag *).

8.

Wenn man (allgemeiner) zur Scale nimmt $(n)=a,\ a-d,\ a-2d,$ $\ldots.\ (a-nd+d)$ und $\underset{(n)}{\overset{r}{C}}{}'$ mit $[\overset{r}{a}, \overset{n}{d}]$ bezeichnet; dann zur Scale nimmt: $(-n)=-(a+d),\ -(a+2d),\ -(a+3d),\ldots.-(a+nd)$ und die Combinationsklasse $\underset{(-n)}{\overset{r}{C}}$ mit $[\overset{r}{a}, \overset{-n}{d}]$ bezeichnet, so findet man die folgenden drei Fundamentalformeln:

$$15. \quad [\overset{r}{a+d}, \overset{n}{d}] = [\overset{r}{a}, \overset{n-1}{d}]+(a+d).[\overset{r-1}{a}, \overset{n-1}{d}],$$

$$16. \quad [\overset{r}{a}, \overset{n}{d}] = [\overset{r}{a}, \overset{n-1}{d}]+(a-nd+d).[\overset{r-1}{a}, \overset{n-1}{d}]$$

$$17. \quad [\overset{r}{a+d}, \overset{n}{d}] = [\overset{r}{a}, \overset{n}{d}]+n.[\overset{r-1}{a}, \overset{n-1}{d}].d,$$

welche ebenfalls immer richtig sind, es mag n eine positive oder auch negative ganze Zahl sein, und man findet auch:

---

*) Die Werthe von ${}^{\pm n}f$, unter der Annahme dafs n eine ganze Zahl sei, findet man am weitesten hin berechnet in einer Inaugural-Dissertation des Herrn Professor Scherk, worin aber das durch die Formel (12.) gegebene Gesetz nicht nach seiner ganzen Allgemeinheit ausgedrückt ist. In den beiden Tabellen, welche sich eigentlich zu einer vereinigen müfsten, hat man also ${}^{+(k+1)}\overset{h}{f}$ für $\underset{k}{\overset{h}{C}}{}'$ und ${}^{-k}\overset{h}{f}$ für ${}'\underset{k}{\overset{h}{C}}$ zur Überschrift zu nehmen.

$$18.\quad (-1)^r . d^r . \overset{\pm n}{f}^r = \overset{r}{[a, d^{\pm n}]} \quad \text{für} \quad a = 0,$$

woraus man ersieht, dafs die gegenwärtigen Gröfsen wirklich allgemeiner sind, als die Gröfsen: $\overset{r}{{}^n f}$.

Die Formel (17.) hat am meisten Ähnlichkeit mit der die Facultäten betreffenden Formel:

$$[a+d, d]^n = [a, d]^{n-1} + n . [a, d]^{n-1} . d,$$

welche ebenfalls sowohl für positive als für negative Werthe von n gilt.

Aus der Formel (17.) leitet man leicht die folgenden her:

$$19.\quad \Delta [x, \Delta x]^n = n . [x, \Delta x]^{n-1} . \Delta x,$$

$$20.\quad \Delta^r [x, \Delta x]^n = [n]^{\underline{r}} . [x, \Delta x]^{n-r} . \Delta x^r,$$

$$21.\quad \Sigma [x, \Delta x]^n \Delta x = \frac{[x, \Delta x]^{n+1}}{n+1} + \text{const.}$$

Also

$$\overset{x}{S} [x, \Delta x]^n \Delta x = \frac{[x, \Delta x]^{n+1}}{n+1} + (n+1) \frac{[x, \Delta x]^n}{n+1} \Delta x + \text{const.},$$

oder auch

$$\overset{x}{S} [x, \Delta x]^n \Delta x = \frac{[x + \Delta x, \Delta x]^{n+1}}{n+1} + \text{const.},$$

und also:

$$22.\quad [x - rd, d]^n \ldots + [x - 2d, d]^n + [x - d, d]^n + [x, d]^n = \frac{[x+d, d]^{n+1} - [x - rd, d]^{n+1}}{(n+1) d},$$

diese Formel versagt für $n = -1$; übrigens gilt sie für jede positive und auch negative ganze Zahl n. Wenn $n = -1$ ist, so hat man eigentlich eine Reihe gleich hoher Potenzen gleichunterschiedener Zahlen zu addiren. Die für diesen Fall anzuwendende Formel leitet man leicht aus der Formel (14.) her.

9.

Wenn man die Formeln (3. und 4.) vornimmt, so vereinigen sie sich zu einer einzigen, nämlich zur folgenden:

$$23.\quad [x + z, d]^m = S \frac{[n - \alpha]^{\underline{\beta}}}{\beta!} . [x, d]^n . z^\beta \qquad \text{cond. } (\alpha + \beta = m).$$

Setzt man hierin $x = 0$, so findet man noch:

$$24.\quad [z, d]^m = S (-1)^\alpha \frac{[n - \alpha]^{\underline{\beta}}}{\beta!} . {}^n f^\alpha . d^\alpha . z^\beta \qquad \text{cond. } (\alpha + \beta = m).$$

Nach dieser Formel kann man die Combinationsklassen gleichunterschiedener Zahlen bequem berechnen, und man kann die Rechnung immer

so einrichten, dafs keine subtractive Glieder vorkommen. Will man z. B. die Klasse $\overset{6}{[}15\overset{9}{]}$, für welche $d=1$ ist, berechnen, so wird man die Formel also stellen:

$$\overset{m}{[}a+n-1\overset{n}{]} = S(-1)^{\beta}\,\frac{\overset{\beta}{[}-(n-m+1)\overset{\beta}{]}}{\beta'}\,.\,{}^{m}f^{n-\beta}\,.\,a^{\beta},$$

und hat dann, weil $m=5$, $n=9$, $a=7$ ist, die folgenden Zahlen:

1 .	67284 .	1	=	67284
5 .	22449 .	7	=	785715
15 .	4536 .	49	=	3333960
35 .	546 .	343	=	6554730
70 .	36 .	2401	=	6050520
126 .	1 .	16807	=	2117682
			Summe =	18909891 = $\overset{5}{[}15\overset{9}{]}$.

Aus der Formel (23.) schliefst man auch noch als höheres Differential:

$$25.\quad \partial^{r}\,\overset{m}{[}x,\,d\overset{n}{]} = \overset{r}{[}n-m+r\overset{m-r}{]}\,.\,[x,\,d\overset{n}{]}\,.\,\partial x^{r}.$$

Also z. B. für $r=1$:

$$\partial\,\overset{m}{[}x,\,d\overset{n}{]} = (n-m+1)\,.\,\overset{m-1}{[}x,\,d\overset{n}{]}\,.\,\partial x.$$

10.

Eine Specialisirung der Formel (5.) führt zu der neuen Formel:

$$26.\quad (x+z)^{n} = n'\,.\,\overset{-n}{[}m\overset{}{]}\,.\,S(-1)^{\beta}\,\overset{\beta}{[}x,\,d\overset{-(m+\alpha+1)}{]}\,.\,\overset{\alpha}{[}z-d,\,d\overset{m+\alpha}{]}\quad \text{cond. } (\alpha+\beta=n),$$

welche ebenfalls für jeden positiven oder negativen Werth von m gilt. Ein specieller Fall hiervon ist:

$$27.\quad a^{n} = n'\,[m\overset{-n}{]}\,.\,S^{-m-\beta}f\overset{\alpha}{[}a,\,d\overset{m+\beta}{]}\,.\,d^{\alpha}\qquad \text{cond. } (\alpha+\beta=n).$$

Auf allgemeineren combinatorischen Beziehungen, welche in dieser Abhandlung nicht vorkommen, beruhet die folgende Formel:

$$28.\quad \overset{r}{[}x,\,d\overset{m+n}{]} = S\,\overset{\alpha}{[}x,\,d\overset{m}{]}\,.\,\overset{\beta}{[}x-m\,d\overset{n}{]}\qquad \text{cond. } (\alpha+\beta=r),$$

in welcher m und n willkürlich positiv oder auch negativ sein dürfen, aber r eine positive ganze Zahl ist. Man wird aus dieser Formel durch Differentiiren leicht mehre andere herleiten. Da endlich allgemein:

$$\varphi(x+z) = S\,\frac{\Delta^{\alpha}\varphi x}{\Delta x^{\alpha}}\,.\,\frac{[v,\,\Delta x\overset{\alpha}{]}}{\alpha'}$$

ist, so findet man auch noch:

$$29.\quad \overset{r}{[}x+z,\,d\overset{n}{]} = S\,\frac{\overset{\alpha}{[}n\overset{}{]}}{\alpha'}\,.\,\overset{r-\alpha}{[}x,\,d\overset{n-\alpha}{]}\,.\,[z,\,d\overset{\alpha}{]},$$

welche Formel ebenfalls für jeden positiven oder negativen Werth von n gilt, und immer abbricht.

Man hat z. B.

$$\overset{r}{[x,-1]}^{n} = S\,\overset{a}{\underset{a'}{[n]}}\,{}^{n-a}\overset{r-a'}{f}.\overset{a}{[x,-1]},$$

und da $\overset{5}{[15]}^{9} = \overset{5}{[7,-1]}^{9}$ ist, so haben wir bei der Berechnung von $\overset{5}{[15]}^{9}$ nach dieser Formel folgende Zahlen:

1 .	67284 .	1	=	67284
9 .	6769 .	7	=	426447
36 .	735 .	56	=	1481760
84 .	85 .	504	=	3598560
126 .	10 .	5040	=	6350400
126 .	1 .	55440	=	6985440
			Snmme =	18909891 = $\overset{5}{[15]}^{9}$

und dieses Resultat stimmt mit dem vorigen völlig überein.

Die Einfachheit und Allgemeinheit dieser Formeln macht sie einiger Aufmerksamkeit werth, und ich habe sie darum hier aufgestellt, obgleich sie mit den Formeln des Herrn Steiner fast nichts als ihren combinatorisshen Ursprung gemein haben.

Was endlich die höheren Differentiale ganzer Combinationsklassen betrifft, so hat man auch noch allgemeiner die beiden Formeln:

$$\partial^r \overset{n}{\underset{(x,m)}{C}} = [m-n+r].\overset{r}{[}\overset{n-r}{\underset{(x,m)}{C}}.\,\partial x^r,$$

$$\partial^r \overset{n}{\underset{(x,m)}{C}} = [m+n-r,-1].\overset{r}{[}\overset{n-r}{\underset{(x,m)}{C}}.\partial x^r,$$

und es können daraus die höheren Integrale geschlossen werden, nur dafs auch dabei Fälle sich finden, in welchen die allgemeinen Formeln versagen.

Cleve, im Februar 1829.

38.
Einige Nachrichten von Büchern.

1. „Recension des Lehrbegriffs der höhern Körperlehre von Herrn Prof. Lubbe. XII und 255 S. Berlin bei Riemann, 1828. gr. 8." Verfafst und eingesendet von Herrn Moritz Kartscher zu Berlin.

Dieses Buch verdient schon darum Aufmerksamkeit, weil es einen wichtigen, schwierigen und noch wenig untersuchten Theil der höheren Mathematik behandelt. Die folgende kurze Übersicht des Inhalts dürfte daher nicht unwillkommen sein.

No. 1. bis 9. handelt von einigen allgemeinen Sätzen der analytischen Körperlehre, von den Linien doppelter Krümmung, von der Berührung der Flächen, von der Krümmungs-Kugel. Man findet hier was durch die Arbeiten vornehmlich von Monge und Lagrange bekannt ist, in gedrängter Kürze zusammengestellt.

In No. 10. bis 14. werden die Gleichungen behandelt, welche sich aus der Betrachtung der eingehüllten und einhüllenden Flächen ergeben. Die überall (vornehmlich in No. 14.) hinzugefügten Beispiele und Hinweisungen auf die Geometrie, wie auch die Bezeichnung, deren sich der Verf. für die Gleichungen bedient, kommen dem Vortrage sehr zu Hülfe. Die sorgfältige Unterscheidung der drei Formen des allgemeinen Integrals, in Beziehung auf die eingehüllten und einhüllenden Flächen und auf die erzeugende Curve, giebt den nachfolgenden Untersuchungen noch mehr Deutlichkeit.

In No. 15. und 16. werden die totalen Differential-Gleichungen der ersten Ordnung, welchen nur eine primitive Gleichung zu Grunde liegt, und in No. 17. u. 18. die partiellen Differential-Gleichungen der ersten Ordnung integrirt. Die Hinweisungen auf seine früher erschienene Schrift über den höheren Calcul hätte der Verf. vielleicht vermeiden können. Sie sind hin und wieder etwas störend, wie z. B. in No. 17. im Anfange.

In No. 19. werden die Bedingungs-Gleichungen gegeben, unter welchen eine partielle Differential-Gleichung der ersten Ordnung mit einer unbestimmten Function, integrirbar ist; und dann erst in No. 20. werden die totalen Differential-Gleichungen, welchen zwei primitive Gleichungen zum Grunde liegen, integrirt.

Mit No. 21. geht der Verf. zu den partiellen Differential-Gleichungen der zweiten Ordnung über und untersucht hier zuvörderst ihre Entstehung durch Elimination der unbestimmten Functionen. Was in No. 22. und No. 23. I. über die Entstehung der partiellen Differential-Gleichungen der zweiten Ordnung durch Elimination von willkürlichen und von beständigen Gröfsen beigebracht wird, verbreitet viel Licht über die Natur der partiellen Differential-Gleichungen überhaupt.

Die in No. 23. II. angestellten Untersuchungen über die Bestimmung der unbestimmten und willkürlichen Functionen sind auf den Fall beschränkt, dafs die Functionen einerlei Grundgröfsen haben. Es wären auch die von Laplace und anderen Mathematikern über diesen Gegenstand, für den Fall dafs die Functionen verschiedene Grundgröfsen haben, gegebenen Resultate zu wünschen gewesen.

In No. 24. betrachtet der Verf., als Anwendung des bisher von ihm Vorgetragenen, mehrere besondere Flächen.

No. 25. bis 29. handelt von der Integration einer partiellen Differential-Gleichung der zweiten Ordnung und des ersten Grades, welche das erste Integral $P - f(Q) = 0$ hat, wo P und Q Functionen von x, y, z, p, q sind. In No. 25. werden die zu dieser Integration führenden, vom Verf. mit (k) bezeichneten, partiellen Differential-Gleichungen, welche der vorgelegten überhaupt zukommen, vermittelst der Elimination abgeleitet. Nach einigen in No. 26. und 27. enthaltenen näheren Bestimmungen der Gleichungen (k) setzt der Verf. in No 28. seine Integrations-Methode vermittelst der genannten Gleichungen umständlich auseinander und giebt darauf in No. 29. die Anwendung dieser Methode auf mehrere Gleichungen.

Die gewöhnliche Methode, die partiellen Differential-Gleichungen der zweiten Ordnung und des ersten Grades zu integriren, beruht bekanntlich darauf, dafs man aus drei gegebenen totalen Differential-Gleichungen zwei primitive Gleichungen abzuleiten

sucht, welches im Allgemeinen erfordert, dafs man zwischen den drei totalen Differential-Gleichungen zwei der fünf veränderlichen x, y, z, p, q fortschafft, um dadurch eine totale Differential-Gleichung von drei Veränderlichen zu erhalten, welche entweder die verlangte primitive giebt, oder einen Widerspruch zeigt, je nachdem die vorgelegte ein erstes Integral von der oben angegebenen Gestalt hat, oder nicht. Der Verf. dagegen integrirt zuvörderst eine der Gleichungen (k) wie eine totale Differential-Gleichung der ersten Ordnung und des ersten Grades, blofs in Bezug auf zwei Veränderliche und führt in das Integral wieder andere Functionen ein, welche man, zum Unterschiede von den willkürlichen uud unbestimmten Functionen, allgemeine Functionen nennen könnte, da man bei ihnen nur die Veräuderlichen, von welchen sie abhängen, kennt. Sodann differentiirt er das gefundene Integral in Bezug auf alle darin vorkommenden Veränderlichen und löset auf diese Weise neue Bedingungs-Gleichungen ab, mit welchen er wie vorhin mit den Gleichungen (k) verfährt. Das zuletzt gefundene Integral von einer partiellen Differential-Gleichung der ersten Ordnung und des ersten Grades, mit einer unbestimmten Function, ist das gesuchte. In dem Falle nun, dafs die vorgelegte kein erstes Integral von der oben gegebenen Gestalt hat, zeigen sich die gefundenen Bedingungs-Gleichungen unzureichend oder einander widersprechend. Der Verf. führt folglich die vorgegebene Integration zurück auf die von totalen Differential Gleichungen der ersten Ordnung und des ersten Grades mit zwei Veränderlichen, und von partiellen Differential-Gleichungen der ersten Ordnung und des ersten Grades. Weiterhin in No. 42. zeigt der Verf. die Anwendbarkeit seiner Methode auch auf partielle Differential-Gleichungen der dritten Ordnung und des ersten Grades. Auch versucht der Verf. in No. 39. die Auffindung der ersten vollständigen Integrale nach seiner Methode mit allgemeinen Functionen; er bedient sich hierbei einer Schlufsweise, welche man auch in anderen Schriften findet. So vergleiche man z. B. No. 39. P. 221. Z. 21. mit Laplace *Méc. cél. T.* 1. *P.* 142. *l.* 6. Übrigens hat der Verf. wohlgethan, die Anwendung seiner Methode in No. 29. an den vier ersten Beispielen und in No. 39 am ersten Beispiele umständlich zu zeigen.

Nachdem die Methode der No. 28. auf die partielle Differential-Gleichung, in welcher auch p, q vom ersten Grade sind, in No. 30. bis 32. angewendet worden, werden in No. 33. bis 36. die partiellen Differential-Gleichungen der zweiten Ordnung und des ersten Grades, bei welchen die Gleichungen (k) sich unzureichend zeigen, betrachtet. Die Analyse, deren sich der Verf. hierbei in No. 34. und 35. I. bedient, macht zwar die Transformation der Veränderlichen entbehrlich (wie man bei der in No. 34. B. 1. behandelten Differential-Gleichung, welche Monge und Legendre vermittelst der Transformation integrirt haben, sieht): sie giebt auch eine gröfsere Allgemeinheit als diese Transformation, ist aber wenigstens für Anfänger, für welche das Buch ebenfalls bestimmt ist, wohl zu schwierig. Es wäre zu wünschen gewesen, dafs der Verf. diese Untersuchungen, welche für die Gleichungen mit drei Veränderlichen von so grofser Wichtigkeit sind, nicht nur umständlicher ausgeführt, sondern auch überall an seine in No. 28. gegebene Methode inniger angeschlossen hätte, so etwa wie es bei dem in No. 36. betrachteten Falle geschehen ist. Dadurch hätte das ganze Buch an Einheit des Vortrages nur gewinnen können. So hätte der Verf. die in No. 32. angestellten Untersuchungen aus seinem Verfahren No. 34. u. 35. I. ableiten können, da die Integrations-Methode der No. 28. die Grundgröfsen für die in No. 32. betrachteten Gleichungen angiebt. Um nur an einem Beispiele die behauptete Möglichkeit zu zeigen, hat man für die Differential-Gleichung $r-t-\frac{2p}{x}=0$, aus No. 29. B. 6. $y+x=\alpha$, $y-x=\beta$. Sieht man nun in der Gleichung (a) der No. 35. I., a und b als Functionen von α und β an, so erhält man, in Verbindung mit der vorgelegten und mit Hülfe von No. 34., leicht die drei in No. 37. p. 211. aufgestellten primitiven Gleichungen, aus welchen das in No. 32. B. 3. gegebene allgemeine Integral folgt.

Nachdem der Verf. in No. 37. eine Übersicht der verschiedenen im Vorhergehenden erhaltenen Formen der Integrale gegeben hat, spricht er in No. 38. bis 40. von den ersten vollständigen Integralen der Differential-Gleichungen der zweiten Ordnung

und untersucht sodann in No. 41. bis 44. die partiellen Differential-Gleichungen der dritten Ordnung und des ersten Grades. Es wäre zu wünschen, dafs der Verf. bei diesen Untersuchungen ausführlicher gewesen wäre und mehr Resultate von der Art, wie die in No. 44. II. gegeben hätte.

Die No. 45., welche von den totalen Differential-Gleichungen handelt, zeigt deutlich, wie wenig man bis jetzt die Gleichungen dieser Art zu behandeln im Stande ist.

Die Bezeichnungen, welche der Verf. für die Differential-Coëfficienten gewählt hat, sind dem Vortrage, vornehmlich in der zweiten Hälfte des Buchs, förderlich. Das Gegentheil kann man aber wohl von den Abkürzungen einzelner Wörter behaupten.

2. *Mémoire sur les roues hydrauliques à aubes courbes, mues par dessous. Par M. Poncelet. A Metz* 1827.

Diese Abandlung enthält eine interessante Anwendung des Princips der lebendigen Kräfte auf die Schaufelung unterschlächtiger Räder. Bisher liefs man das Wasser, nachdem es den Stofs auf die Schaufeln vollbracht, mit ungenutzter Geschwindigkeit wegfliefsen: Herr Poncelet sucht die auf solche Weise verloren gehende lebendige Kraft für den Betrieb des Rades zu gewinnen, indem er das Wasser, welches aus der Schützöffnung, beinahe in der Richtung der Tangente des Rades, stürzt, in gekrümmte Schaufeln treten läfst, deren erstes Element den Umfang des Rades tangirt. Hierdurch wird zunächst aller Stofs vermieden, und das Wasser erhebt sich längs dieser Curve bis zu einer Höhe, welche dessen relativer Geschwindigkeit angemessen ist. Nachdem es diese erreicht hat, fällt es in der Schaufel wieder zurück und erlangt dieselbe relative Geschwindigkeit, aber in entgegengesetzter Richtung, wieder, und die Einrichtung des Gerinnes ist so, dafs die Schaufel sich augenblicklich leert. Ist nun V die Geschwindigkeit des Wassers vor seinem Eintritt in die Schaufel, v die gleichförmige Geschwindigkeit des Rades, so steigt das Wasser mit der relativen Geschwindigkeit $V-v$ bis zu einer Höhe $\frac{(V-v)^2}{2g}$ und wird beim Hinunterfallen in der Curve die relative Geschwindigkeit $V-v$, aber in entgegengesetzter Richtung wieder erlangen. Also ist die absolute Geschwindigkeit $V-2v$, und diese mufs, wie man weifs, Null werden, wenn von der lebendigen Kraft nichts verloren gehen, oder wenn dieselbe von der Arbeit am Rade durchaus erschöpft werden soll. Diese Bedingung wird durch $V=2v$ erfüllt, oder der Effect $=1$, wenn die Geschwindigkeit des Rades halb so grofs ist, als die Geschwindigkeit des Wassers vor seinem Eintritt in die Schaufel. Unbedingt findet das allgemeine Princip der lebendigen Kräfte hier seine Anwendung, wie überall, wo nicht allein vom Stofse elastischer Massen, oder von gleichförmiger Bewegung eines Systems von Massen überhaupt die Rede ist, sondern auch, wie hier, durch allmälig veränderte Bewegung eine gewisse Anfangs-Geschwindigkeit periodisch wiederkehrt. Denn die Anfangs-Geschwindigkeit des Wassers war Null; es hat beim Austritt aus der Schützöffnung die seiner Fallhöhe H angemessene Geschwindigkeit V erlangt, welche durch die Bedingungen des Systems, ohne Stofs, und allmälig wieder zu Null wird; also ist die Wirkung dieselbe, als wenn das Rad durch den constanten Druck einer Wassersäule H in Bewegung gesetzt würde. Herr von Langsdorff verwirft in seinem „neuen System der Maschinenkunde" I. B. 2. Abth. P. 658. dieses Princip und dessen Anwendung auf die Ponceletschen Räder und will es nur für den Stofs elastischer fester Körper gelten lassen. Diese Einwürfe berechtigen indessen zu keiner besondern Widerlegung, da eine solche den gröfsten Theil der erwähnten Maschinenkunde zu umfassen haben würde, und also vorbehalten bleiben mufs. Das eben ist die grofse Bedeutung des allgemeinen Prinzips der lebendigen Kräfte bei der Bewegung der Maschinen, dafs man ohne mühsamen Calcul, durch unmittelbare Anschauung, den Effect einer Maschine zu beurtheilen im Stande ist; denn zu keinem andern als dem obigen Resultate würde man gelangen, wenn man die während des Heraufsteigens und Herabfallens des Wassers in der Schaufel wirkenden, aus Schwungkraft und Schwere zusammengesetzten variabeln Normalkräfte, nachdem sie in die Richtung der Bewegung des Rades zerlegt worden, integriren und daraus zugleich die Indifferenz der Schaufelform abstrahiren wollte.

Carnot war wohl einer der ersten, der in seinem „*Essai sur les Machines*" hierauf aufmerksam machte. Navier, de Coriolis, Petit, Burdin, und endlich Poncelet, haben, in den practischen Sinn dieses Prinzips eingehend, dessen ungemeine Fruchtbarkeit anerkannt und bethätigt, und dadurch eine gänzliche Reform der Maschinen-Lehre vorbereitet *).

Ist die Theorie des Ponceletschen Rades festgestellt, so mufs im Mémoire selbst nachgelesen werden, wie durch mannigfaltige Umstände der Effect desselben auf 0,67 oder 0,6 herabsinkt, was immer noch mehr als das Doppelte des bisher geleisteten Effects beträgt. Diese Umstände sind mit des Verfassers gewohnter Präcision entwickelt und gesondert. Erfahrungen und Versuche mit Modellen und im Grofsen bestätigen und modificiren die Theorie und die bisher gebräuchlichen Coëfficienten; aber immer findet man die Gründe der Abweichungen entwickelt und nachgewiesen. Vieles, was nicht zum Ressort dieses Journals gehört, aber für den Techniker überaus wichtig ist, ist in diesem Mémoire enthalten, das sich auf diese Weise zu einer der bedeutendsten Erscheinungen in diesem Gebiete gestaltet, und zeigt, wie Herr Poncelet auch auf practischem Boden so ganz seinen Stoff zu beherrschen versteht.

Potsdam im Januar 1830. M. H. Jacobi.

3. Das Lehrbuch der Geometrie vom Herrn Prof. Försteman zu Danzig, wovon die beiden ersten Bände erschienen sind, zeichnet sich durch Eigenthümlichkeit und Reichhaltigkeit aus. Es scheint zwar kein eigentlich systematischer Lehrbegriff für Lernende sein zu sollen, indem es, besonders im Anfange, die Sätze ohne Beweise, nur wie erzählungsweise giebt, auch ein grofser Theil des Buches unter die Rubrik „Vermischtes, Anhänge, Zusätze" u. s. w. gebracht ist; desto nützlicher aber dürfte es Lehrern und Denjenigen sein, welche in der Geometrie schon einigen Grund gelegt haben; denn es beherrscht sichtbar seinen Gegenstand, behandelt ihn mit vieler Eigenthümlichkeit und eigener Kraft, geht über das Gewohnte hinaus, woran es bei so vielen Wiederholungen der Elemente wohl Noth thut, und giebt auch von neuern geometrischen Untersuchungen Nachrichten und Kenntnifs. Die Schrift verdient daher alle Aufmerksamkeit; denn auch sie vermag dazu beizutragen, in Deutschland, dem allgemeinen Verkehre mit der Mathematik zu einer etwas mehr aus dem gewohnten Kreise herauszutretenden, freieren Bewegung zu verhelfen.

4. Ein recht verdienstliches Unternehmen ist unstreitig die deutsche Übersetzung, welche der Herr Professor Salomon zu Wien, Verfasser eines ausführlichen Lehrbuches der ebenen und sphärischen Trigonometrie und verbesserter mathematischer Tafeln, von Eulers Integral-Rechnung liefert, wovon bereits 3 Bände in Octav-Format erschienen sind. Das Studium der Mathematik wird zuverlässig bedeutend gewinnen, wenn man den Lernenden die classischen Quellen durch wohlfeile wörtliche Übersetzungen zugänglicher macht. Denn kein Commentar, keine Nachbildung, keine Bearbeitung eines Originales kann so wirksam sein, als das Original selbst. In verändertem Gewande erscheint selbst das Wesentlichste zuweilen entstellt, Vieles entweicht unter der Bearbeitung und nicht immer bleibt der Kern zurück. Wie wichtig es sei, die Originale in ihrer Reinheit zu besitzen, und wie wirksam sie für das Studium sind, beweisen Euclides und Archimedes. Euler und Lagrange sind in ihrer Art nicht weniger classisch als jene.

5. Ein wichtiges neues Werk ist: „*M. G. de Pontécoulant théorie analitique du système du monde. Paris, chez Bachelier*, 1829." 2 Bände in 8. Einl. 18 S. Text 508 und 504 S. Wir können den Zweck, die Art des Werkes und sein Verhältnifs zu der berühmten *Mécanique céleste* nicht besser ausdrücken, als mit des Verfassers eigenen Worten am Schlusse der Einleitung.

„*Le développement analytique des conséquences du principe de la pesanteur universelle constitue la théorie du système du monde; elle est présentée avec détail dans*

*) Wie dieses Prinzip auf ungleichförmig arbeitende Maschinen anzuwenden sei, hat Referent in einem Project zu einer Wassersäulen-Maschine gezeigt, welches sich in den Archiven der Königlichen Ober-Bau-Deputation zu Berlin befindet.

la Mécanique céleste de Laplace, qu'on doit regarder comme le Traité d'Astronomie physique le plus sublime et le plus complet que nous possedions. Cependant les grands progrès qu'a faits depuis vingt ans l'Analyse, ont permis d'aplanir les principales difficultés qu'on rencontre dans cet ouvrage, et qui en rendent souvent la lecture pénible. La théorie du système du monde peut être présentée maintenant avec une clarté et un ensemble qui lui avaient manqué jusq'ici, et qui permettent d'en saisir d'un regard toutes les parties. Les méthodes qu'elle emploie ont subi ces heureuses améliorations que le temps et l'expérience apportent toujours dans les oeuvres des géomètres; elles sont devenues plus simples en se généralisant. Nous avons essayé de réunir en un même corps d'ouvrage les réultats de tant d'utiles travaux; nous avons donné aux théories assez de développemens pour en bannir toute obscurité, et les exemples numériques que nous y avons ajoutés suffiront pour en rendre les applications faciles. Lorsqu'une science, après avoir épuisé les efforts des plus puissans génies, semble être enfin parvenue à ce degré d'élévation que les bornes de l'intelligence humaine ne lui permettent pas de franchir, il ne reste plus qu'un moyen d'en hâter les progrés, c'est d'en rendre les abords moins pénibles, de substituer des méthodes faciles aux methodes compliquées qu'on avait d'abord employées pour en résoudre les problèmes, et de se rappeler enfin que, dans les ouvrages des hommes comme dans ceux de la nature, la simplicité est un des attributs de la perfection."

Das Werk ist unstreitig ein würdiges Unternehmen, und während wir statt der Meinung, die den Worten „*Lorsqu'une science etc. . . . . pour en résoudre les problèmes*" zum Grunde zu liegen scheint, dafs man erst dann, wenn die menschliche Einsicht nicht weiter vordringen zu können scheint, nothgedrungen an Vereinfachung des Vorhandenen denken müsse, vielmehr diejenige hegen, dafs die Vereinfachung gar nicht früh genug geschehen könne, und dafs sie fast nicht minder nützlich sei als weiteres Fortschreiten, weil sie dasselbe so überaus mächtig zu fördern vermag, unterschreiben wir demgemäfs mit voller Überzeugung die auf die obigen folgenden Worte: „*et de se rappeler enfin que, dans les ouvrages des hommes comme dans ceux de la nature, la simplicité est un des attributs de la perfection.*" Möchten dieselben doch von Allen, welche die Wissenschaften, und eine der edelsten unter ihnen, die Mathematik, cultiviren, stets beherzigt werden! Einfach klar und natürlich ist in ihr, wie das Elementare, so das Abstracteste und Verborgenste; einfach, klar und natürlich waren die Gedanken der gröfsten Geometer, Euclides, Euler und Lagrange, einfach wie die grofsen Gesetze der Natur, wie das Gesetz der allgemeinen Schwere, nach welchem das Weltall sich bewegt, und angemessen einfach war ihre Darstellungsweise. Nichts kann wohl die Fortschritte der Mathematik mehr hemmen, als trübe Dunkelheit. Gegentheils kann nichts kräftiger die weitere Entwicklung der Erkenntnisse fördern, als Klarheit und natürliche Einfachheit. Möchte die Mathematik bald überall in das Licht der natürlichen Einfachheit gebracht werden, welches allein vermag die Wahrheit in ihrer Schönheit zu zeigen und ihre ferneren Wege zu beleuchten.

6. Von den Arbeiten des Herrn Poisson wollen wir folgender drei neuern, ihres berühmten Verfassers würdigen Memoiren erwähnen:

Mémoire sur l'equilibre des fluides.

Mémoire sur l'equilibre et le mouvement des corps élastiques.

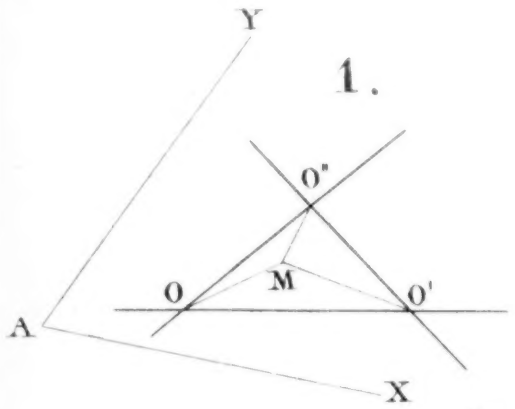
Mémoire sur la proportion des naissances des filles et des garçons.

Letzterer Gegenstand liefert den Stoff zu interessanten Aufgaben für die Wahrscheinlichkeits-Rechnung.

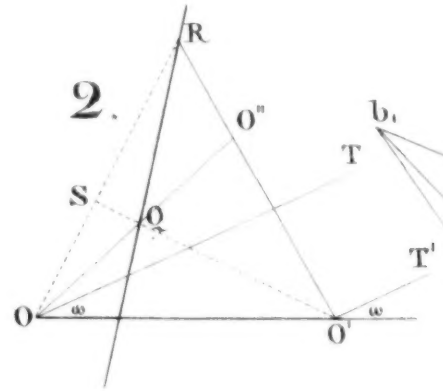
7. Die *Annales des mathématiques* von Gergonne, die *Correspondance mathématique et physique* von Quetelet, die Wiener Zeitschrift für Mathematik und Physik, von Baumgärtner und v. Ettinghausen, haben fernern erfreulichen Fortgang. Von Cauchy *Exercices des mathématiques* sind wiederum mehrere neue Hefte, bis jetzt in allem 42 erschienen.

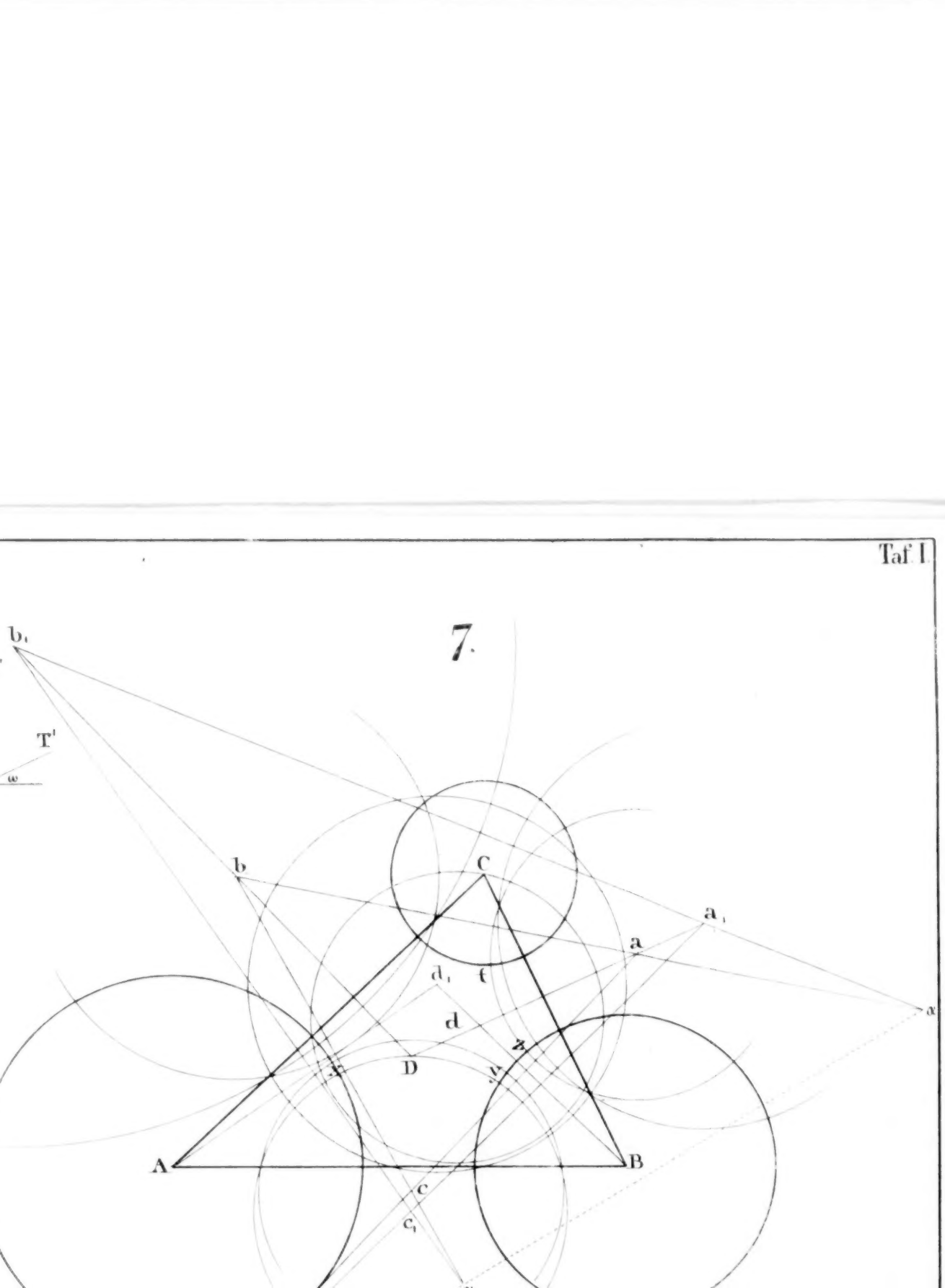
Taf. I.

1.

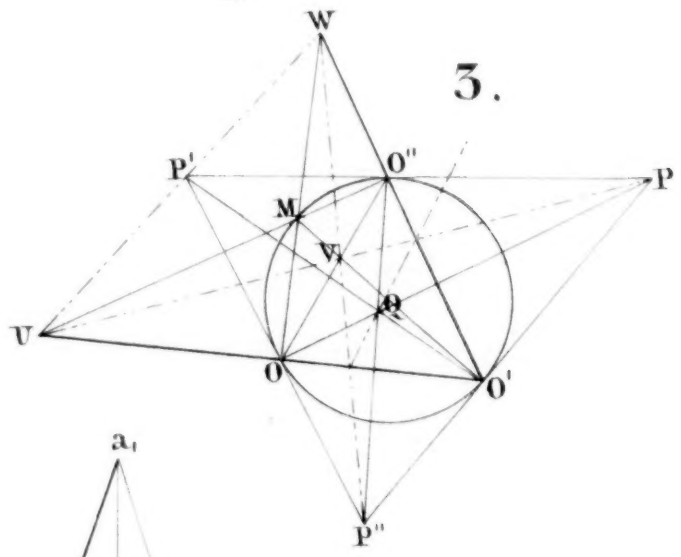

Y
O''
O
M
O'
A
X

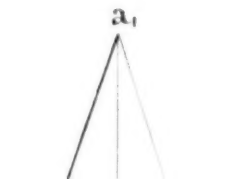
2.


R
O''
S
Q
O
ω
ω
O'

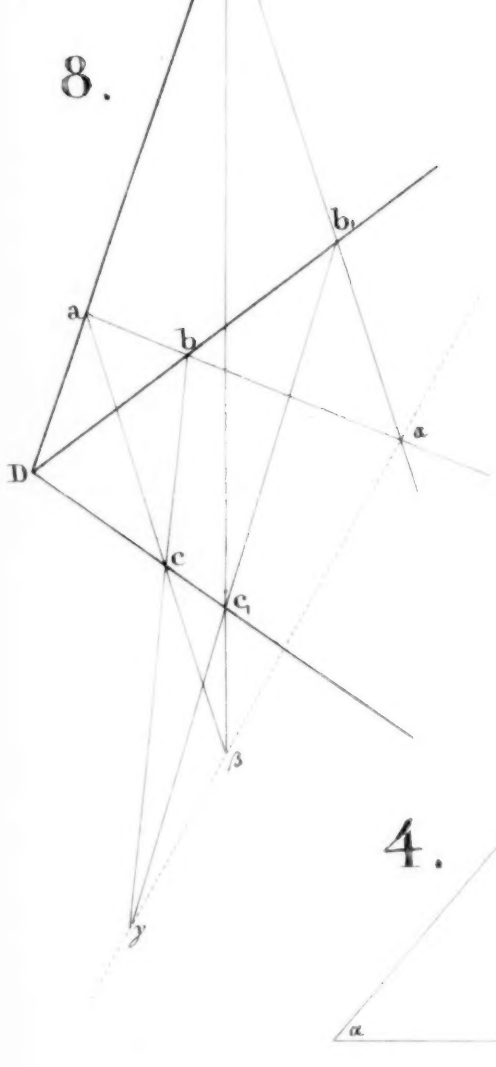

b₁
T
T'
7.
b
C
a₁
a
d₁
f
d
x
D
y
z
A
B
c
c₁
α

3.

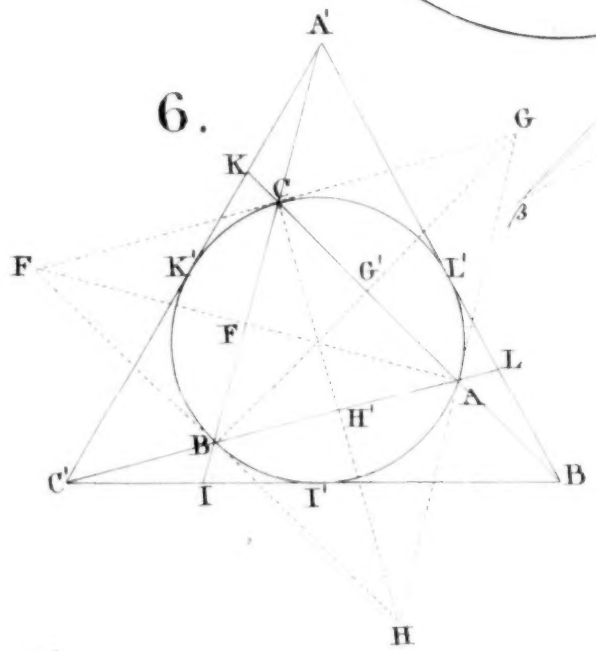

W
P'
O''
P
M
V₁
Q
V
O
O'
P''


a₁

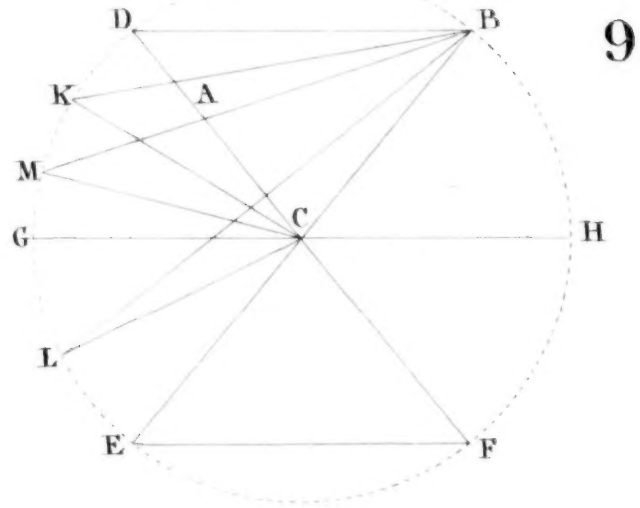
8.


D
a
b
c
b_1
c_1
α
β
γ

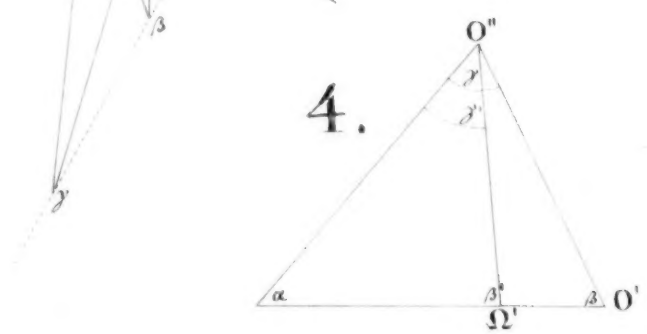
6.


A'
G
K
C
F
K'
G'
L'
L
A
H'
B
C'
I
I'
B
H

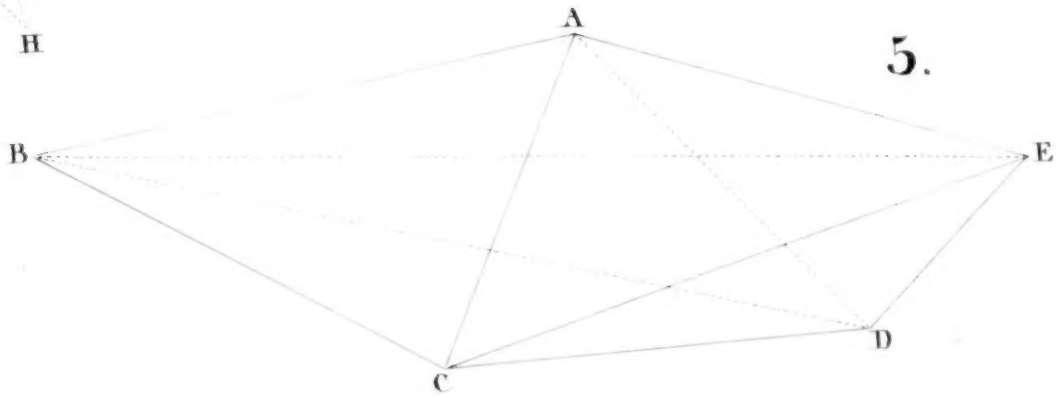
9.

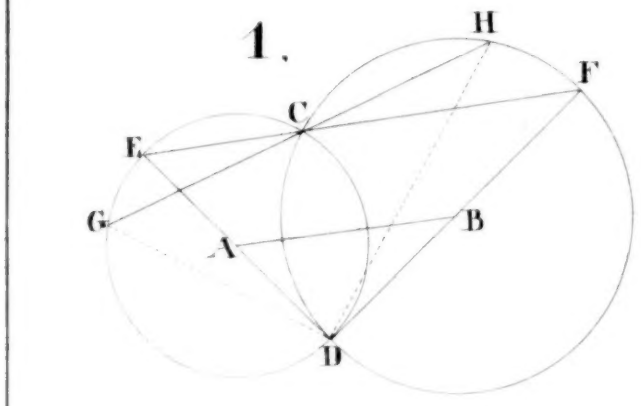

D
B
K
A
M
C
G
H
L
E
F

4.

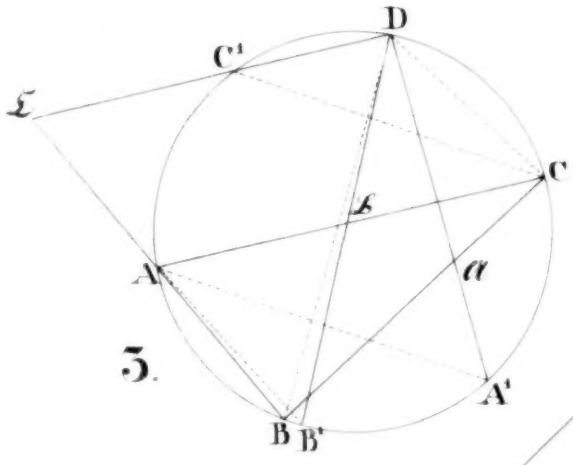

O"
γ
γ'
α
β'
β
O'
Ω'
y

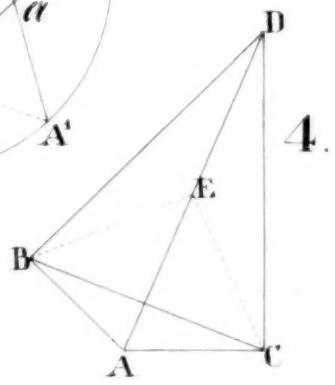
5.

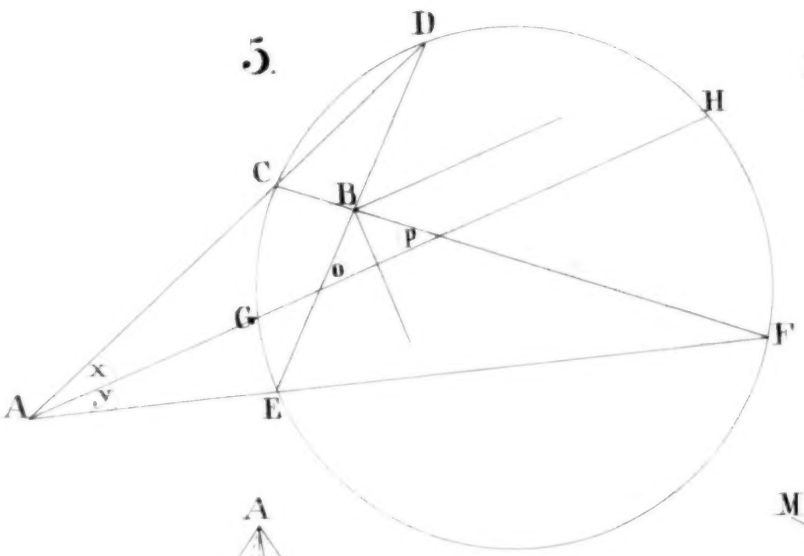

A
B
E
C
D


1.
H
F
C
E
G
A
B
D

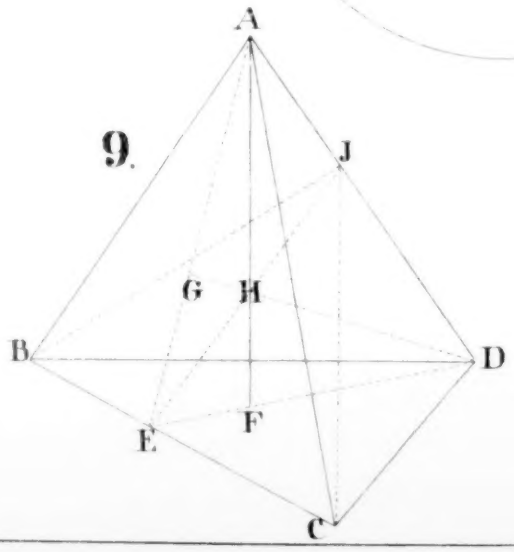
A'
A


D
C'
ξ
C
ε
A
α
3.
A'
B
B'


D
4.
E
B
A
C

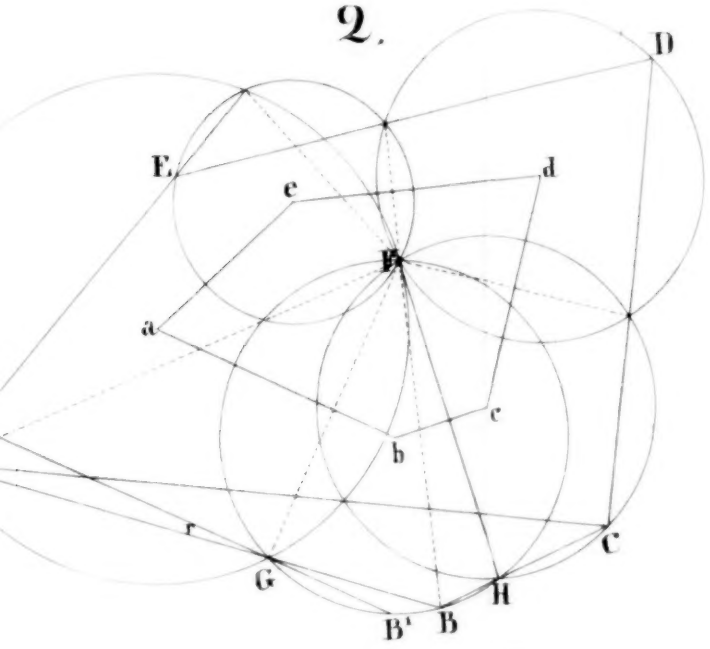

5.
D
H
C
B
β
ϑ
G
F'
x
y
A
E

M'
M''

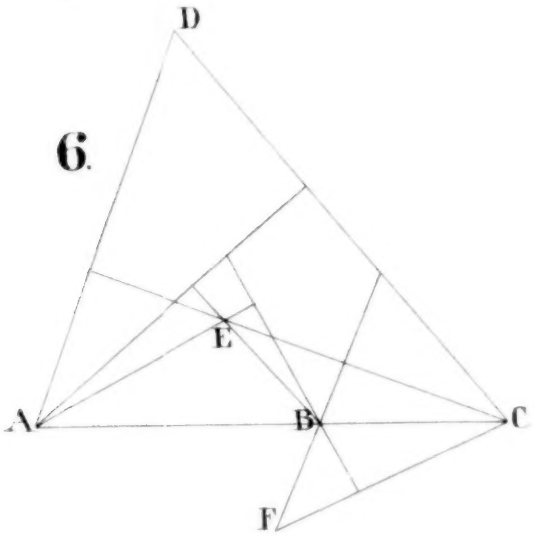

A
9.
J
G
H
B
D
E
F
C

A

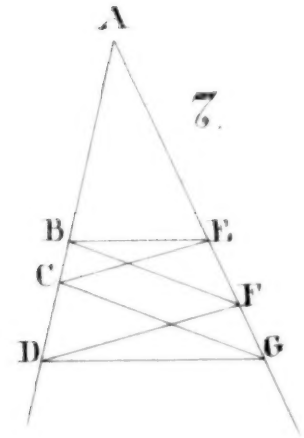
2.


D
E
e
d
a
b
c
r
G
H
B'
B
C

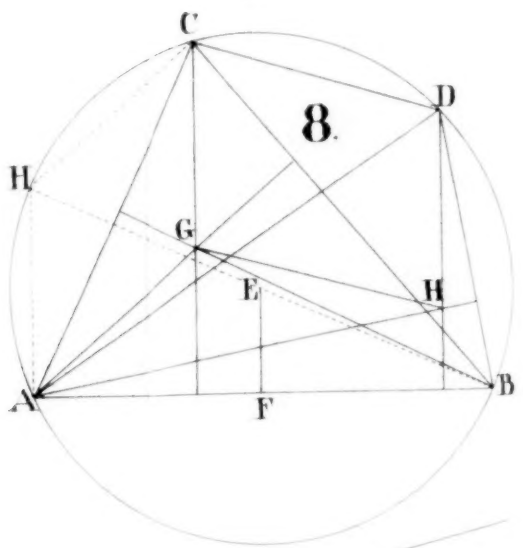
6.


D
E
A
B
C
F

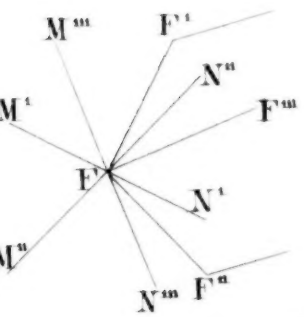
7.


A
B
E
C
F
D
G

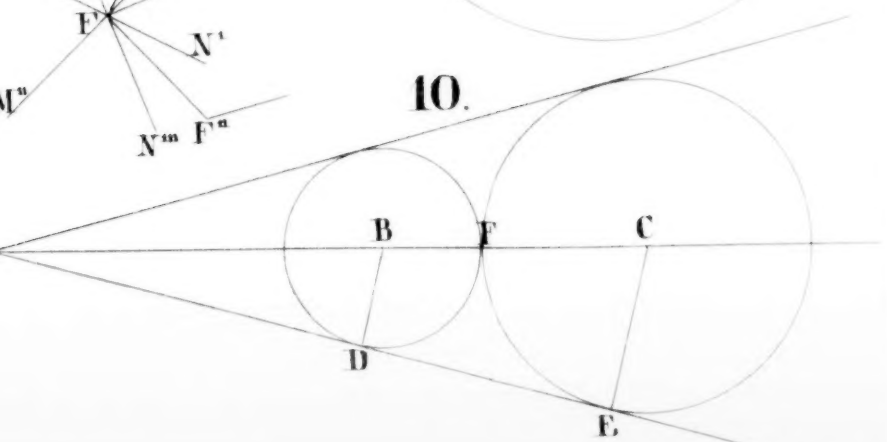
8.


C
D
H
G
E
H
A
F
B

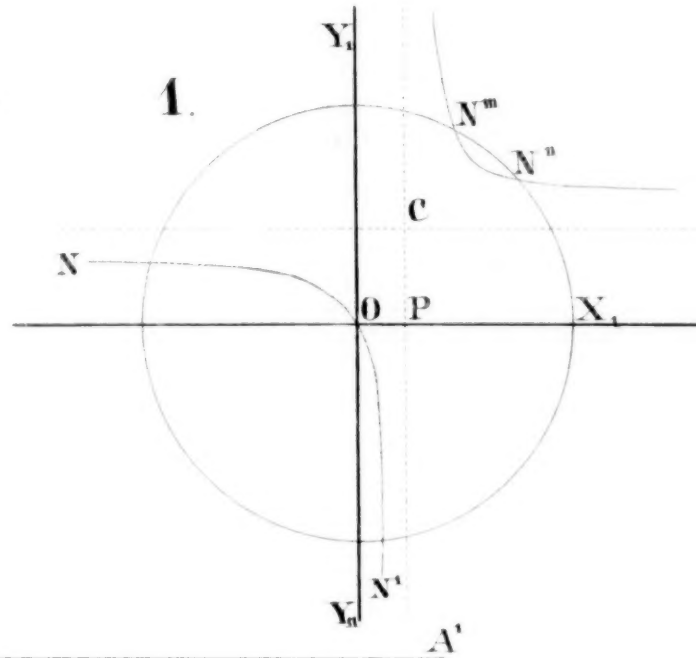
11.


M'''
F''
N''
M'
F'''
F'
N'
M''
N'''
F''

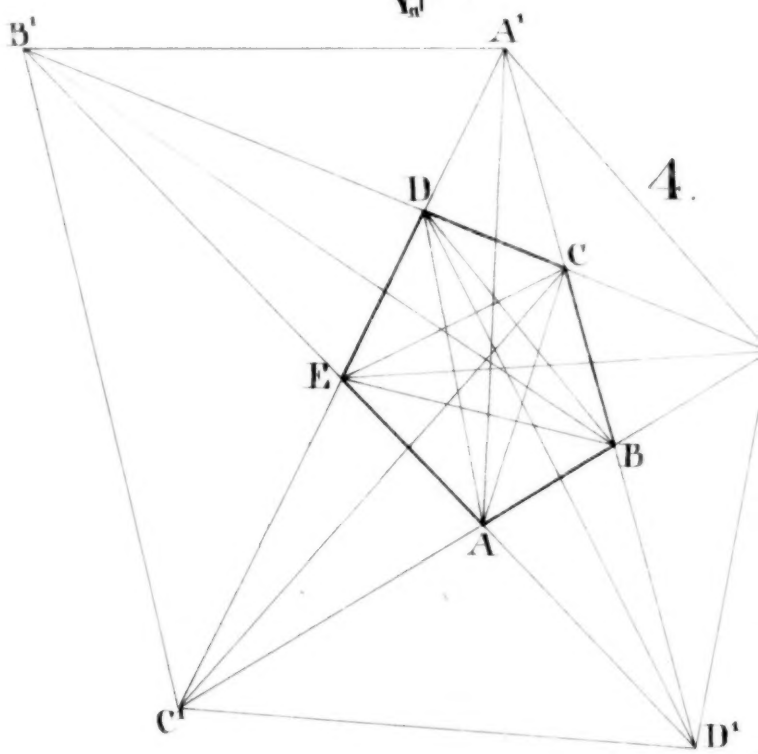
10.


B
F
C
D
E

1.

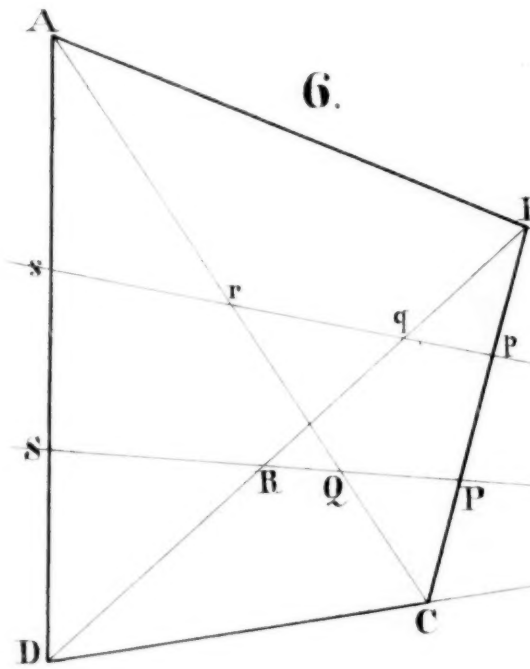
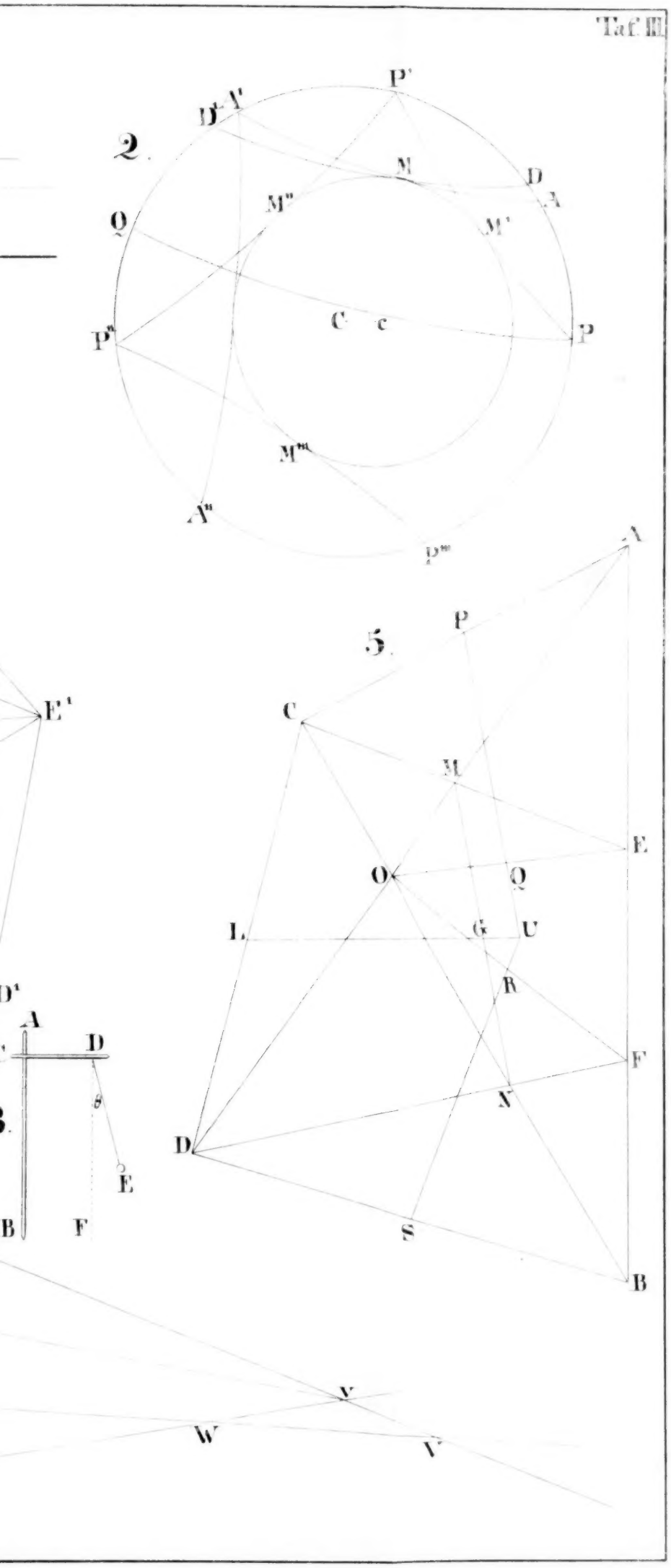


4.



3.

6.



Taf. III.